Dobble

Cédric Bonnafé

CNRS - Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Montpellier, Octobre 2019

Dobble

Dobble

Géométrie plane

Géométrie plane

- Points

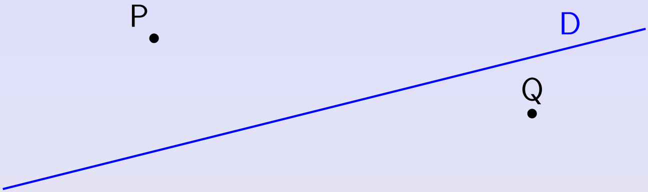
Géométrie plane

- Points

Géométrie plane

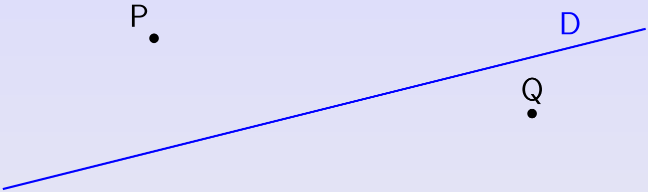
- Points
- Droites

Géométrie plane



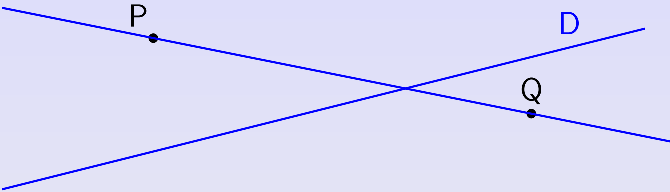
- Points
- Droites

Géométrie plane



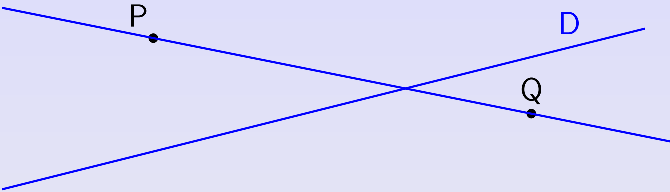
- Points
- Droites
- Par deux points il passe une et une seule droite

Géométrie plane



- Points
- Droites
- Par deux points il passe une et une seule droite

Géométrie plane



- Points
- Droites
- Par deux points il passe une et une seule droite

Transformations

Transformations

But : respecter l'alignement

Transformations

But : respecter l'alignement

- Rotations

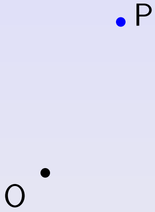
Transformations

But : respecter l'alignement

- Rotations

Transformations

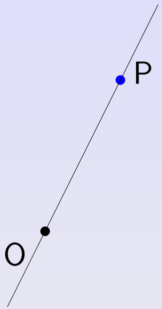
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

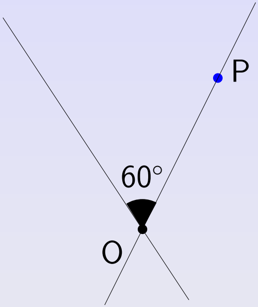
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

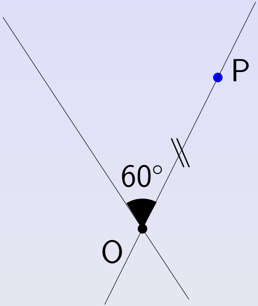
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

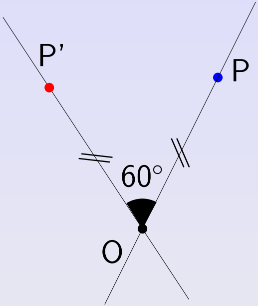
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

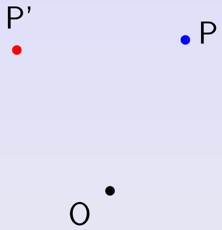
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

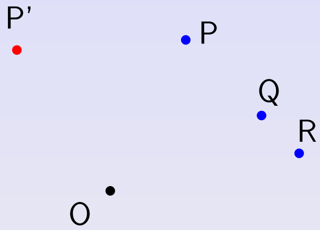
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

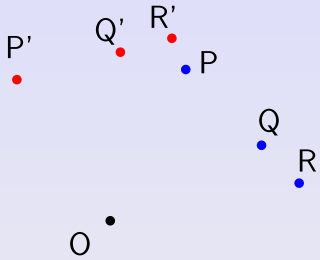
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

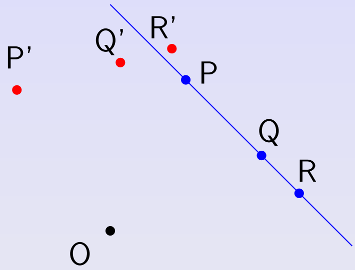
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

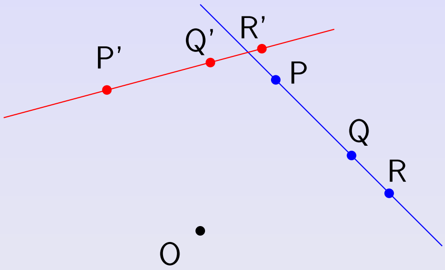
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

