THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche : UMR 5149 - Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck - IMAG

Catégorification de données $\mathbb{Z}$-modulaires et groupes de réflexions complexes

Présentée par Abel Lacabanne

Le 29 novembre 2018

Sous la direction de Cédric Bonnafé

Devant le jury composé de

M. Cédric BONNAFÉ	Directeur de Recherche, Université de Montpellier	Directeur de thèse
M. Michel BROUÉ	Professeur émérite, Université Paris 7	Examinateur
M. Alain BRUGUIÈRES	Professeur, Université de Montpellier	Examinateur
M. Pavel ETINGOF	Professeur, Massachusetts Institute of Technology	Rapporteur
M. Gunter MALLE	Professeur, Technische Universität Kaiserslautern	Examinateur
M. Alexis VIRELIZIER	Professeur, Université de Lille	Rapporteur

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Table des matières

Introduction **1**

1 Familles de Calogero-Moser et caractères cellulaires **9**
1.1 Caractères cellulaires et algèbre de Gaudin 10
1.2 Le cas du groupe imprimitif $G(d,1,n)$ 15
1.3 Caractères constructibles de Leclerc-Miyachi 20
1.4 Quand $n=2$ 27

2 Données modulaires associées aux groupes de réflexions complexes **35**
2.1 Données $\mathbb{Z}$-modulaires 35
2.2 Données modulaires associées au groupe $G(d,1,n)$ 39
2.3 Données modulaires associées aux groupes exceptionnels spetsiaux 44

3 Catégorification de données $\mathbb{Z}$-modulaires **47**
3.1 Extension des résultats aux catégories non sphériques 47
3.2 Structure pivotale non sphérique sur $D(G)$-mod 60
3.3 Catégories légèrement dégénérées 67
3.4 Super-catégorie associée à une catégorie légèrement dégénérée 74
3.5 Un premier exemple de catégorie légèrement dégénérée 82

4 Double de Drinfeld de groupes quantiques et modules basculants **85**
4.1 Double de Drinfeld de Borel d'algèbres enveloppantes quantiques 86
4.2 Représentations à q générique 98
4.3 Spécialisation à une racine de l'unité et modules basculants 103
4.4 Le type A 117
4.5 Une famille particulière de caractères de $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$ et sa catégorification . 121

5 Graduation de catégories et matrices de Fourier des groupes tordus **129**
5.1 Catégories A-tressées et S-matrices tordues 130
5.2 Catégories non dégénérées contenant $\mathrm{Rep}(A)$ avec A cyclique 135
5.3 Données modulaires associées aux groupes diédraux 140
5.4 Double de Drinfeld d'un produit semi-direct $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 148
5.5 Double de Drinfeld d'une extension centrale par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 151

6 Catégorification de données modulaires associées aux groupes exceptionnels **157**
6.1 Des catégorifications par des doubles de Drinfeld tordus $D^{\omega}(G)$ 157
6.2 Des catégorifications par des catégories de modules basculants en type A . . . 164
6.3 Des catégorifications par des catégories de modules basculants en type B . . . 176

A Double de Drinfeld tordu d'un groupe fini **181**
A.1 La quasi-algèbre de Hopf $D^{\omega}(G)$ 181
A.2 Changement de structure pivotale 185

Index des notations **189**

Bibliographie **193**

Introduction

Contexte

La classification des groupes finis simples fait apparaître une famille de groupes finis de matrices, comme par exemple $PSL_n(q)$ ou $SO_n(q)$, avec certaines restrictions sur n et q. On sait construire des extensions centrales de ces groupes comme les points fixes $\mathbf{G}^F$ d'un groupe algébrique réductif défini sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ sous l'action d'un endomorphisme de Frobenius F. On va supposer pour l'instant que l'endomorphisme de Frobenius F munit $\mathbf{G}$ d'une $\mathbb{F}_q$-structure déployée.

Dans l'étude des représentations du groupe fini $\mathbf{G}^F$, Deligne et Lusztig [DL76] ont introduit certaines représentations particulières, les représentations unipotentes. La décomposition de Jordan des caractères irréductibles [Lu84, Theorem 4.23] permet, dans un certain sens, de se restreindre à l'étude des représentations unipotentes, que Lusztig a par la suite classifiées. Ces caractères se répartissent en familles, qui sont définies via l'algèbre de Hecke associée au groupe de Weyl W de $\mathbf{G}$.

Parallèlement, la théorie de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres de Hecke permet de définir une partition de W en cellules à gauche, à droite et bilatères [KL79]. Chaque cellule bilatère donne lieu à une famille de caractères de $\mathrm{Irr}(W)$, et également à une famille de caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$. Chaque cellule à gauche contenue dans une cellule bilatère Γ définit un caractère cellulaire de W qui ne fait apparaître que des caractères irréductibles de la famille associée à la cellule bilatère Γ.

Étant donnée une famille $\mathscr{F}$ de caractères unipotents, on s'intéresse au sous-espace des fonctions centrales sur $\mathbf{G}^F$ engendré par les caractères irréductibles des éléments de $\mathscr{F}$. On dispose de deux bases de cet espace : la première est naturellement donnée par les caractères irréductibles appartenant à $\mathscr{F}$, et la seconde est donnée de manière plus géométrique, via les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères, qui produisent les caractères fantômes. Lusztig a déterminé les matrices de passage d'une base à l'autre, et a interprété ces matrices en terme de transformée de Fourier non abélienne [Lu79].

Un fait remarquable de cette théorie est le paramétrage des caractères unipotents et des familles de caractères unipotents : il ne dépend pas de q, mais seulement du groupe de Weyl W. Il est possible de donner un ensemble $\mathrm{Uch}(W)$ qui donne un paramétrage des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$, et ce de manière indépendante de q. De plus, pour tout $\rho \in \mathrm{Uch}(W)$, il existe un polynôme $\deg_\rho(x)$, qui, évalué en $x = q$, donne le degré de la représentation unipotente correspondante de $\mathbf{G}^F$ [Lu84, Appendix].

Cette thèse s'inscrit dans une tentative d'étendre ces résultats au cas où W n'est plus un groupe de Weyl, mais un groupe de réflexions complexes. Il n'existe plus de groupe réductif $\mathbf{G}$ correspondant, mais des tentatives de généralisation des cellules bilatères de W [BR17b], de familles de caractères de $\mathrm{Irr}(W)$ [Go03] ou encore une notion de caractères unipotents et de famille de caractères unipotents [Ma95, BMM99, BMM14] sont étudiées, ainsi que la notion de matrice de Fourier. On fixe désormais $W \subseteq GL(V)$ un groupe de réflexions complexes.

Cellules bilatères, familles de caractères et caractères cellulaires

La théorie de Kazhdan-Lusztig n'existant plus pour les algèbres de Hecke associées aux groupes de réflexions complexes, il est impossible de définir les cellules ainsi que les familles de caractères à l'aide de ces algèbres. Dans [Go03], une notion de famille de caractères de $\mathrm{Irr}(W)$ est définie à l'aide des algèbres de Cherednik à $t = 0$. Ces algèbres $H_{t,c}(W)$ ont été introduites par Etingof et Ginzburg comme des déformations de $\mathbb{C}[V \oplus V^*] \rtimes W$, et dépendent de paramètres de déformation $t \in \mathbb{C}$ et $c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ constant sur les classes de conjugaison de W [EG02].

Lorsque $t = 0$, l'algèbre $H_{0,c}(W)$ est de dimension finie sur son centre et en quotientant cette algèbre par un idéal contenu dans son centre, on dispose de l'algèbre de Cherednik restreinte $\overline{H_{0,c}(W)}$ qui est de dimension finie. La structure triangulaire de l'algèbre $\overline{H_{0,c}(W)}$ permet de montrer que les modules simples sont paramétrés par $\mathrm{Irr}(W)$ et ainsi la décomposition en blocs de cette algèbre donne une partition de $\mathrm{Irr}(W)$ en familles, dites de Calogero-Moser. Des travaux de Gordon [Go03], Gordon-Martino [GM09], Martino [Ma14], Bellamy [Be12] et Thiel [Th14] montrent que dans le cas particulier où W est un groupe de Coxeter de type A, B, D, $I_2(m)$ ou H_3, les familles de Calogero-Moser coïncident avec les familles de $\mathrm{Irr}(W)$ définies à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig, sous réserve que le paramètre c soit réel.

En ce qui concerne les cellules, la généralisation est donnée par les cellules de Calogero-Moser [BR17b] et fait intervenir l'espace de Calogero-Moser $\mathscr{Z}_c = \mathrm{Spec}(Z(H_{0,c}(W)))$ ainsi qu'un revêtement galoisien de cette variété. Les cellules de Calogero-Moser sont difficilement calculables, mais de nombreux indices laissent à penser que si W est un groupe de Coxeter, elles sont égales aux cellules définies via les algèbres de Hecke [BR17b, Section 15.2].

Enfin, chaque cellule de Calogero-Moser à gauche permet de définir un c-caractère cellulaire. Une définition équivalente peut être donnée à l'aide d'une algèbre commutative associée à W, l'algèbre de Gaudin. Dans le chapitre 1, on étudie ces caractères cellulaires dans le cas où W est un groupe de réflexions complexes de type $G(d,1,n)$. En introduisant des éléments similaires aux éléments de Jucys-Murphy, on retrouve que les caractères cellulaires sont irréductibles lorsque le paramètre c est hors de certains hyperplans, dits essentiels. Enfin, dans le cas de $G(d,1,2)$, les caractères c-cellulaires sont explicitement calculés et sont reliés à l'expression de vecteurs de la base canonique de certains modules intégrables de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ dans la base standard de l'espace de Fock associé. Cette comparaison est motivée par un résultat de Leclerc et Miyachi [LM04] concernant le cas des groupes de Weyl de type B_n et D_n ; une définition de caractère $\mathbf{r}$-contructible est proposée [LM04, Section 6.3], pour $\mathbf{r}$ un d-uplet d'entiers décroissant. Suite à ces calculs en rang 2 et à des calculs effectués par ordinateur, on propose la conjecture suivante :

Conjecture A (Conjecture 1.4.9). *Soit* $c\colon \mathrm{Réf}(G(d,1,n)) \to \mathbb{C}$ *invariante par conjugaison. On note* $c_0 = c_{s_1}$ *et* $k_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d-1} \zeta^{j(1-i)} c_{s_0^j}$*, et on suppose que pour tout* $1 \le i \le d$*,* $k_i^\# = k_{1-i}$ *est un multiple entier de* c_0 *et que*

$$\frac{k_1^\#}{c_0} \le \frac{k_2^\#}{c_0} \le \cdots \le \frac{k_d^\#}{c_0}.$$

Soit $\mathbf{r} = -c_0^{-1}(k_1^\#, k_2^\#, \ldots, k_d^\#)$ *le* d*-uplet décroissant d'entiers ainsi obtenu.*

Alors l'ensemble des caractères c*-cellulaires coïncide avec l'ensemble des caractères* $\mathbf{r}$*-constructibles.*

Caractères unipotents, données $\mathbb{Z}$-modulaires et catégories modulaires

La théorie de Lusztig attache à chaque famille de caractères unipotents $\mathscr{F}$ de $\mathbf{G}^F$ une matrice carrée $S \in \mathscr{M}_{\mathscr{F}}(\mathbb{C})$, dite matrice de Fourier, et une matrice diagonale $\mathrm{Fr} \in \mathscr{M}_{\mathscr{F}}(\mathbb{C})$, que l'on obtient à partir des valeurs propres du Frobenius. La matrice S est symétrique, unitaire, chaque famille possède un élément spécial ρ_{sp} et la ligne de S correspondant à ρ_{sp} a chacune de ses entrées non nulles. Le quadruplet $(\mathscr{F}, S, \mathrm{Fr}^{-1}, \rho_{\mathrm{sp}})$ est une donnée $\mathbb{N}$-modulaire :

$$S^4 = \mathrm{id},\ (S\,\mathrm{Fr})^3 = \mathrm{id},\ [S^2, \mathrm{Fr}] = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad N_{i,j}^k = \sum_{l \in \mathscr{F}} \frac{S_{i,l} S_{j,l} \overline{S}_{k,l}}{S_{\rho_{\mathrm{sp}},l}} \in \mathbb{N}.$$

L'intégralité de ces entiers permet de définir une algèbre de fusion associée à la donnée modulaire : c'est une $\mathbb{Z}$-algèbre libre de rang $|\mathscr{F}|$ et dont la multiplication est donnée sur une base $(b_i)_{i \in \mathscr{F}}$ par les entiers $N_{i,j}^k$:

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k \in \mathscr{F}} N_{i,j}^k b_k.$$

On appelle alors les entiers $N_{i,j}^k$ les constantes de structures de la donnée $\mathbb{N}$-modulaire.

En ce qui concerne les groupes de réflexions complexes, Malle [Ma95] a généralisé la combinatoire des symboles utilisée par Lusztig en type B et D afin de définir des caractères unipotents pour les groupes de réflexions complexes $G(d,1,n)$ et $G(d,d,n)$, ainsi que des familles de caractères unipotents, des matrices de Fourier et les valeurs propres du Frobenius. Les résultats conjoints de [Ma95, Cu07] montrent que la transformée de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius définissent non plus des données $\mathbb{N}$-modulaires, mais des données $\mathbb{Z}$-modulaires, c'est-à-dire que les entiers $N_{i,j}^k$ ne sont plus nécessairement dans $\mathbb{N}$, mais dans $\mathbb{Z}$.

Dans sa thèse, Cuntz conjecture une propriété remarquable des algèbres de fusion associées aux données $\mathbb{Z}$-modulaires des familles de caractères unipotents des groupes de réflexions $G(d,1,n)$ et $G(d,d,n)$: si on remplace les constantes de structure $N_{i,j}^k$ par leurs valeurs absolues, l'algèbre ainsi obtenue reste associative. Plus précisément, Cuntz propose la conjecture suivante :

Conjecture B ([Cu05, Vermutung 5.1.6]). *Soit $\mathscr{F}$ une famille de caractères unipotents du groupe de réflexion complexe $G(d,1,n)$ ou $G(d,d,n)$, d'algèbre de fusion associée $A_{\mathscr{F}}$. Soit $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(\tilde{b}_i, \tilde{b}'_i)_{i\in\mathscr{F}}$. Soit $p\colon \tilde{A}_{\mathscr{F}} \to A_{\mathscr{F}}$ le morphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules défini par $p(\tilde{b}_i) = b_i$ et $p(\tilde{b}'_i) = -b_i$. Soit également $\varphi\colon A_{\mathscr{F}} \to \tilde{A}_{\mathscr{F}}$ défini par*

$$\sum_{i\in\mathscr{F}} \lambda_i b_i \mapsto \sum_{\substack{i\in\mathscr{F}\\ \lambda_i>0}} \lambda_i \tilde{b}_i - \sum_{\substack{i\in\mathscr{F}\\ \lambda_i<0}} \lambda_i \tilde{b}'_i.$$

La multiplication $r\cdot r' = \varphi(p(r)p(r'))$ ainsi définie sur $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ est associative et les constantes de structure de l'anneau $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ sont positives.

Autrement dit, l'anneau $A_{\mathscr{F}}$ est quotient d'un anneau $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ dont les constantes de structures sont positives.

Si $A^{\mathrm{abs}}_{\mathscr{F}}$ désigne la $\mathbb{Z}$-algèbre libre dont les constantes de structures sont les valeurs absolues de celles de $A_{\mathscr{F}}$, on se retrouve alors dans une situation donnée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \tilde{A}_{\mathscr{F}} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ A^{\mathrm{abs}}_{\mathscr{F}} \simeq \tilde{A}_{\mathscr{F}}/(\tilde{b}_{\rho_{\mathrm{sp}}} - \tilde{b}'_{\rho_{\mathrm{sp}}}) & & A_{\mathscr{F}} \simeq \tilde{A}_{\mathscr{F}}/(\tilde{b}_{\rho_{\mathrm{sp}}} + \tilde{b}'_{\rho_{\mathrm{sp}}}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

et l'associativité de l'algèbre $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ implique celle de l'algèbre $A^{\mathrm{abs}}_{\mathscr{F}}$.

La notion de donnée $\mathbb{N}$-modulaire apparaît également lors de l'étude des catégories modulaires [EGNO15, Section 8.14]. Une catégorie modulaire est une catégorie de fusion tressée munie d'une structure sphérique, avec pour seul objet transparent l'objet unité $\mathbf{1}$. Dans de telles catégories, on dispose d'une notion de trace d'un endomorphisme, et on définit une matrice S indexée par l'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ des classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathscr{C}$ comme étant la matrice des traces du double tressage. Cette matrice est ensuite renormalisée afin d'obtenir une matrice $\tilde{S}$ vérifiant $\tilde{S}^4 = \mathrm{id}$. Une catégorie modulaire dispose d'un ruban, qui agit par un scalaire sur un objet simple, et la matrice T est la matrice diagonale des valeurs du ruban sur les objets simples. Le quadruplet $(\mathrm{Irr}(\mathscr{C}), \tilde{S}, T, \mathbf{1})$ est alors une donnée $\mathbb{N}$-modulaire [EGNO15, Proposition 8.17.2], l'entier $N_{i,j}^k$ s'interprétant comme la multiplicité de l'objet simple k dans le produit tensoriel $i\otimes j$. Il nous a fallu étendre ce résultat au cas où la structure pivotale n'est plus sphérique, et notamment introduire une involution sur les classes d'isomorphie d'objets simples, qui n'est autre que la dualité si la catégorie est sphérique :

Théorème A. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Le twist associé à la structure pivotale est noté θ. On choisit un ensemble de représentants $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ des classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathscr{C}$. On définit pour $X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$*

$$S^{++}_{X,Y} = \mathrm{tr}^{+}_{X\otimes Y}(c_{Y,X}\circ c_{X,Y}) \quad \textit{et} \quad T_{X,Y} = \delta_{X,Y}\theta_X^{-1}.$$

Le quadruplet $(\mathrm{Irr}(\mathscr{C}), \tilde{S}^{++}, T, \mathbf{1})$ est une donnée $\mathbb{N}$-modulaire, où $\tilde{S}^{++}$ est un multiple de la matrice S^{++}.

Le carré de la matrice $\tilde{S}^{++}$ est donnée par une involution différente de la dualité si et seulement si la structure pivotale n'est pas sphérique.

Les données $\mathbb{N}$-modulaires définies par Lusztig via la transformée de Fourier non abélienne s'interprètent comme les données modulaires associées à la catégorie de modules sur l'algèbre de Hopf tressée $D(G)$, le double de Drinfeld d'un groupe fini G, excepté trois familles en types E_7 et E_8 qui s'interprètent comme les données modulaires de la quasi-algèbre de Hopf $D^{\omega}(\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ introduite par Dijkgraaf, Pasquier et Roche [DPR90]. Le cas de données $\mathbb{Z}$-modulaires étant étudiées dans cette thèse, la première question à se poser est la suivante :

Question 1. *Comment interpréter de manière catégorique une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire ?*

L'entier $N_{i,j}^{k}$ correspondant à la multiplicité d'un objet simple, il ne peut en aucun cas être négatif. Il faut tout d'abord se rendre compte qu'en conjuguant la matrice S d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$, on peut obtenir une donnée $\mathbb{N}$-modulaire et ainsi se ramener au cas bien connu des catégories modulaires. Néanmoins, ceci ne peut pas être fait dans l'exemple du groupe cyclique $G(d,1,1)$ si d est pair, et conjuguer par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$ ne couvre pas les cas qui nous intéressent particulièrement.

Une réponse plus satisfaisante à cette question a été donnée par Bonnafé et Rouquier [BR17a] en retrouvant la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire associée à la famille non triviale de caractères unipotents des groupes cycliques comme la S-matrice et la T-matrice associée à un quotient de la catégorie stable des modules sur le double de Drinfeld de l'algèbre de Taft. Cette solution utilise alors la notion de catégorie triangulée tensorielle, la suspension étant interprétée comme un isomorphisme entre un objet X et son "opposé", cette relation ayant un sens dans le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée ainsi construite. La conjecture B ne trouve pas de réponse dans ce cadre.

Nous introduisons dans le chapitre 3 de cette thèse une autre approche, celle de catégorie légèrement dégénérée, qui sont des catégories de fusion tressées de centre symétrique égal à la catégorie sVect des super-espaces vectoriels et on montre le résultat suivant :

Théorème B. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée et pivotale sur le corps $\mathbb{C}$ que l'on suppose légèrement dégénérée. On note θ le twist associé à la structure pivotale. On choisit J un ensemble de représentants des classes d'isomorphie sous l'action par tensorisation par le centre symétrique tel que $\mathbf{1} \in J$. On définit pour $X, Y \in J$*

$$\mathbf{S}_{X,Y} = \operatorname{tr}^{+}_{X\otimes Y}(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}) \quad \textit{et} \quad \mathbf{T}_{X,Y} = \delta_{X,Y}\theta_X^{-1}.$$

Sous l'hypothèse d'inversibilité d'un certain objet simple $\bar{\mathbf{1}}$, le quadruplet $(J, \tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{T}, \mathbf{1})$ est alors une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire, où $\tilde{\mathbf{S}}$ est un multiple de la matrice S.

Ce théorème peut également s'interpréter en terme de super-catégories, un isomorphisme de degré impair entre X et Y permet alors d'identifier l'objet Y avec l'opposé de l'objet X, égalité vérifiée dans le super-anneau de Grothendieck. La conjecture de Cuntz s'insère dans ce cadre : le super-anneau de Grothendieck de la super-catégorie associée $\hat{\mathscr{C}}$ est une $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2-1)$-algèbre et si on note ε l'objet transparent engendrant le centre symétrique de $\mathscr{C}$, la situation est résumée dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{sGr}(\hat{\mathscr{C}}) \arrow[dl, "\varepsilon=1"'] \arrow[dr, "\varepsilon=-1"] & \\ \mathrm{Gr}(\hat{\mathscr{C}}) \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\boldsymbol{\varepsilon}]) & & \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]+[\boldsymbol{\varepsilon}]). \end{tikzcd} \tag{2}$$

Ce diagramme est à comparer avec le diagramme (1).

De plus, l'exemple de Bonnafé et Rouquier peut se retrouver en terme de catégories légèrement dégénérées, ce qui donne une répose positive à la conjecture B dans le cas du groupe cyclique. On est naturellement amenés à se poser la question suivante :

Question 2. *Peut-on trouver une catégorification de la donnée modulaire attachée à n'importe quelle famille de caractères unipotents de* $G(d,1,n)$ *par une catégorie légèrement dégénérée ?*

Nous ne répondrons à cette question que pour certaines familles de caractères unipotents de $G(d,1,n)$. On peut donner une catégorification de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire associée à certaines familles de caractères unipotents de $G(d,1,k(k+1))$ via la catégorie de modules sur le double de Drinfeld du groupe fini $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$. Ce comportement est semblable à la théorie de Lusztig en type B où des doubles de Drinfeld de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ apparaissent [Lu84, Section 4.5]. Afin de faire correspondre l'objet unité de $D((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)$-mod avec l'objet spécial de la famille, il a été nécessaire de choisir une structire pivotale qui n'est pas sphérique si $d > 2$.