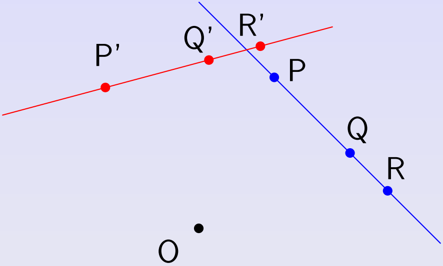
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

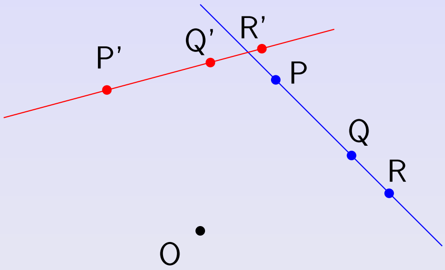
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

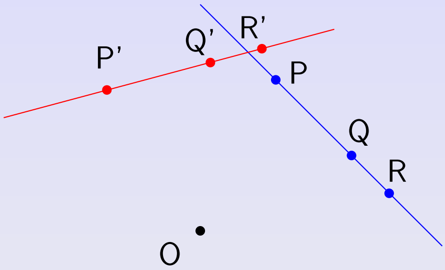
But : respecter l'alignement



- Rotations

Transformations

But : respecter l'alignement



- Rotations

Dobble

Dobble

Dobble

- 57 figurines
- 55 cartes

Dobble

- 57 figurines
- 55 cartes (bug ? Il pourrait y en avoir 57)

Dobble

- 57 figurines $\longrightarrow$ **57 points**
- 55 cartes (bug ? Il pourrait y en avoir 57)

Dobble

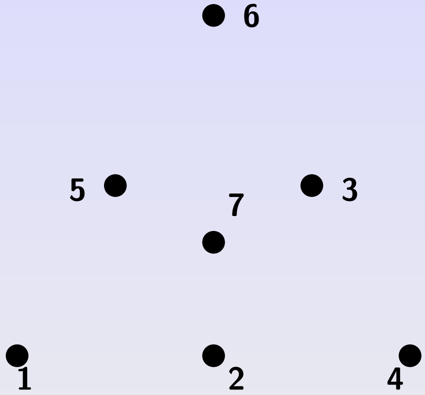
- 57 figurines $\longrightarrow$ **57 points**
- 55 cartes (bug ? Il pourrait y en avoir 57) $\longrightarrow$ **57 droites**

Dobble

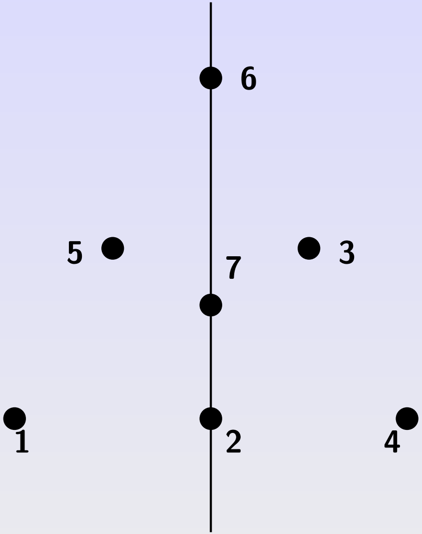
- 57 figurines $\longrightarrow$ **57 points**
- 55 cartes (bug ? Il pourrait y en avoir 57) $\longrightarrow$ **57 droites**
- $\mathbf{57 = 8^2 - 8 + 1}$