Dans le cas d'un autre type de familles, la construction d'une telle catégorie de fusion est bien plus complexe. Elle fait intervenir des groupes quantiques, et plus précisément une extension centrale $\mathcal{D}_\xi(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante quantique $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{g})$ associée à une algèbre de Lie simple, où ξ est une racine de l'unité. Nous détaillons la construction de l'algèbre et de la catégorie de fusion associée dans le chapitre 4. Une étude toute particulière de $\mathcal{D}_\xi(\mathfrak{sl}_{n+1})$ pour ξ une racine $2d$-ième de l'unité constitue un des résultats principaux de cette thèse :

Théorème C. *Soit* ξ *une racine primitive* $2d$*-ième de l'unité et* $n \geq d$.

Si $n+1$ *est impair la catégorie* $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ *associée à* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ *a pour centre symétrique* $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})$. *Il existe une famille* $\mathcal{F}$ *de* $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$ *telle qu'une catégorification de la donnée* $\mathbb{Z}$*-modulaire de la famille* $\mathcal{F}$ *est donnée par la modularisation de la catégorie* $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$.

Si $n+1$ *est pair la catégorie* $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ *associée à* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ *a pour centre symétrique* $\mathrm{Rep}\left(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}, \frac{n+1}{2}\right)$. *Il existe une famille* $\mathcal{F}$ *de* $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$ *telle qu'une catégorification de la donnée* $\mathbb{Z}$*-modulaire de la famille* $\mathcal{F}$ *est donnée par la super-catégorie associée à la modularisation partielle de* $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ *par les objets de dimension positive du centre symétrique.*

Enfin, cette construction générale apparaît également dans la catégorification de données modulaires associées à certains groupes de réflexions complexes exceptionnels que l'on étudie dans le chapitre 6 de cette thèse.

Groupes tordus et graduation de catégories

Jusqu'à présent, on a supposé que l'endomorphisme de Frobenius F munit $\mathbf{G}$ d'une $\mathbb{F}_q$-structure déployée. Désormais, on va enlever cette hypothèse supplémentaire, ce qui permet d'obtenir par exemple les groupes unitaires de type ${}^2A_n$, les groupes de type ${}^2D_n$ ou encore les groupes exceptionnels de type ${}^3D_4$ et ${}^2E_6$. Toutes les notions considérées jusqu'ici existent pour ces groupes et Lusztig construit les matrices de Fourier des familles de caractères unipotents comme des sous-matrices associées à la S-matrice de la catégorie de modules d'un double de Drinfeld d'un groupe fini [Lu84, Section 4.16]. Si on suppose que F n'est plus nécessairement un Frobenius, mais qu'une puissance de F est un Frobenius, on obtient, par exemple, les groupes de Suzuki et de Ree de type ${}^2B_2$ et ${}^2F_4$ en caractéristique 2 et de type ${}^2G_2$ en caractéristique 3. Il existe également une notion de matrice de Fourier, mais elle n'est plus ici symétrique, mais reste tout de même unitaire. Geck et Malle proposent dans [GM03] des relations satisfaites par cette matrice de Fourier ainsi que deux matrices diagonales. Une définition, dans le cas tordu, des caractères unipotents des groupes de réflexions complexes imprimitifs $G(d,d,n)$, ainsi que des familles et des matrices de Fourier, a été proposé par Malle [Ma95], et on s'intéressera tout particulièrement aux groupes diédraux $G(d,d,2)$. À chaque famille de caractères unipotents du groupe tordu est associée une famille de caractères unipotents du groupe non tordu, et de nombreux liens entre ces deux familles existent.

On propose alors dans le chapitre 5 un cadre catégorique qui permet d'interpréter ces matrices de Fourier non symétriques par le biais d'une catégorie $\mathscr{C}$ de fusion A-tressée avec A un groupe fini. Une S-matrice tordue est alors définie par tout élément de $a \in A$ et cette dernière peut se calculer dans la catégorie $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{\langle a\rangle}$, qui est alors de fusion et contient $\operatorname{Rep}(\langle a\rangle)$. Dans le cas où a est d'ordre 2, on obtient le résultat suivant

Théorème D. *Soit $\mathscr{D}$ une catégorie de fusion tressée, pivotale et non dégénérée contenant* $\operatorname{Rep}(A)$ *comme sous-catégorie tressée et pivotale, avec $A = \langle a\rangle$ d'ordre* 2. *La catégorie $\mathscr{D}$ est graduée par le groupe A et on dispose de S-matrices tordues $S_{1,a}$ et $S_{a,1}$ qui sont extraites de la S-matrice de $\mathscr{D}$.*

On définit les matrices renormalisées $\tilde{S}_{1,a}$ et $\tilde{S}_{a,1}$ par

$$\tilde{S}_{1,a} = \frac{S_{1,a}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{a,1} = \frac{S_{a,1}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}}.$$

Alors

$$(\tilde{S}_{a,1}\tilde{S}_{1,a})^2 = \mathrm{id}, (\tilde{S}_{1,a}\tilde{S}_{a,1})^2 = 1, (\tilde{S}_{a,1}T_1\tilde{S}_{1,a}T_a^2)^2 = \frac{\tau^-(\mathscr{C}_1)}{\tau^+(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\,\mathrm{id}$$
$$\text{et} \quad (\tilde{S}_{a,1}T_1^{-1}\tilde{S}_{1,a}T_a^{-2})^2 = \frac{\tau^+(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}{\tau^-(\mathscr{C}_1)}\,\mathrm{id}.$$

De nombreux exemples liés aux matrices de Fourier des familles de caractères unipotentes des groupes tordus sont donnés dans le chapitre 5. Dans chaque cas la modularisation de la composante de degré 1 de $\mathscr{D}$, qui se trouve être la composante de degré 1 de la catégorie initiale $\mathscr{C}$, est une catégorification de la donnée modulaire de la famille associée au groupe non tordu. Le premier exemple concerne les groupes diédraux, le second exemple redonne la construction de Lusztig des matrices de Fourier associées aux familles de caractères unipotents de type ${}^2A_n$, ${}^2D_n$ et ${}^2E_6$, et enfin le dernier exemple traite du cas de la grosse famille de caractères unipotents de ${}^2F_4$.

Chapitre 1

Familles de Calogero-Moser et caractères cellulaires

Les caractères cellulaires que l'on introduit ici ont pour but d'étendre aux groupes de réflexions complexes la notion de caractères cellulaires d'un groupe de Coxeter, que l'on obtient avec la théorie de Kazhdan-Lusztig [Lu03, Chapter 22]. La définition choisie ici, due à Bonnafé et Rouquier [BR17b, Section 13.4.C] ne demande que peu de prérequis théoriques, contrairement à leur définition initiale [BR17b, Definition 11.1.4]. Ces caractères s'obtiennent en lisant les lignes de la matrice de décomposition associée à une algèbre commutative, l'algèbre de Gaudin. Ces derniers sont difficiles à calculer, le cas des groupes cycliques ou du groupe de Weyl de type B_2 ayant été traité dans [BR17b], le cas des groupes diédraux dans [Bo17]. On étudie ici en particulier la famille de groupes de réflexions complexes $G(d,1,n)$, et on calcule explicitement les caractères cellulaires pour $G(d,1,2)$.

Dans [LM04], les caractères constructibles des groupes de Coxeter de type B et D sont retrouvés dans une construction impliquant le groupe quantique $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$. Les caractères constructibles d'un groupe de Coxeter sont obtenus par un procédé d'induction tronquée [Lu84, 4.1.7] et devraient correspondre aux caractères cellulaires. Leclerc et Miyachi proposent alors une définition des caractères constructibles pour le groupe de réflexions complexes $G(d,1,n)$ et on étudiera en particulier le cas $n=2$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, on définit la notion de caractère cellulaire pour une algèbre commutative sur un anneau P, et on étudie leur comportement par spécialisation en un idéal premier de P, en suivant [BT, Appendix II]. L'algèbre de Gaudin $\mathrm{Gau}_c(W)$ associée à un groupe de réflexions complexes W est ensuite introduite, ce qui permet de définir les caractères c-cellulaires, c étant ici un jeu de paramètres. Dans une seconde partie, on étudie le cas plus spécifique du groupe $G(d,1,n)$, et on introduit une sous-algèbre commutative $\mathbf{JM}_c$, qui est engendrée par des éléments de type Jucys-Murphy. On peut alors définir des caractères cellulaires pour cette sous-algèbre, et on montre qu'ils sont somme des caractères c-cellulaires. Tout ceci dépendant de choix de paramètres, on donne des conditions sur c pour que les caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c$ soient irréductibles. Ensuite, on rappelle la construction de [LM04] afin d'arriver à une notion de caractères constructibles pour $G(d,1,n)$. Dans une dernière partie, on traite en détail le cas de $G(d,1,2)$ et on compare les caractères c-cellulaires avec les caractères constructibles.

1.1 Caractères cellulaires et algèbre de Gaudin

1.1.1 Caractères cellulaires

On reprend des généralités de [BT, Appendix II] sur les caractères cellulaires. On fixe $\Bbbk$ un corps de caractéristique nulle, E un espace vectoriel de dimension finie, A une sous-algèbre déployée de $\mathrm{End}_{\Bbbk}(E)$ et P une $\Bbbk$-algèbre intègre et intégralement close de corps des fractions K.

Pour R une $\Bbbk$-algèbre commutative, l'extension des scalaires de E à R (resp. A à R) est notée RE (resp. RA). Soient $D_1,\dots,D_n$ des éléments de $\mathrm{End}_P(PE)$ commutant entre eux et qui commutent à l'action de PA. Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de P, on note $D_i(\mathfrak{p})$ l'image de D_i dans $\mathrm{End}_{P/\mathfrak{p}}(P/\mathfrak{p}E)$. Enfin, on note $D=(D_1,\dots,D_n)$ et $P[D]$ la sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}_P(PE)$ engendrée par les images des D_i.

Les caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$ apparaissent dans la décomposition de l'image de KE dans le groupe de Grothendieck de $K[D]\otimes_K KA$. Pour cela, il faut tout d'abord comprendre les modules simples de cette algèbre. L'hypothèse de déploiement permet d'obtenir (cf. [CR81, Propositions 3.56 et 7.7]) une bijection

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{Irr}(K[D])\times\mathrm{Irr}(KA) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}(K[D]\otimes_K KA)\\ (L,M) & \longmapsto & L\otimes M\end{array}\right.,$$

ce qui induit un ismorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\mathscr{K}_0(K[D])\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{K}_0(KA)\to\mathscr{K}_0(K[D]\otimes_K KA).$$

Comme le K-espace vectoriel KE dispose d'une action à la fois de $K[D]$ et de KA qui commutent entre elles, c'est un module pour l'algèbre $K[D]\otimes_K KA$. On écrit alors sa classe $[KE]$ en utilisant l'isomorphisme ci-dessus :

$$[KE]=\sum_{L\in\mathrm{Irr}(K[D])}[L]\otimes\gamma_L^{P[D]},$$

où $\gamma_L^{P[D]}\in\mathscr{K}_0(KA)$. Puisque l'algèbre A est déployée, on préférera voir l'élément $\gamma_L^{P[D]}$ dans $\mathscr{K}_0(A)$.

Définition 1.1.1. L'ensemble des caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$ est l'ensemble des $\gamma_L^{P[D]}\in\mathscr{K}_0(A)$ pour L parcourant les $K[D]$-modules simples.

En étendant les scalaires à $P[\mathbf{X}]=P[X_1,\dots,X_n]$ et en posant $\mathscr{D}=X_1D_1+\cdots X_nD_n$, il est montré dans [BT] que les caractères cellulaires pour l'algèbre $P[\mathbf{X}][\mathscr{D}]$ coïncident avec les caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$. On supposera alors par la suite $n=1$ et on notera simplement $D_1=D$.

L'avantage de travailler avec l'anneau P plutôt que directement avec son corps des fractions K est que ceci permet de spécialiser en un idéal premier de P. Avant de faire cela, décrivons, toujours suivant [BT], les caractères cellulaires pour $P[D]$. On note Π le polynôme caractéristique de D qui est un polynôme unitaire de $P[\mathbf{t}]$, que l'on décompose en produit de polynômes irréductibles

$$\Pi=\Pi_1^{n_1}\dots\Pi_r^{n_r},$$

avec Π_i irréductible et unitaire dans $K[\mathbf{t}]$. On note également Π^{sem} le produit des Π_i sans multiplicités. Les polynômes en jeu étant tous unitaires et P étant intégralement clos, une application directe de [Bo64, V.1.3, Proposition 11] montre que les polynômes Π_i et Π^{sem} sont dans $P[\mathbf{t}]$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on pose $\mathscr{L}_i = P[\mathbf{t}]/\langle \Pi_i \rangle$ que l'on voit comme un $P[D]$-module, D agissant comme la multiplication par $\mathbf{t}$. Les modules simples de l'algèbre $K[D]$ sont alors donnés par les extensions à K des modules $\mathscr{L}_i$:

$$\mathrm{Irr}(K[D]) = \{K\mathscr{L}_1, \ldots, K\mathscr{L}_r\} \quad \text{et} \quad K\mathscr{L}_i \not\simeq K\mathscr{L}_j \text{ pour } i \neq j.$$

Avec ces notations, on a :

Proposition 1.1.2. *Dans $\mathscr{K}_0(K[D] \otimes_K KA)$,*

$$[KE] = \sum_{i=1}^{r} [K\mathscr{L}_i] \otimes \left(\frac{1}{\deg(\Pi_i)} [\ker(\Pi_i(D)^{n_i})]_{KA} \right),$$

et l'ensemble des caractères cellulaires de l'algèbre $P[D]$ est

$$\left\{ \frac{1}{\deg(\Pi_i)} [\ker(\Pi_i(D)^{n_i})]_{KA} \;\middle|\; 1 \leq i \leq r \right\}.$$

Venons-en à la spécialisation en un idéal premier. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de P. On note Δ le discriminant du polynôme Π^{sem}. C'est alors un élément de P qui est non nul car la factorisation de Π^{sem} est sans multiplicité. Sa réduction modulo $\mathfrak{p}$ sera notée $\Delta(\mathfrak{p})$.

Proposition 1.1.3. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de P tel que $P/\mathfrak{p}$ est intégralement clos.*

1. *Les caractères cellulaires pour l'algèbre $(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$ sont sommes de caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$.*
2. *Si de plus $\Delta(\mathfrak{p}) \neq 0$, l'ensemble des caractères cellulaires pour l'algèbre $(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$ coïncide avec l'ensemble des caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$.*

Démonstration. On écrit la réduction $\Pi_i(\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}$:

$$\Pi_i(\mathfrak{p}) = \prod_{j=1}^{d_i} \pi_{i,j}^{e_{i,j}},$$

où $\pi_{i,j} \in k_P(\mathfrak{p})[\mathbf{t}]$ est irréductible unitaire, $e_{i,j}$ est un entier strictement positif et $\pi_{i,j} \neq \pi_{i,j'}$ pour $1 \leq j < j' \leq d_i$. Comme $P/\mathfrak{p}$ est intégralement clos, on déduit que $\pi_{i,j} \in (P/\mathfrak{p})[\mathbf{t}]$.

Pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq d_i$, on note

$$\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}} = (P/\mathfrak{p})[\mathbf{t}]/\langle \pi_{i,j} \rangle,$$

et on calcule alors la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{L}_i$:

$$k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_i \simeq k_P(\mathfrak{p})[\mathbf{t}]/\langle \Pi_i(\mathfrak{p}) \rangle \simeq \bigoplus_{j=1}^{d_i} k_P(\mathfrak{p})[\mathbf{t}]/\langle \pi_{i,j}^{e_{i,j}} \rangle.$$

On déduit l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck de $k_P(\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$:

$$[k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_i] = \sum_{j=1}^{d_i} e_{i,j} [k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}}].$$

Comme $\Bbbk$ est de caractéristique nulle, une égalité entre éléments du groupe de Grothendieck est équivalente à une égalité entre les caractères virtuels correspondants. De l'égalité

$$[KE] = \sum_{i=1}^{r} [K\mathscr{L}_i] \otimes \gamma_{K\mathscr{L}_i}^{P[D]},$$

on obtient, en passant par les caractères et en réduisant modulo $\mathfrak{p}$

$$[k_P(\mathfrak{p})E] = \sum_{i=1}^{r} [k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_i] \otimes \gamma_{K\mathscr{L}_i}^{P[D]} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} e_{i,j} [k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}}] \otimes \gamma_{K\mathscr{L}_i}^{P[D]}.$$

On choisit un ensemble de couples d'indices I tel que pour tout $1 \leq l \leq r$ et pour tout $1 \leq m \leq d_l$ il existe un unique $(i,j) \in I$ tel que $\pi_{l,m} = \pi_{i,j}$. Le choix de cet ensemble I revient à se donner un système de représentants des classes d'isomorphismes de $k_p(\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$-modules simples :

$$\operatorname{Irr}(k_p(\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]) = \left\{ k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}} \;\middle|\; (i,j) \in I \right\}.$$

Ainsi pour $(i,j) \in I$,

$$\gamma_{k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}}}^{(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]} = \sum_{\substack{l,m \\ \pi_{l,m} = \pi_{i,j}}} e_{l,m} \gamma_{K\mathscr{L}_l}^{P[D]}.$$

L'ensemble des caractères cellulaires pour l'algèbre $(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$ étant

$$\left\{ \gamma_{k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}}}^{(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]} \;\middle|\; (i,j) \in I \right\},$$

on déduit que les caractères cellulaires pour l'algèbre $(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]$ sont somme de caractères cellulaires pour l'algèbre $P[D]$, ce qui achève la preuve de la première partie.

Si de plus $\Delta(\mathfrak{p}) \neq 0$ alors pour tout $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq d_i$ on a $e_{i,j} = 1$ et $\pi_{i,j} = \pi_{i',j'}$ si et seulement si $(i,j) = (i',j')$. Ainsi $\gamma_{k_P(\mathfrak{p})\mathscr{L}_{i,j}^{\mathfrak{p}}}^{(P/\mathfrak{p})[D(\mathfrak{p})]} = \gamma_{K\mathscr{L}_i}^{P[D]}$ ce qui achève la preuve de la seconde assertion. □

1.1.2 Groupes de réflexions complexes et algèbre de Gaudin

On fixe désormais V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\det : GL(V) \to \mathbb{C}$ le déterminant et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{C}$ la dualité entre V et son dual V^*. Pour tout entier d, on notera μ_d le groupe des racines d-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et on choisit un générateur ζ_d dans μ_d pour tout d, de telle sorte que si $l \mid d$, $\zeta_d^{d/l} = \zeta_l$.

On dit qu'un élément $s \in GL(V)$ est une *réflexion* si le sous-espace $\ker(s - \mathrm{id}_V)$ est un hyperplan. L'ensemble des réflexions d'un sous-groupe W de $GL(V)$ est noté $\text{Réf}(W)$ et on dit que W est un *groupe de réflexions complexes* si W est engendré par $\text{Réf}(W)$. On note $\operatorname{Irr}(W)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de W.

Dans la suite, on fixe $W \subset GL(V)$ un groupe de réflexions complexes fini. Pour tout $s \in \text{Réf}(W)$, on choisit $\alpha_s \in V^*$ et $\alpha_s^\vee \in V$ tels que

$$\ker(s - \mathrm{id}_V) = \ker(\alpha_s) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(s - \mathrm{id}_V) = \mathbb{C}\alpha_s^\vee.$$

Puisque W est fini et que $\mathbb{C}$ est de caractéristique nulle, $\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s \rangle \neq 0$. L'action d'une réflexion $s \in \mathrm{Réf}(W)$ est alors donnée par

$$s(y) = y - (1 - \det(s)) \frac{\langle y, \alpha_s \rangle}{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s \rangle} \alpha_s^\vee,$$

pour $y \in V$ et par

$$s(x) = x - (1 - \det(s)^{-1}) \frac{\langle \alpha_s^\vee, x \rangle}{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s \rangle} \alpha_s,$$

pour $x \in V^*$.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des hyperplans de W

$$\mathscr{A} = \{\ker(s - \mathrm{id}_V) \mid s \in \mathrm{Réf}(W)\} = \{\ker(\alpha_s) \mid s \in \mathrm{Réf}(W)\},$$

ainsi que $V^{\mathrm{rég}}$ le sous-ensemble $V \setminus \bigcup_{H \in \mathscr{A}} H$. D'après un théorème de Steinberg [Br10, Theorem 4.7], $V^{\mathrm{rég}}$ est le sous-ensemble de V constitué des vecteurs de stabilisateur trivial pour l'action de W.

Pour $H \in \mathscr{A}$, on note W_H le sous-groupe fixant point par point H. C'est un sous-groupe cyclique d'ordre e_H, dont on choisit un générateur s_H de déterminant ζ_{e_H}. Enfin si $\Omega \in \mathscr{A}/W$, on note e_Ω la valeur commune des e_H pour $H \in \Omega$.

L'ensemble des réflexions de W est alors l'ensemble

$$\{s_H^i \mid H \in \mathscr{A}, 1 \leq j \leq e_H - 1\},$$

et deux réflexions s_H^i et $s_{H'}^{i'}$ sont conjuguées si et seulement si les hyperplans H et H' sont dans la même orbite pour l'action de W et $i = i'$.

Désormais, on fixe également une fonction $c\colon \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ invariante sur les classes de conjugaison de $\mathrm{Réf}(W)$, dont on note c_s la valeur en s. Pour toute telle fonction c, pour tout $H \in \mathscr{A}$ et $0 \leq i \leq e_H - 1$, on définit

$$k_{H,i} = \frac{1}{e_H} \sum_{k=1}^{e_H - 1} \zeta_{e_H}^{k(1-i)} c_{s_H^k},$$

qui vérifient $\sum_{i=0}^{e_H} k_{H,i} = 0$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose $k_{H,i} = k_{H,j}$ où j est le reste de la division euclidienne de i par e_H. La valeur commune des $k_{H,i}$ pour H dans une orbite Ω est notée $k_{\Omega,i}$. On retrouve alors la valeurs de $c_{s_H^i}$ par

$$c_{s_H^i} = \sum_{j=0}^{e_H - 1} \zeta_{e_H}^{i(j-1)} k_{H,j}.$$

Définition 1.1.4. L'*algèbre de Gaudin* $\mathrm{Gau}_c(W)$ est la sous-$\mathbb{C}$-algèbre de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[V^{\mathrm{rég}}]W$ de W sur $\mathbb{C}[V^{\mathrm{rég}}]$ engendrée par les éléments

$$\mathscr{D}_y = \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} c_s \det(s) \frac{\langle y, \alpha_s \rangle}{\alpha_s} s.$$

D'après [BR17b, 13.4.B] cette algèbre est commutative, et on l'utilise pour donner une définition des caractères cellulaires du groupe de réflexions complexes W, en se plaçant dans le cadre de la sous-partie 1.1.1 : on choisit $E = \mathbb{C}W$, $A = \mathbb{C}W$ vu dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ via la multiplication à gauche, $P = \mathbb{C}[V]$ et enfin $D_i = \mathscr{D}_{y_i}$, où $(y_i)_{i\in I}$ est une base de V, que l'on voit agir sur PE via la multiplication à droite.