Une géométrie discrète

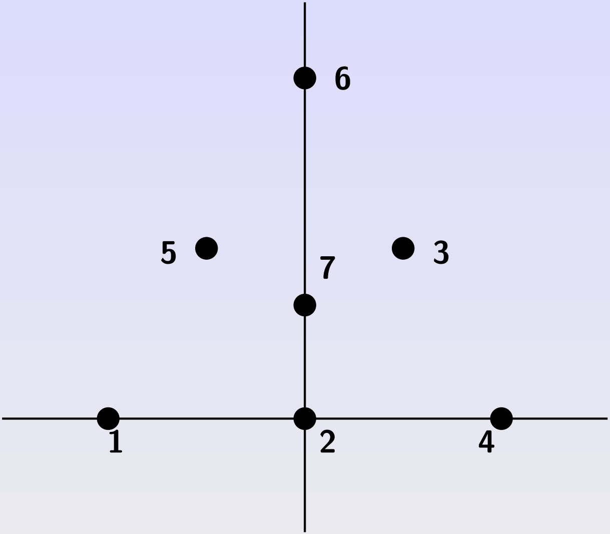
Une géométrie discrète



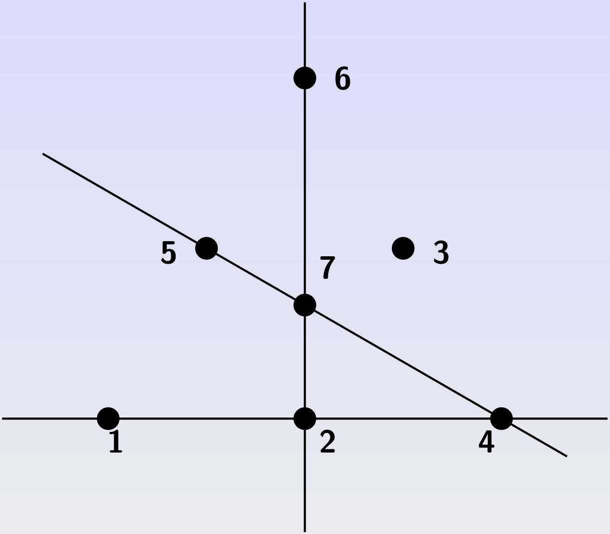
Une géométrie discrète



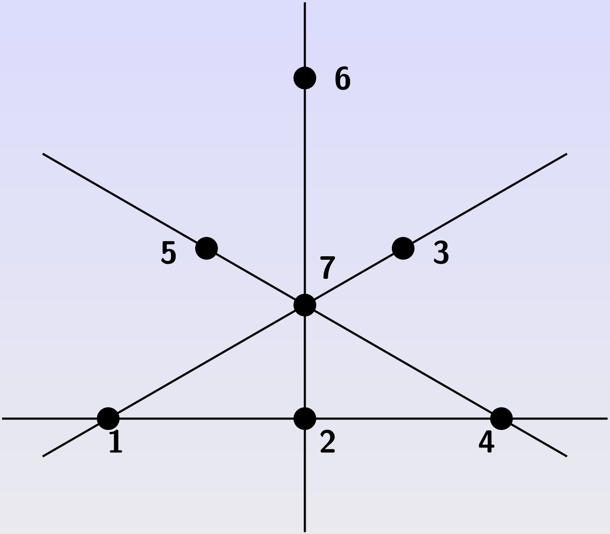
Une géométrie discrète



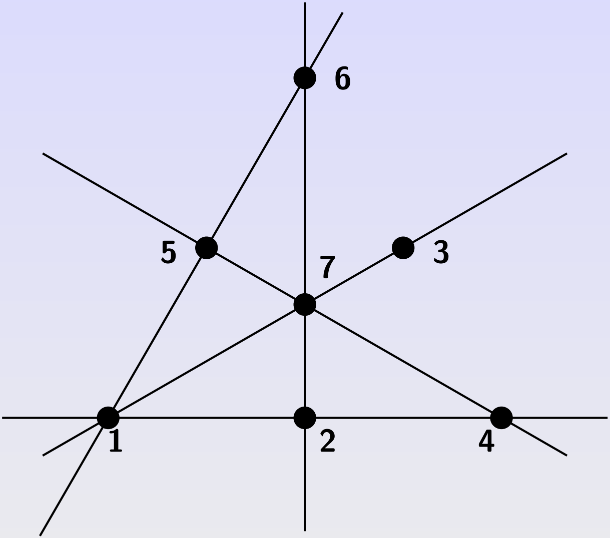
Une géométrie discrète



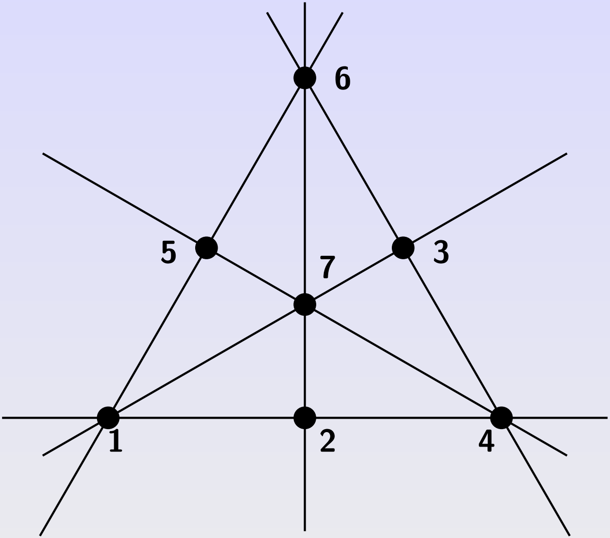
Une géométrie discrète



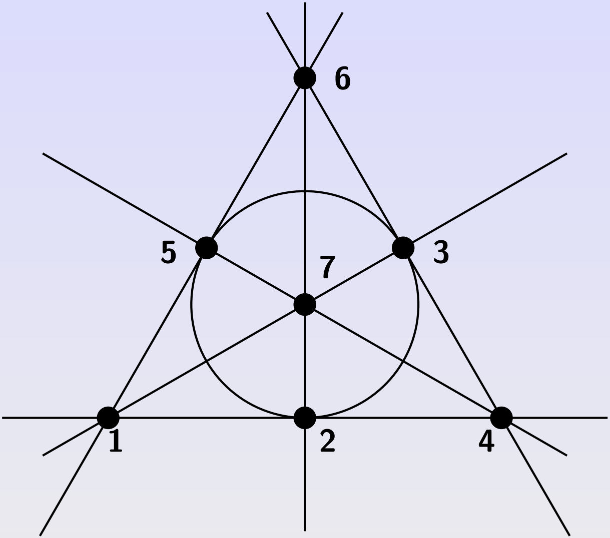