Définition 1.1.5. Soit $W \subset GL(V)$ un groupe de réflexions complexes et $c\colon \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ invariante par conjugaison. Pour tout module simple L de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(W)$, le *caractère c-cellulaire* associé à L est

$$\gamma_L^{\mathrm{Gau}_c(W)} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} \left[\mathrm{Res}^{\mathbb{C}(V)}_{\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(W)}(\mathbb{C}(V)\otimes_{\mathbb{C}} V_\chi)\colon L\right]\chi.$$

L'ensemble des caractères c-cellulaires de W est l'ensemble des $\gamma_L^{\mathrm{Gau}_c(W)}$ pour L parcourant les représentations irréductibles de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(W)$.

Quand W est un groupe de Coxeter et que c est à valeurs réelles, il existe également des caractères c-cellulaires de Kazhdan-Lusztig définis via les algèbres de Hecke [Lu03, 21.1]. Le fait qu'on parle ici simplement de caractères c-cellulaires et non de caractères c-cellulaires de Calogero-Moser provient de la conjecture suivante, et du fait que l'on n'étudie pas les caractères c-cellulaires de Kazhdan-Lusztig.

Conjecture 1.1.6 ([BR17b, Conjecture L])**.** *Soit W un groupe de Coxeter et $c\colon \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{R}^+$ invariante par conjugaison. L'ensemble des caractères c-cellulaires de Kazhdan-Lusztig coïncident avec l'ensemble des caractères c-cellulaires.*

Il peut bien entendu exister plusieurs représentations L de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(W)$ donnant le même caractère c-cellulaire. Par ailleurs, W agit sur $\mathrm{Gau}_c(W)$, par restriction de l'action de W sur $\mathbb{C}[V^{\text{rég}}]W$, où W agit naturellement sur $\mathbb{C}[V]$ et par conjugaison sur W. On a alors ${}^{w}\mathscr{D}_y = \mathscr{D}_{w(y)}$ pour $w \in W$ et $y \in V$. On vérifie alors que pour L un $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(W)$-module simple, on a

$$\gamma_{{}^wL}^{\mathrm{Gau}_c(W)} = \gamma_L^{\mathrm{Gau}_c(W)}.$$

Pour tout $y \in V$ et $z \in V^{\text{rég}}$, l'élément $\mathscr{D}_y$ admet une spécialisation en z

$$\sum_{s\in\mathrm{Réf}(W)} c_s \det(s)\frac{\langle y,\alpha_s\rangle}{\langle z,\alpha_s\rangle}s \in \mathbb{C}W.$$

Si on choisit $y = z$, on obtient un élément dit *élément d'Euler*

$$\mathbf{eu} = \sum_{s\in\mathrm{Réf}(W)} c_s \det(s)s,$$

qui est central dans $\mathbb{C}W$ puisque $s \mapsto c_s \det(s)$ est constant sur les classes de conjugaison de W.

Lemme 1.1.7. *Soient W un groupe de réflexions complexes, $c\colon \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ constant sur les classes de conjugaison et $V_\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ de caractère χ. Pour $\Omega \in \mathscr{A}/W$ et $H \in \Omega$, on pose $m^\chi_{\Omega,j} = \langle \chi_{|W(H)}, \det^{-j}_{|W(H)}\rangle_{W(H)}$. L'élément* **eu** *agit sur V_χ par multiplication par le scalaire*

$$\sum_{\Omega\in\mathscr{A}/W}\sum_{j=0}^{e_\Omega-1}\frac{|\Omega|e_\Omega m^\chi_{\Omega,j}}{\chi(1)}k_{\Omega,j},$$

Démonstration. On découpe l'élément **eu** selon les classes de conjugaison des réflexions de W :

$$\mathbf{eu} = \sum_{\substack{\Omega\in\mathscr{A}/W\\ 1\le i<e_\Omega}} \sum_{H\in\Omega} \zeta_{e_H}^i c_{s_H^i} s_H^i = \sum_{\substack{\Omega\in\mathscr{A}/W\\ 0\le i<e_\Omega}} \sum_{H\in\Omega} \zeta_{e_H}^i \sum_{j=0}^{e_H-1} \zeta_{e_H}^{i(j-1)} k_{H,j} s_H^i = \sum_{\Omega\in\mathscr{A}/W} \sum_{j=0}^{e_\Omega-1} k_{\Omega,j} z_{\Omega,j},$$

où $z_{\Omega,j} = \sum_{H\in\Omega}\sum_{w\in W(H)} \det(w)^j w$ est central dans $\mathbb{C}W$. Comme ce dernier agit sur V_χ par le scalaire

$$\sum_{H\in\Omega}\sum_{w\in W(H)} \det(w)^j \frac{\chi(w)}{\chi(1)},$$

on obtient le résultat annoncé. □

1.2 Le cas du groupe imprimitif $G(d,1,n)$

Ici $V=\mathbb{C}^n$, on note $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ la base standard et $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sa base duale. Via le choix de la base standard, on identifie $GL(V)$ à $GL_n(\mathbb{C})$.

1.2.1 Le groupe $G(d,1,n)$

On décrit matriciellement le groupe $W=G(d,1,n)$: il s'agit du groupe constitué des matrices monomiales à coefficients dans μ_d. On note $\zeta=\zeta_d$. C'est un groupe d'ordre $d^n n!$ et il est isomorphe, en tant que groupe abstrait, au produit en couronne $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$. Les réflexions suivantes engendrent le groupe $G(d,1,n)$:

— les matrices de transposition $s_{i,j}$ pour $1\le i\ne j\le n$,

— les matrices diagonales $\sigma_i=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\zeta,1,\ldots)$ avec ζ en position i.

En posant $s_0=\sigma_1$ et $s_i=s_{i,i+1}$, on obtient une présentation de $G(d,1,n)$:

$$G(d,1,n) = \left\langle s_i, 0\le i<n \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_0^l=1, & s_0s_1s_0s_1=s_1s_0s_1s_0,\\ s_i^2=1, & s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1},\ \forall\ 1\le i<n,\\ & s_is_j=s_js_i,\ \forall\ |i-j|>1 \end{array} \right\rangle$$

L'ensemble des réflexions de $G(d,1,n)$ se répartit en d classes de conjugaison

$$\mathrm{Réf}(W)=\bigsqcup_{k=0}^{d-1}\mathrm{Réf}(W)_k,$$

où $\mathrm{Réf}(W)_0=\{\sigma_i^r s_{i,j}\sigma_i^{-r}\mid 1\le i<j\le n,\ 0\le r\le d-1\}$ et où $\mathrm{Réf}(W)_k=\{\sigma_i^k\mid 1\le i\le n\}$. On donne un choix d'éléments α_s et $\alpha_s^\vee$ pour chaque réflexion de $G(d,1,n)$.

Pour la réflexion $s_{i,j,r}=\sigma_i^r s_{i,j}\sigma_i^{-r}$, l'hyperplan $H_{i,j,r}$ associé dans V est donné par la forme linéaire $\alpha_{i,j,r}=x_i-\zeta^r x_j$ et un vecteur propre associé à la valeur propre -1 est $\alpha_{i,j,r}^\vee=\zeta^r y_i-y_j$. Pour la réflexion σ_i^k, l'hyperplan H_i associé dans V est donné par la forme linéaire $\alpha_{i,k}=x_i$ et un vecteur propre associé à la valeur propre ζ^k est $\alpha_{i,k}^\vee=y_i$.

Sous l'action de W, l'ensemble $\mathscr{A}$ des hyperplans n'a que deux orbites $\Omega_0=\{H_{i,j,r}\mid 1\le i<j\le n,\ 0\le r\le d-1\}$ et $\Omega_1=\{H_i\mid 1\le i\le n\}$ qui sont de cardinaux respectifs $d\frac{n(n-1)}{2}$ et n.

Pour $c\colon \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ constante sur les classes de conjugaison, on note $\mathbf{eu}_n$ l'élément d'Euler de $G(d,1,n)$. Afin de simplifier les notations, on note c_i la valeur de c sur la classe de conjugaison $\mathrm{Réf}(G(d,1,n))_i$ et k_i à la place de $k_{\Omega_1,i}$. On évitera d'introduire les paramètres $k_{\Omega_0,0}$ et $k_{\Omega_0,1}$ respectivement égaux à $-\frac{c}{2}$ et $\frac{c}{2}$.

1.2.2 Représentations de $G(d,1,n)$ et d-partitions

Une partition d'un entier n est une suite finie décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ d'entiers strictement positifs de somme n et on note $|\lambda| = n$. Une d-partition de l'entier n est un d-uplet $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ de partitions telles que $\sum_{i=1}^{d} |\lambda^{(i)}| = n$. Tout comme les représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de l'entier n, les représentations de $G(d,1,n)$ sont en bijection avec les d-partitions de n. On notera V_λ la représentation de $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ associé à la partition λ. Décrivons les représentations de $G(d,1,n)$ en terme de d-partitions en suivant [GJ11, Section 5.1].

Pour $1 \le k \le d$, on dispose d'une représentation linéaire η_k de dimension 1 de $G(d,1,n)$ données sur les générateurs par $s_0 \mapsto \det(s_0)^{k-1}$ et $s_i \mapsto 1$ pour $1 \le i \le n-1$. La représentation η_1 n'est autre que la représentation triviale de $G(d,1,n)$.

Étant donnée une d-partition $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ de n, on dispose d'une inclusion naturelle $GL_{|\lambda^{(1)}|}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{|\lambda^{(d)}|}(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ en considérant les matrices diagonales par blocs. On note alors $G(d,1,\lambda)$ le sous-groupe de $G(d,1,n)$ correspondant au produit direct $G(d,1,|\lambda^{(1)}|) \times \cdots \times G(d,1,|\lambda^{(d)}|)$. Via l'application quotient $G(d,1,|\lambda^{(k)}|) \to \mathfrak{S}_{|\lambda^{(k)}|}$, on voit les représentations de $\mathfrak{S}_{|\lambda^{(k)}|}$ comme des représentations de $G(d,1,|\lambda^{(k)}|)$. La représentation V_λ de $G(d,1,n)$ associée à la d-partition λ est alors

$$V_\lambda = \mathrm{Ind}_{G(d,1,\lambda)}^{G(d,1,n)} \big((V_{\lambda^{(1)}} \otimes \eta_1) \boxtimes (V_{\lambda^{(2)}} \otimes \eta_2) \boxtimes \cdots \boxtimes (V_{\lambda^{(d)}} \otimes \eta_d) \big).$$

Comme l'on dispose d'inclusions $G(d,1,n) \subset G(d,1,n+1)$, on cherche à décrire les foncteurs d'induction et de restriction. Pour une d-partition λ de n, le diagramme de Young $[\lambda]$ de λ est l'ensemble

$$\left\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \{1,\ldots,d\} \;\middle|\; 1 \le b \le \lambda_a^{(c)}\right\},$$

dont on appellera les éléments des *boîtes*. Le contenu $\mathrm{cont}(\gamma)$ d'une boîte $\gamma = (a,b,c)$ est l'entier $b-a$. On dit qu'une boîte γ de $[\lambda]$ est *enlevable* si $\gamma = (a, \lambda_a^{(c)}, c)$ et que pour tout $a' > a$, $\lambda_{a'}^{(c)} < \lambda_a^{(c)}$. Autrement dit, la boîte γ d'une d-partition λ de n est enlevable si et seulement $[\lambda] \setminus \{\gamma\}$ est le diagramme de Young d'une d-partition de $n-1$. On dit qu'une boîte γ est *ajoutable* à $[\lambda]$ si $\gamma = (a, \lambda_a^{(c)}+1, c)$ et que pour tout $a' < a$, $\lambda_{a'}^{(c)} > \lambda_a^{(c)}$ ou si $\gamma = (a+1, 1, c)$ si $\lambda^{(c)} = (\lambda_1^{(c)}, \ldots, \lambda_a^{(c)})$. Autrement dit, la boîte γ est ajoutable au diagramme d'une d-partition λ de n si et seulement si $[\lambda] \cup \{\gamma\}$ est le diagramme de Young d'une d-partition de $n+1$.