Une géométrie discrète



Une géométrie discrète

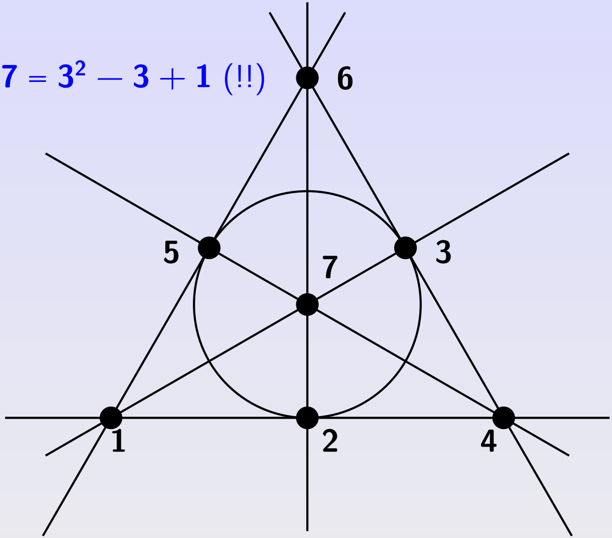


Une géométrie discrète



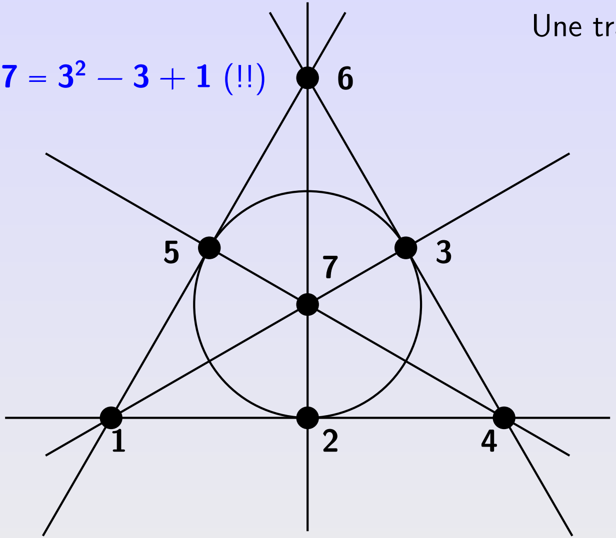
Une géométrie discrète

$\mathbf{7} = \mathbf{3}^2 - \mathbf{3} + \mathbf{1}$ (!!)



Une géométrie discrète

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)

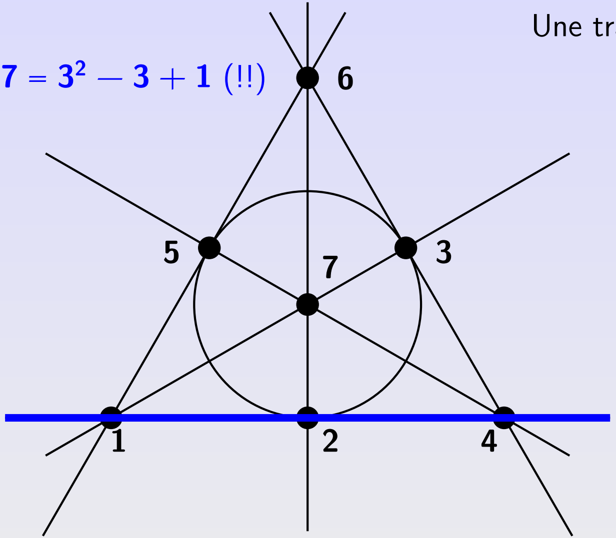


Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)