Proposition 1.2.1 ([GJ11, Proposition 5.1.8])**.** *Soit λ une d-partition de n. Alors on a*

$$\mathrm{Ind}_{G(d,1,n)}^{G(d,1,n+1)}(V_\lambda) = \bigoplus V_\mu,$$

la somme directe étant prise sur toutes les d-partition μ de $n+1$ dont le diagramme est obtenu en ajoutant une boîte au diagramme de λ. En ce qui concerne la restriction, on a

$$\mathrm{Res}_{G(d,1,n-1)}^{G(d,1,n)}(V_\lambda) = \bigoplus V_\mu,$$

la somme directe étant prise sur toutes les d-partitions μ de $n-1$ dont le diagramme est obtenu en enlevant une boîte du diagramme de λ.

Soit λ une d-partition de n. Un *d-tableau standard* $\mathfrak{t}$ de forme λ est une application bijective $\mathfrak{t}\colon [\lambda] \to \{1,\dots,n\}$ telle que pour toutes boîtes $\gamma = (a,b,c)$ et $\gamma' = (a',b',c)$ de $[\lambda]$ on ait $\mathfrak{t}(\gamma) < \mathfrak{t}(\gamma')$ si $a = a'$ et $b < b'$ ou si $a < a'$ et $b = b'$. La donnée d'un tableau standard $\mathfrak{t}$ est alors équivalente à une suite de d-partitions $(\lambda^{\mathfrak{t}}[i])_{1\le i\le n}$ telle que $[\lambda^{\mathfrak{t}}[i]] = \mathfrak{t}^{-1}(\{1,\dots,i\})$. Le diagramme de la partition $\lambda^{\mathfrak{t}}[i+1]$ est alors obtenu à partir de celui de $\lambda^{\mathfrak{t}}[i]$ en ajoutant la boîte $\mathfrak{t}^{-1}(i+1)$. En considérant les restrictions selon la chaîne de sous-groupes

$$G(d,1,n) \supset G(d,1,n-1) \supset \cdots \supset G(d,1,1) \supset \{1\},$$

on voit que la représentation V_λ s'écrit comme somme directe de droites indexées par les d-tableaux standards de forme λ, la droite indexée par le tableau $\mathfrak{t}$ étant l'unique droite $D_{\mathfrak{t}}$ telle que pour tout $1 \le i \le n$, $D_{\mathfrak{t}}$ est dans la composante irréductible $V_{\lambda^{\mathfrak{t}}[i]}$ de $\mathrm{Res}^{G(d,1,n)}_{G(d,1,i)}(V_\lambda)$.

1.2.3 Une sous-algèbre commutative de $\mathbb{C}G(d,1,n)$

Pour $1 \le k \le n$, les éléments

$$J_k = \mathbf{eu}_k - \mathbf{eu}_{k-1} = \sum_{\substack{s\in \mathrm{Réf}(G(d,1,k))\\ s\notin \mathrm{Réf}(G(d,1,k-1))}} c_s \det(s) s \in \mathbb{C}G(d,1,k),$$

sont particulièrement intéressants. Dans le cas $d=1$, ce sont exactement les éléments de Jucys-Murphy du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ multipliés par la constante multiplicative c_0.

Lemme 1.2.2. *Pour tout i,j les éléments J_i et J_j commutent et $J_{i+1} = s_i J_i s_i - c_0 \sum_{r=0}^{d-1} s_{i,i+1,r}$. La sous-algèbre commutative de $G(d,1,n)$ engendrée par $J_1,\dots,J_n$ est notée $\mathbf{JM}_c(d,n)$.*

Démonstration. Puisque les réflexions de $G(d,1,i)$ ne se trouvant pas dans $G(d,1,i-1)$ sont les $s_{p,i,r}$ pour $1 \le p < i$ et $0 \le r \le d-1$ et les σ_i^r pour $1 \le i \le d-1$, l'élément de Jucys-Murphy J_i est égal à

$$J_i = -c_0 \sum_{1\le p<i} \sum_{r=0}^{d-1} s_{p,i,r} + \sum_{r=1}^{d-1} c_r \zeta^r \sigma_i^r.$$

Commençons par montrer la relation de récurrence des éléments de Jucys-Murphy. On a :

$$s_i J_i s_i = \sum_{\substack{s\in \mathrm{Réf}(G(d,1,i))\\ s\notin \mathrm{Réf}(G(d,1,i-1))}} \det(s) c_s s_i s s_i.$$

Le conjugué de $s_{p,i,r}$ par s_i est égal à $s_{p,i+1,r}$ et celui de σ_i^r à σ_{i+1}^r. Ainsi on trouve bien que $J_{i+1} = s_i J_i s_i - c_0 \sum_{r=0}^{d-1} s_{i,i+1,r}$.

Pour montrer que les éléments de Jucys-Murphys commutent, il suffit de remarquer que $\mathbf{eu}_k$ est central dans $\mathbb{C}G(d,1,k)$ pour tout k. Ainsi $J_{i+1} = \mathbf{eu}_{i+1} - \mathbf{eu}_i$ est central dans $\mathbb{C}G(d,1,i)$ et en particulier commute avec $J_i,\dots,J_1 \in \mathbb{C}G(d,1,i)$. □

L'action de ces éléments de Jucys-Murphy sur la représentation V_λ sont codiagonalisables et en utilisant le lemme 1.1.7, on peut aisément calculer les valeurs propres correspondantes.

Proposition 1.2.3. *Soient λ une d-partition de n et $\gamma=(a,b,c)$ une boîte enlevable de $[\lambda]$. Alors J_n agit sur la composante $V_{\lambda\setminus\{\gamma\}}$ de $\mathrm{Res}_{G(d,1,n-1)}^{G(d,1,n)}(V_\lambda)$ par multiplication par le scalaire*

$$d(k_{1-c}-c_0(b-a)).$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1.7, il suffit de calculer les multiplicités $m_{\Omega,j}^{\chi_\lambda}$ pour obtenir l'action de l'élément d'Euler. D'après [Ro08, Lemma 6.1], on a

$$\frac{1}{\chi_\lambda(1)}\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_0\rangle},\det{}^j\rangle_{\langle s_0\rangle}=\frac{|\lambda^{(j+1)}|}{n}\quad\text{et}\quad\frac{1}{\chi_\lambda(1)}\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_1\rangle},\det\rangle_{\langle s_1\rangle}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\gamma\in[\lambda]}\mathrm{cont}(\gamma).$$

Ainsi $\mathbf{eu}_n$ agit sur V_λ comme la multiplication par le scalaire

$$\omega_\lambda(\mathbf{eu}_n)=\sum_{j=0}^{d-1}k_{-j}\frac{dn}{\chi_\lambda(1)}\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_0\rangle},\det{}^j\rangle_{\langle s_0\rangle}+\frac{c_0}{2}\frac{dn(n-1)}{\chi_\lambda(1)}(\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_1\rangle},\det\rangle_{\langle s_1\rangle}-\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_1\rangle},1\rangle_{\langle s_1\rangle}).$$

Or $\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_1\rangle},1\rangle_{\langle s_1\rangle}=\chi_\lambda(1)-\langle(\chi_\lambda)_{|\langle s_1\rangle},\det\rangle_{\langle s_1\rangle}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\omega_\lambda(\mathbf{eu}_n)=d\sum_{j=0}^{d-1}k_{-j}|\lambda^{(j+1)}|-d\,c_0\sum_{\gamma\in[\lambda]}\mathrm{cont}(\gamma).$$

Ceci permet alors de conclure puisque $J_n=\mathbf{eu}_n-\mathbf{eu}_{n-1}$. □

Corollaire 1.2.4. *Pour λ une d-partition de n, $\mathfrak{t}$ un d-tableau standard de forme λ et $1\leq p\leq n$, en notant $\mathfrak{t}^{-1}(p)=(a,b,c)$, l'élément J_p agit sur $D_\mathfrak{t}$ par multiplication par le scalaire $d(k_{1-c}-c_0(b-a))$.*

1.2.4 Caractères $\mathbf{JM}_c(d,n)$-cellulaires et c-cellulaires

Tout comme pour l'algèbre $\mathrm{Gau}_c(W)$, on peut définir des caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$.

Définition 1.2.5. Pour tout module simple L de $\mathbf{JM}_c(d,n)$, le *caractère cellulaire pour l'algèbre* $\mathbf{JM}_c(d,n)$ associé à L est

$$\gamma_L^{\mathbf{JM}_c(d,n)}=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G(d,1,n))}\left[\mathrm{Res}_{\mathbf{JM}_c(d,n)(W)}^{\mathbb{C}G(d,1,n)}(V_\chi):L\right]\chi.$$

L'ensemble des caractères cellulaires de $G(d,1,n)$ pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$ est l'ensemble des $\gamma_L^{\mathbf{JM}_c(d,n)}$ pour L parcourant les représentations irréductibles de $\mathbf{JM}_c(d,n)$.

Il existe un lien fort entre les caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$ et l'algèbre de Gaudin $\mathrm{Gau}_c(G(d,1,n))$. Dans un souci de simplification, l'algèbre $\mathrm{Gau}_c(G(d,1,n))$ sera notée $\mathrm{Gau}_c(d,n)$.

Théorème 1.2.6. *Tout caractère cellulaire pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$ est somme de caractères c-cellulaires.*

Démonstration. On note $\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}G(d,1,n)$ engendrée par les éléments

$$x_k\mathscr{D}_{y_k} = \sum_{t=1}^{d-1} c_t\zeta^t\sigma_k^t - c_0\sum_{r=0}^{d-1}\left(\sum_{1\le i<k}\frac{-\zeta^r x_k}{x_i-\zeta^r x_k}s_{i,k,r} + \sum_{k<j\le n}\frac{x_k}{x_k-\zeta^r x_j}s_{k,j,r}\right).$$

Comme x_k est inversible dans $\mathbb{C}(V)$, les algèbres $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,n)$ et $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$ sont égales. Les caractères c-cellulaires sont donc égaux aux caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$. On va alors spécialiser l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$ en la suite croissante d'idéaux premiers

$$0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_n,$$

où $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal de $\mathbb{C}[V]$ engendré par $x_1,x_2,\dots x_i$. On note $(\mathrm{Gau}_c^{(i)}(d,n))_{0\le i\le n}$ la suite d'algèbres ainsi obtenues :

$$\mathrm{Gau}_c^{(i)}(d,n) = \mathrm{Gau}_c^{(i-1)}(d,n)/x_i\,\mathrm{Gau}_c^{(i-1)}(d,n),\ \text{pour } 1\le i\le n,$$

et on note $\pi^{(i)}\colon \mathrm{Gau}_c^{(i)}(d,n)\to\mathrm{Gau}_c^{(i+1)}(d,n)$ le morphisme quotient ainsi obtenu et $\Pi^{(i)}$ la composée $\pi^{(i-1)}\circ\cdots\circ\pi^{(0)}$. L'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(n)}(d,n)$ est donc une sous-algèbre de l'algèbre de groupe de $G(d,1,n)$.