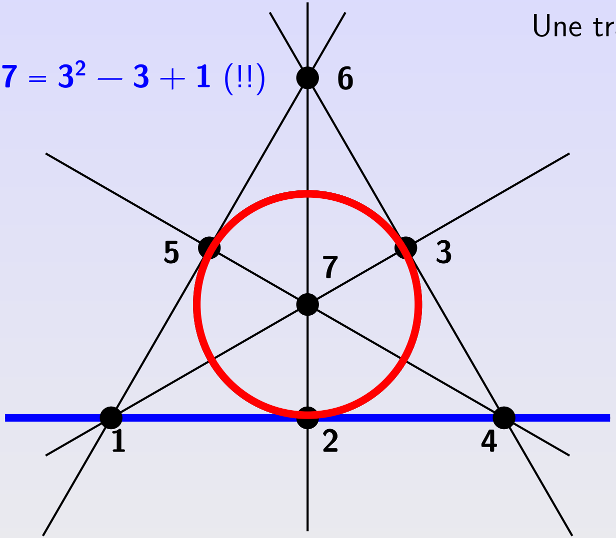


Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$$7 = 3^2 - 3 + 1 \ (!!)$$



Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto 3$

$3 \longmapsto 4$

$4 \longmapsto 5$

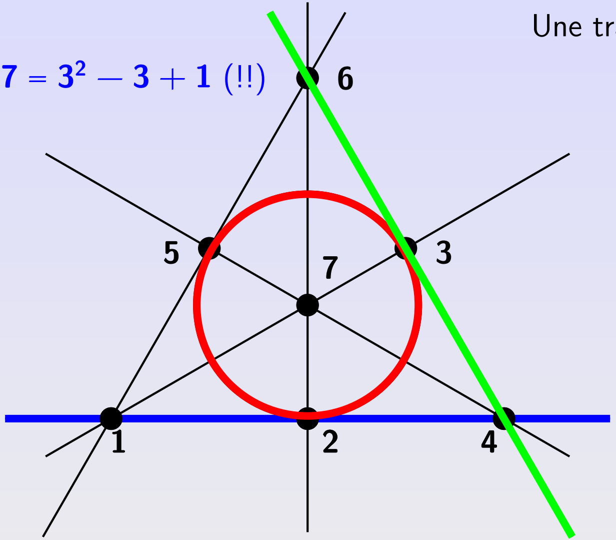
$5 \longmapsto 6$

$6 \longmapsto 7$

$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)

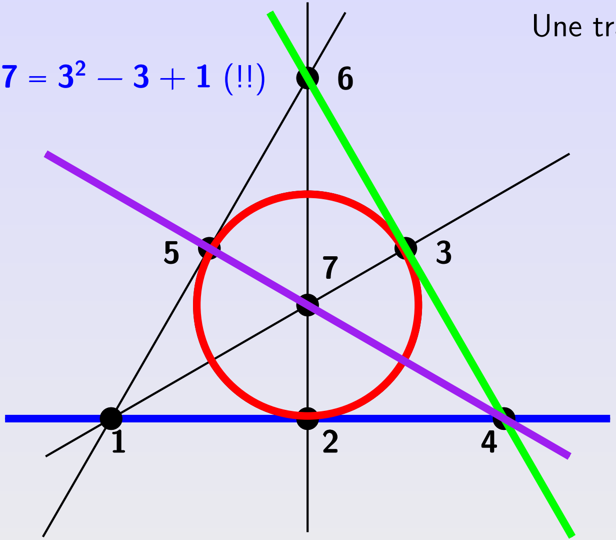


Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$7 = 3^2 - 3 + 1$ (!!)

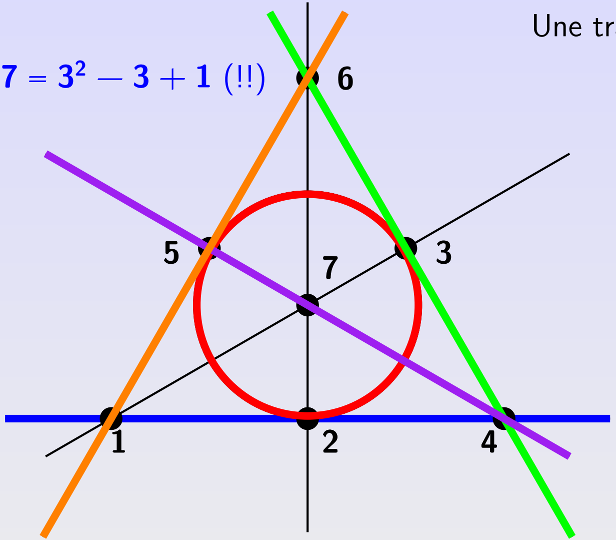


Une transformation amusante

$$\begin{aligned}1 &\longmapsto 2\\ 2 &\longmapsto 3\\ 3 &\longmapsto 4\\ 4 &\longmapsto 5\\ 5 &\longmapsto 6\\ 6 &\longmapsto 7\\ 7 &\longmapsto 1\end{aligned}$$

Une géométrie discrète

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)

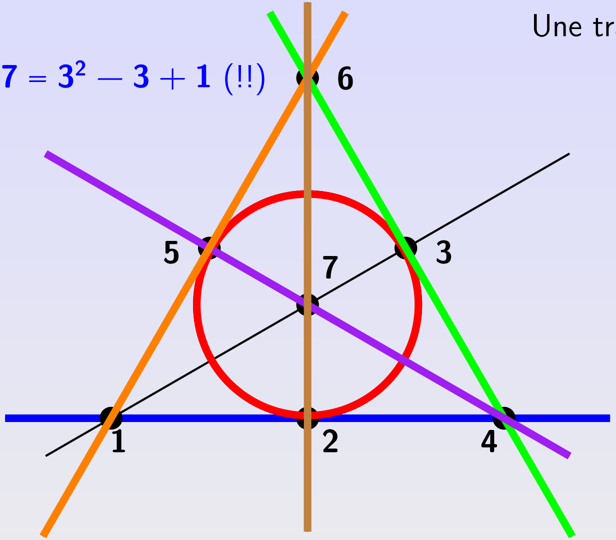


Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$7 = 3^2 - 3 + 1$ (!!)