Les caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(i)}(d,n)$ sont alors sommes de caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(i-1)}(d,n)$ d'après la proposition 1.1.3 et donc sont somme de caractères c-cellulaires, puisque ces derniers sont égaux aux caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$.

Étudions maintenant les images des générateurs $x_k\mathscr{D}_{y_k}$ de l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(0)}(d,n)$ par les morphismes $\Pi^{(i)}$. On montre alors par récurrence que si $k\le i$ on a

$$\Pi^{(i)}(x_k\mathscr{D}_{y_k}) = \sum_{t=1}^{d-1}c_t\zeta^t\sigma_k^t - c_0\sum_{r=0}^{d-1}\sum_{p=1}^{k-1}s_{p,k,r},$$

et si $k>i$ on a

$$\Pi^{(i)}(x_k\mathscr{D}_{y_k}) = \sum_{t=1}^{d-1}c_t\zeta^t\sigma_k^t - c_0\sum_{r=0}^{d-1}\left[\sum_{p=1}^{i}s_{p,k,r} + \sum_{i<p<k}\frac{-\zeta^r x_k}{x_p-\zeta^r x_k}s_{p,k,r} + \sum_{k<q\le n}\frac{x_k}{x_k-\zeta^r x_q}s_{k,q,r}\right].$$

L'élément $\Pi^{(n)}(x_k\mathscr{D}_{y_k})$ de $\mathbb{C}G(d,1,n)$ est donc égal à l'élément de Jucys-Murphy J_k. Ceci montre donc que l'algèbre $\mathrm{Gau}_c^{(n)}(d,n)$ est égale à l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$, et les caractères cellulaires pour l'algèbre $\mathbf{JM}_c(d,n)$ sont donc bien somme de caractères c-cellulaires. □

Corollaire 1.2.7. *Supposons que le paramètre c vérifie*

$$(k_p-k_q)-c_0 j\neq 0 \quad et \quad c_0\neq 0,$$

pour tout $1\le p\neq q\le d$ *et* $-n<j<n$. *Alors les caractères c-cellulaires de* $G(d,1,n)$ *sont les caractères irréductibles de* $G(d,1,n)$.

Démonstration. D'après la proposition 1.2.3, il suffit de montrer que pour toute paire de d-tableaux standards distincts $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ de forme une d-partition de n (non nécessairement la même) alors les suites

$$(d(k_{1-c_p} - c_0(b_p - a_p)))_{1\leq p\leq n} \quad \text{et} \quad (d(k_{1-c'_p} - c_0(b'_p - a'_p)))_{1\leq p\leq n},$$

sont différentes, où $\mathfrak{t}^{-1}(p) = (a_p, b_p, c_p)$ et $(\mathfrak{t}')^{-1}(p) = (a'_p, b'_p, c'_p)$. Soient $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ deux tableaux tels que les suites ci-dessus coïncident. Par l'absurde, supposons que $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ sont différents. Soit $1 \leq p \leq n$ le plus petit entier tel que les boîtes $\mathfrak{t}^{-1}(p)$ et $(\mathfrak{t}')^{-1}(p)$ soient différentes. On note μ la partition $\lambda^{\mathfrak{t}}[p-1] = \lambda^{\mathfrak{t}'}[p-1]$.

Par hypothèse, si $-n < \mathrm{cont}(\mathfrak{t}^{-1}(p)) - \mathrm{cont}((\mathfrak{t}')^{-1}(p)) < n$ alors $c_p = c'_p$ et $b_p - a_p = b'_p - a'_p$. Or $\mathfrak{t}^{-1}(p)$ et $(\mathfrak{t}')^{-1}(p)$ sont toutes deux des boîtes ajoutables à la partition $\mu^{(c_p)}$. Comme il ne peut exister qu'une seule boîte ajoutable de contenu donné dans une partition, on a nécessairement $\mathfrak{t}^{-1}(p) = (\mathfrak{t}')^{-1}(p)$, ce qui contredit la définition de p.

On a donc $|\mathrm{cont}(\mathfrak{t}^{-1}(p)) - \mathrm{cont}((\mathfrak{t}')^{-1}(p))| \geq n$. Comme le contenu d'une boîte du diagramme d'une d-partition de n est compris entre $-n+1$ et $n-1$, les contenus de $\mathfrak{t}^{-1}(p)$ et de $(\mathfrak{t}')^{-1}(p)$ sont de signes différents. Quitte à échanger $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$, on suppose que le contenu de $\mathfrak{t}^{-1}(p)$ est égal à $x > 0$ et que celui de $(\mathfrak{t}')^{-1}(p)$ est égal à $y < 0$. La d-partition μ contient nécessairement une boîte de contenu $x-1$ et une boîte de contenu $y+1$ et son diagramme contient alors au moins $x-y-1$ boîtes. Comme $x-y \geq n$, on obtient que $p-1 \geq n-1$ et donc nécessairement $p = n$ et $x-y = n$.

Si $c_p \neq c'_p$ alors la d-partition μ contient une boîte (a, b, c) de contenu $x-1$ et une boîte (a', b', c') de contenu $y+1$ avec $c \neq c'$ ce qui implique que μ contient au moins $x-y$ boîtes. Mais μ contient $n-1$ boîtes et $x-y \geq n$, ce qui est absurde. Donc nécessairement $c_p = c'_p$. Comme $c_0 \neq 0$, on ne peut avoir $k_{1-c_p} - c_0 x = k_{1-c_p} - c_0 y$ avec $x \neq y$, ce qui aboutit à une contradiction. □

Remarque 1.2.8. Les équations que l'on obtient ici sont bien connues, elles correspondent aux hyperplans essentiels définis par Chlouveraki [Ch09].

Remarque 1.2.9. Le fait que les caractères c-cellulaires sont irréductibles hors de ces hyperplans a déjà été montré dans [BR17b, Theorem 14.4.1]. Une autre preuve algébrique peut se déduire de [Be14, Theorem 10(3)].

1.3 Caractères constructibles de Leclerc-Miyachi

Dans cette partie, on reprend une construction proposée par Leclerc et Miyachi de certains caractères associés aux groupes de réflexions complexes $G(d,1,n)$ [LM04]. Cette construction fait intervenir le groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$. On note q une indéterminée.

1.3.1 L'algèbre de Hopf $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$

Le groupe quantique $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ associé au diagramme de Dynkin doublement infini A_∞ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre engendrée par les générateurs E_i, F_i et K_i pour $i \in \mathbb{Z}$ soumis aux relations

$$\begin{aligned}
K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i, \quad K_i K_j = K_j K_i,\\
K_i E_j = q^{-\delta_{i,j-1}+2\delta_{i,j}-\delta_{i,j+1}} E_j K_i,\\
K_i F_j = q^{\delta_{i,j-1}-2\delta_{i,j}+\delta_{i,j+1}} F_j K_i,\\
E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q-q^{-1}},\\
E_i E_j = E_j E_i \text{ si } |i-j| > 1,\\
E_i^2 E_j - (q+q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \text{ si } |i-j| = 1,\\
F_i F_j = F_j F_i \text{ si } |i-j| > 1,\\
F_i^2 F_j - (q+q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \text{ si } |i-j| = 1,
\end{aligned}$$

pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. C'est une algèbre de Hopf, et on fait ici le choix suivant de coproduit Δ, de counité ε et d'antipode S :

$$\begin{array}{lll}
\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i & S(K_i) = K_i^{-1} & \varepsilon(K_i) = 1,\\
\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes E_i & S(E_i) = -K_i E_i & \varepsilon(E_i) = 0,\\
\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i & S(F_i) = -F_i K_i^{-1} & \varepsilon(F_i) = 0.
\end{array}$$

Les racines simples de l'algèbre $\mathfrak{sl}_\infty$ sont notées $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et les poids fondamentaux correspondants $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. On dispose ainsi d'une représentation irréductible intégrable $V(\Lambda_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Cette dernière admet $(v_\beta)_\beta$ pour base sur $\mathbb{Q}(q)$, où β parcourt l'ensemble

$$\left\{(\beta_k)_{k\le i} \mid \beta_k < \beta_{k+1},\ \beta_k = k \text{ pour } k \ll 0\right\}.$$

On identifiera cet ensemble avec les sous-ensembles de $\mathbb{Z}_{\le i} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \le i\}$ correspondants, et on se permettra d'écrire $j \in \beta$ pour dire qu'il existe k tel que $\beta_k = j$ ou encore $\beta \cup \{l\}$ pour $l \notin \beta$. Sur cette base, les générateurs E_i, F_i et K_i agissent comme suit [LM04] :

$$E_i v_\beta = \begin{cases} v_\gamma & \text{if } i+1 \in \beta \text{ et } i \notin \beta, \text{ où } \gamma = (\beta \setminus \{i+1\}) \cup \{i\}\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_i v_\beta = \begin{cases} v_\gamma & \text{if } i+1 \notin \beta \text{ et } i \in \beta, \text{ où } \gamma = (\beta \setminus \{i\}) \cup \{i+1\}\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$K_i v_\beta = \begin{cases} q\, v_\beta & \text{si } i \in \beta \text{ et } i+1 \notin \beta\\ q^{-1} v_\beta & \text{si } i+1 \in \beta \text{ et } i \notin \beta\\ v_\beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur de plus haut poids est alors v_{β^i} où $\beta^i = \mathbb{Z}_{\le i}$ et la base (v_β) de $V(\Lambda_i)$ est dite base canonique, que l'on note $B(\Lambda_i)$.

1.3.2 Espace de Fock associé à une représentation de hauteur d

Soit $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{d-1})$ un d-uplet décroissant d'entiers et on considère $\Lambda_{\mathbf{r}} = \sum_{i=0}^{d-1} \Lambda_{r_i}$ le poids correspondant au d-uplet $\mathbf{r}$. Le $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-module simple intégrable de plus haut poids $\Lambda_{\mathbf{r}}$ est noté $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ et on note $F(\Lambda_{\mathbf{r}}) = V(\Lambda_{r_0}) \otimes \cdots \otimes V(\Lambda_{r_{d-1}})$ l'espace de Fock associé. Ce dernier admet un vecteur de plus haut poids $\Lambda_{\mathbf{r}}$, à savoir le vecteur $v_{\Lambda_{\mathbf{r}}} = v_{\beta^{r_0}} \otimes \cdots \otimes v_{\beta^{r_{d-1}}}$, ce qui nous permet de définir un morphisme injectif de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-modules $V(\Lambda_{\mathbf{r}}) \to F(\Lambda_{\mathbf{r}})$.