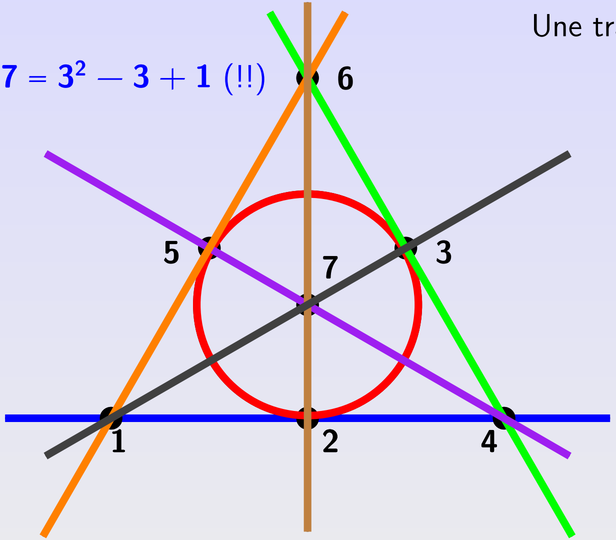


Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

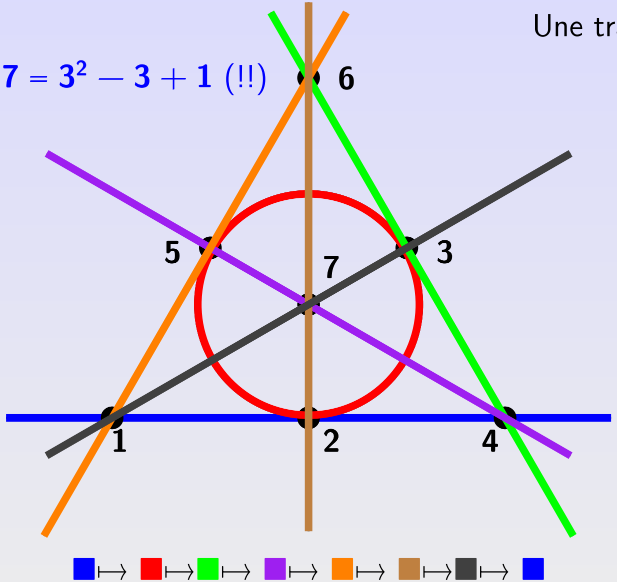
$\mathbf{7} = \mathbf{3}^2 - \mathbf{3} + \mathbf{1}$ (!!)



Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

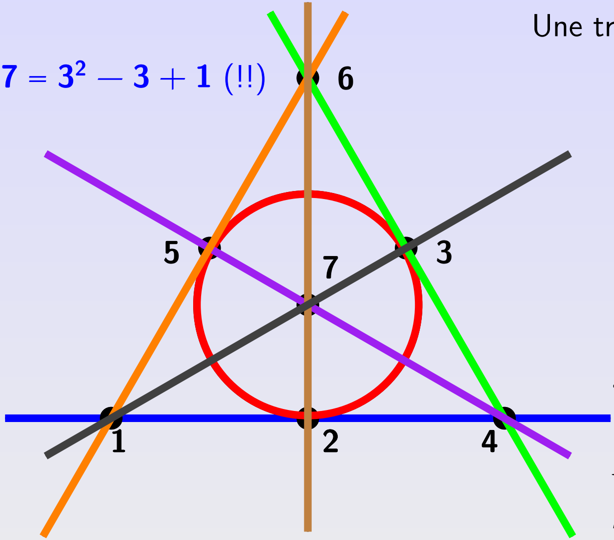


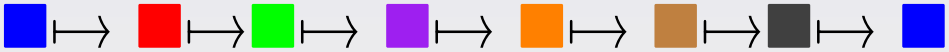
Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Une géométrie discrète

$7 = 3^2 - 3 + 1$ (!!)





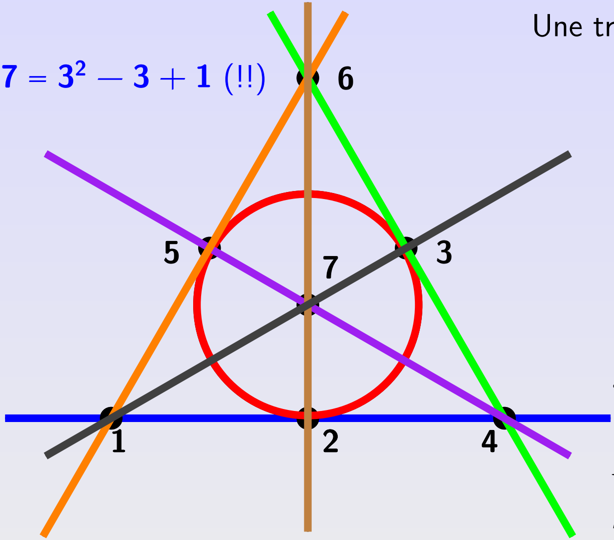
Une transformation amusante

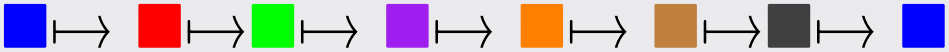
$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Théorème. *Il y a 168 permutations de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *qui préservent l'alignement.*

Une géométrie discrète

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)





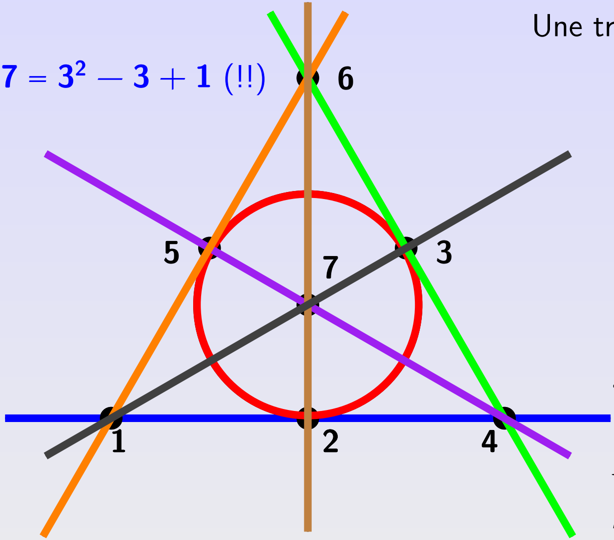
Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Théorème. *Il y a 168 permutations de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *qui préservent l'alignement.*

Une géométrie discrète

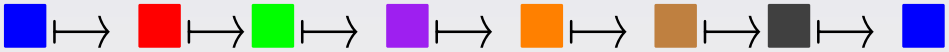
$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)



Une transformation amusante

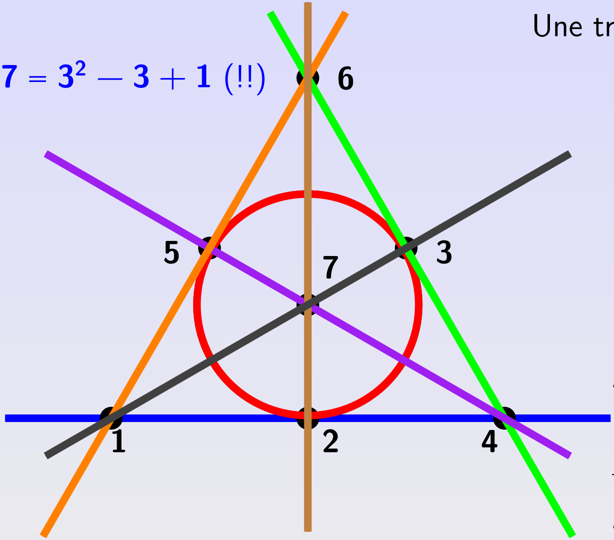
$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

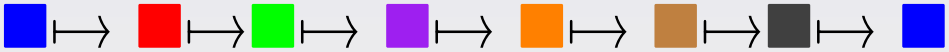
Théorème. *Il y a 168 permutations de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *qui préservent l'alignement.*



Une géométrie discrète (Plan de Fano)

$\mathbf{7 = 3^2 - 3 + 1}$ (!!)





Une transformation amusante

$1 \longmapsto 2$
$2 \longmapsto 3$
$3 \longmapsto 4$
$4 \longmapsto 5$
$5 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 7$
$7 \longmapsto 1$

Théorème. *Il y a 168 permutations de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *qui préservent l'alignement.*

Fabriquer un Dobble

Fabriquer un Dobble

But : On se donne un entier n et on veut fabriquer un “Dobble” tel que :

- Chaque droite contienne n points
- Chaque point appartient à n droites

Fabriquer un Dobble

But : On se donne un entier n et on veut fabriquer un “Dobble” tel que :

- Chaque droite contienne n points
- Chaque point appartient à n droites

Exemples

- $n = 3 \longrightarrow$ voir la figure précédente

Fabriquer un Dobble

But : On se donne un entier n et on veut fabriquer un “Dobble” tel que :

- Chaque droite contienne n points
- Chaque point appartient à n droites

Exemples

- $n = 3 \longrightarrow$ voir la figure précédente
- $n = 8 \longrightarrow$ Dobble standard

Fabriquer un Dobble

But : On se donne un entier n et on veut fabriquer un "Dobble" tel que :

- Chaque droite contienne n points
- Chaque point appartient à n droites

Exemples

- $n = 3 \longrightarrow$ voir la figure précédente
- $n = 8 \longrightarrow$ Dobble standard
- $n = 6 \longrightarrow$ Dobble junior 

Fabriquer un Dobble

But : On se donne un entier n et on veut fabriquer un "Dobble" tel que :

- Chaque droite contienne n points
- Chaque point appartient à n droites

Exemples

- $n = 3 \longrightarrow$ voir la figure précédente
- $n = 8 \longrightarrow$ Dobble standard
- $n = 6 \longrightarrow$ Dobble junior 

Contre-exemple (Brook & Ryser, 1949) : Il n'existe pas de Dobble avec $n = 7$.

Fabriquer un Dobble (suite)

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Théorème

Si $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier (par exemple $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), alors il existe un "Dobble" pour l'entier n.

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Théorème

Si $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier (par exemple $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), alors il existe un "Dobble" pour l'entier n.

Remarque. Si $q = n - 1$, alors il y a $q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$ permutations des figurines qui permutent aussi les cartes.

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Théorème

Si $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier (par exemple $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), alors il existe un "Dobble" pour l'entier n.

Remarque. Si $q = n - 1$, alors il y a $q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$ permutations des figurines qui permutent aussi les cartes.

Exemple. Si $n = 8$, alors $q = 7$ et il y a donc $5\,630\,688$ permutations des 57 figurines qui permutent les cartes (sur 57!

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Théorème

Si $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier (par exemple $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), alors il existe un "Dobble" pour l'entier n.

Remarque. Si $q = n - 1$, alors il y a $q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$ permutations des figurines qui permutent aussi les cartes.

Exemple. Si $n = 8$, alors $q = 7$ et il y a donc 5 630 688 permutations des 57 figurines qui permutent les cartes (sur $57! =$ 40526919504877216755680601905432322134980384796226602145184481280000000000000

Fabriquer un Dobble (suite)

Théorème

S'il existe un Dobble pour l'entier n, alors :

- *Il y a $n^2 - n + 1$ figurines (points)*
- *Il y a $n^2 - n + 1$ cartes (droites)*

Théorème

Si $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier (par exemple $n = 3$, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12...), alors il existe un "Dobble" pour l'entier n.

Remarque. Si $q = n - 1$, alors il y a $q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$ permutations des figurines qui permutent aussi les cartes.

Exemple. Si $n = 8$, alors $q = 7$ et il y a donc $5\,630\,688$ permutations des 57 figurines qui permutent les cartes (sur $57! = 40526919504877216755680601905432322134980384796226602145184481280000000000000 \approx 4 \times 10^{76}$)

Non existence ?

Non existence ?

Théorème

- *Si $n = 7$ ou 15, alors il n'existe pas de "Dobble" avec ces propriétés (Brook & Ryser, 1949)*

Non existence ?

Théorème

- *Si* $n = 7$ *ou* 15, *alors il n'existe pas de "Dobble" avec ces propriétés (Brook & Ryser, 1949)*
- *Si* $n = 11$, *alors il n'existe pas de "Dobble" avec ces propriétés (Lam, 1989)*

Non existence ?

Théorème

- *Si* $n = 7$ *ou* 15*, alors il n'existe pas de "Dobble" avec ces propriétés (Brook & Ryser, 1949)*
- *Si* $n = 11$*, alors il n'existe pas de "Dobble" avec ces propriétés (Lam, 1989)*

Remarque : pour $n = 13$, on ne sait toujours pas, même si on pense fortement que c'est impossible !

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$,

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le “plan” P, il y a des “droites” :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le “plan” P, il y a des “droites” :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites “verticales”)

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)
- On décrète que tous les points à l'infini sont alignés

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)
- On décrète que tous les points à l'infini sont alignés
- On a $p^2 + p + 1 = n^2 - n + 1$ points et $p^2 + p + 1$ droites...

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)
- On décrète que tous les points à l'infini sont alignés
- On a $p^2 + p + 1 = n^2 - n + 1$ points et $p^2 + p + 1$ droites...

$\longrightarrow$ Conclusion : le Dobble standard est le plan projectif sur $\mathbb{F}_7$

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le "plan" P, il y a des "droites" :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites "verticales")
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)
- On décrète que tous les points à l'infini sont alignés
- On a $p^2 + p + 1 = n^2 - n + 1$ points et $p^2 + p + 1$ droites...

$\longrightarrow$ Conclusion : le Dobble standard est le plan projectif sur $\mathbb{F}_7$

$\longrightarrow$ Conclusion : le Dobble junior est le plan projectif sur $\mathbb{F}_5$

Dobble pour $n = p + 1$, p premier

- $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, muni de l'addition et la multiplication *modulo p*
  Exemple : Dans $\mathbb{F}_5$, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$.
- $P = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ (p^2 points)
- Dans le “plan” P, il y a des “droites” :
  - d'équation $y = ax + b$, avec a, $b \in \mathbb{F}_p$
  - d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{F}_p$ (droites “verticales”)
  - toutes ces droites contiennent p points
  - cela fait $p^2 + p$ droites
- On rajoute les points d'intersection à l'infini (il y en a $p + 1$)
- On décrète que tous les points à l'infini sont alignés
- On a $p^2 + p + 1 = n^2 - n + 1$ points et $p^2 + p + 1$ droites...

$\longrightarrow$ Conclusion : le Dobble standard est le plan projectif sur $\mathbb{F}_7$

$\longrightarrow$ Conclusion : le Dobble junior est le plan projectif sur $\mathbb{F}_5$

$\longrightarrow$ Conclusion : le plan de Fano est le plan projectif sur $\mathbb{F}_2$