Le module $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ dispose alors d'une base $S(\Lambda_{\mathbf{r}})$ qui est le produit tensoriel des bases $B(\Lambda_{r_i})$ des modules $V(\Lambda_{r_i})$:

$$S(\Lambda_{\mathbf{r}}) = \left\{ v_{\beta_0} \otimes \cdots v_{\beta_{d-1}} \mid v_{\beta_i} \in B(\Lambda_{r_i}) \right\}.$$

Cette base sera appelée base standard de $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$. Elle est indexée par les d*-symboles*

$$S = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix},$$

où $\beta_i = (\beta_{i,k})_{k \le r_i}$ est une suite strictement décroissante d'entiers. On définit la *hauteur* d'un tel symbole comme l'entier $\sum_{i=0}^{d-1} \sum_{k \le r_i} (\beta_{i,k} - k)$. On notera v_S l'élément de $S(\Lambda_{\mathbf{r}})$ correspondant au d-symbole S. Le vecteur de plus haut poids de $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ correspond donc au d-symbole

$$S^0 = \begin{pmatrix} \beta^{r_0} \\ \beta^{r_1} \\ \vdots \\ \beta^{r_{d-1}} \end{pmatrix}.$$

À un d-symbole $S = (\beta_i)_{0 \le i \le d-1}$, on peut associer une d-partition $(\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(d)})$ de la hauteur de S par

$$\lambda_j^{(i)} = \beta_{i-1, r_i - j + 1} - (r_i - j + 1).$$

Cette opération est alors bijective. Un d-symbole $S = (\beta_i)_{0 \le i \le d-1}$ est dit *standard* s'il vérifie

$$(\beta_i)_k \le (\beta_j)_k \text{ pour tous } i < j \text{ et } k \le r_j.$$

1.3.3 Base canonique

La notion de base canonique ou cristalline a été introduite par Kashiwara [Ka91] et Lusztig [Lu90a]. On rappelle sa définition dans le cas particulier étudié ici, en suivant la présentation de [LT00, Section 3].

Soit R le sous-anneau de $\mathbb{Q}(q)$ constitué des fractions rationnelles qui n'ont pas de pôle en 0. On dispose des sous-R-réseaux de $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ et de $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ définis par

$$F_R(\Lambda_{\mathbf{r}}) = \bigoplus_{v \in S(\Lambda_{\mathbf{r}})} R\, v \quad \text{et} \quad V_R(\Lambda_{\mathbf{r}}) = F_R(\Lambda_{\mathbf{r}}) \cap V(\Lambda_{\mathbf{r}}).$$

Ces réseaux sont appelés les réseaux cristallins de $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ et de $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$. D'après [KN94], il existe des bases (b_Σ) du R-module $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$, indexées par les d-symboles standards, constituées de vecteurs de poids tels que

$$b_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod q F_R(\Lambda_{\mathbf{r}}).$$

Pour obtenir l'unicité d'une telle base, il faut alors ajouter une condition de stabilité par rapport à une involution.

Soit $x \mapsto \overline{x}$ l'involution de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ définie comme l'automorphisme d'anneaux vérifiant

$$\overline{q} = q^{-1}, \quad \overline{K_i} = K_i^{-1}, \quad \overline{E_i} = E_i, \quad \overline{F_i} = F_i.$$

Comme $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ est un module de plus haut poids $\Lambda_{\mathbf{r}}$ dont un vecteur de plus haut poids est v_{S^0}, tout élément de $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ peut être écrit $v = x\, v_{S^0}$ avec $x \in \mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$. On pose alors $\overline{v} = \overline{x}\, v_{S^0}$.

Enfin, on considère $\mathscr{U}_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_\infty)^{<0}$ la sous-$\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$-algèbre de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ engendrée par les puissances divisées $F_i^{(r)} = \frac{F_i}{[r]!}$, où $[r]! = [r][r-1]\cdots[1]$ et $[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q-q^{-1}}$. Enfin, on pose $V_{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\mathbf{r}}) = \mathscr{U}_q^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_\infty)^{<0}\, v_{S^0}$.

Théorème 1.3.1 (Kashiwara)**.** *Il existe une unique $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$-base (b_Σ) de $V_{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\mathbf{r}})$ indexée par les d-symboles standards telle que*

$$b_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod q F_R(\Lambda_{\mathbf{r}}) \quad \textit{et} \quad \overline{b_\Sigma} = b_\Sigma.$$

Cette base est appelée base canonique de $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ et est notée $B(\Lambda_{\mathbf{r}})$.

Dans [LM04, Theorem 3], l'expression de l'image de la base canonique $B(\Lambda_{\mathbf{r}})$ dans $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ sur la base standard $S(\Lambda_{\mathbf{r}})$ est donnée quand $d = 2$. Il existe également des caractères c-constructibles, pour les groupes de Coxeter, définis par Lusztig [Lu03, Chapter 22] en utilisant une induction tronquée. Ils dépendent également d'un paramètre c : $\text{Réf}(G(d,1,n)) \to \mathbb{C}$ invariant sur les classes de conjugaison, tout comme les caractères c-cellulaires définis ici. Une notion de caractères constructibles pour $G(d,1,n)$ est alors proposée dans [LM04, Section 6.3].

Définition 1.3.2. Soit $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{d-1})$ un d-uplet croissant d'entiers. On note (b_Σ) la base canonique du module $V(\Lambda_{\mathbf{r}})$. Pour $\Sigma = (\beta_i)_{0 \le i \le d-1}$ un d-symbole standard, et on écrit l'expression de son image dans $F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ sur la base standard $S(\Lambda_{\mathbf{r}})$:

$$b_\Sigma = \sum_S \alpha_S^\Sigma(q) v_S,$$

la somme étant prise sur les d-symboles S. Le *caractère* $\mathbf{r}$*-constructible* associé au symbole Σ est

$$\gamma_\Sigma = \sum_S \alpha_S^\Sigma(1) \chi_S,$$

où χ_S est le caractère de $G(d,1,n)$ correspondant au symbole S, où $n = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{k \le r_i} (\beta_{i,k} - k)$.

La terminologie similaire est due au théorème suivant de Leclerc et Miyachi [LM04, Theorem 10].

Théorème 1.3.3. *L'ensemble des caractères* $\mathbf{r}$*-constuctibles de $G(2,1,n)$ coïncide avec l'ensemble des caractères c-constructibles, où le paramètre c est défini à l'aide de* $\mathbf{r}$.

1.3.4 Vecteurs de hauteur 2 de la base canonique

Afin de calculer la base canonique, on suit l'algorithme de [LT00], qui marche sans modification pour $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$. Ce dernier consiste en la détermination d'une base intermédiaire, elle aussi indexée par les d-symboles standards, notée (A_Σ), qui est stable par l'involution $\bar{\ }$. Le changement de base de cette dernière à la base canonique est ensuite effectué à l'aide d'une matrice unitriangulaire, pour un ordre bien choisi sur l'ensemble des d-symboles standards. Dans le cas des symboles standards de hauteur 2, on montre que cette base (A_Σ) est déjà la base canonique.

On fixe une suite décroissante d'entiers $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{d-1})$ et on commence par décrire les d-symboles standards de hauteur 2. Soient $-1 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_p = d-1$ tels que pour tous $1 \leq k \leq p-1$ on a $r_{i_k} > r_{i_{k+1}}$ et pour tout $1 \leq k \leq p$, $i_{k-1} < i \leq i_k$ on $r_i = r_{i_k}$. Par convention, on pose $r_{-1} = -\infty$ et $r_d = +\infty$. Tous les d-symboles de hauteurs 2 sont les suivants :

- $S_{i,j}$, pour $0 \leq i < j \leq d-1$, est le d-symbole tel que $\beta_{i,r_i} = r_i + 1$, $\beta_{j,r_j} = r_j + 1$ et $\beta_{k,l} = l$ pour tous les autres k et l,
- S_i, pour $0 \leq i \leq d-1$ est le d-symbole tel que $\beta_{i,r_i} = r_i + 2$ et $\beta_{k,l} = l$ pour tous les autres k et l,
- S'_i, pour $0 \leq i \leq d-1$, est le d-symbole tel que $\beta_{i,r_i} = r_i + 1$, $\beta_{i,r_i-1} = r_i$ et $\beta_{k,l} = l$ pour tous les autres k et l,

et les d-symboles standards se répartissent alors dans l'une des quatre familles suivantes :

- pour $1 \leq k \leq p$ le d-symbole S_{i_k} est standard,
- pour $1 \leq k < l \leq p$ le d-symbole S_{i_k,i_l} est standard,
- pour $1 \leq k \leq p$ tel que $i_k - i_{k-1} \geq 2$ le d-symbole S_{i_k-1,i_k} est standard,
- pour $1 \leq k \leq p$ tel que $r_{i_k} - r_{i_{k+1}} \geq 2$ le d-symbole S'_{i_k} est standard.

Exemple 1.3.4. Traitons le cas de $d = 4$ avec $\mathbf{r} = (2, 0, -1, -1)$. On a alors $i_0 = 0$, $i_1 = 1$ et $i_2 = 3$. Il y a alors neuf 4-symboles standards donnés par

$$S_0 = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 4 \\ \dots & -1 & 0 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & -1 & & & \end{pmatrix}, \ S_1 = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & -1 & 2 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & -1 & & & \end{pmatrix}, \ S_3 = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & -1 & 0 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & 1 & & & \end{pmatrix},$$

$$S_{0,1} = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \dots & -1 & 1 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & -1 & & & \end{pmatrix}, \ S_{0,3} = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \dots & -1 & 0 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & 0 & & & \end{pmatrix}, \ S_{1,3} \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & -1 & 1 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

$$S_{2,3} = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & -1 & 0 & & \\ \dots & 0 & & & \\ \dots & 0 & & & \end{pmatrix}, \ S'_0 = \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \dots & -1 & 0 & & \\ \dots & -1 & & & \\ \dots & -1 & & & \end{pmatrix}, \ S'_3 = \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & -2 & -1 & 2 & & \\ \dots & -2 & -1 & & & \\ \dots & -1 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, on note $\tilde{S}_i$ le d-symbole de hauteur 1 tel que $\beta_{i,r_i} = r_i + 1$ et $\beta_{k,l} = l$ pour tous les autres k et l. Pour chacune des quatre familles de d-symboles standards cidessus, on calcule l'élément A_Σ défini dans [LT00] et on montre que c'est un élément de la base canonique en montrant dans chaque cas que $A_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod q F_A(\Lambda)$.

La première famille de d-symboles standards

Soit $1 \leq k \leq p$ et on considère le d-symbole standard $\Sigma = S_{i_k}$. L'algorithme de [LT00] donne

$$A_\Sigma = F_{i_k+1} F_{i_k} v_{S^0}.$$

Ainsi on a

$$F_{i_k} v_{S^0} = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{\tilde{S}_i},$$

et la valeur de A_Σ dépend de la valeur de la différence $r_{i_{k-1}} - r_{i_k}$:

$$F_{i_k+1} v_{\tilde{S}_i} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=i_{k-2}+1}^{i_{k-1}} q^{i_{k-1}-j+1} v_{S_{i,j}} + v_{S_i} & \text{si } r_{i_{k-1}} = r_{i_k}+1, \\ v_{S_i} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on obtient

$$A_\Sigma = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} \left(v_{S_i} + \sum_{j=i_{k-2}+1}^{i_{k-1}} q^{i_{k-1}-j+1} v_{S_{i,j}} \right) & \text{si } r_{i_{k-1}} = r_{i_k}+1, \\ \displaystyle\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{S_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $A_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod qF_A(\Lambda)$.

La deuxième famille de d-symboles standards

Soient $1 \leq k < l \leq p$ et on considère le d-symbole standard $\Sigma = S_{i_k,i_l}$. L'algorithme de [LT00] donne

$$A_\Sigma = F_{i_l} F_{i_k} v_{S^0}.$$

Ainsi on a

$$F_{i_k} v_{S^0} = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{\tilde{S}_i},$$

et la valeur de A_Σ dépend de la valeur de la différence $r_{i_k} - r_{i_l}$:

$$F_{i_l} v_{\tilde{S}_i} = \begin{cases} q^{i_{l-1}-i_l+1} v_{S'_i} + \displaystyle\sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} q^{i_l-i} v_{S_{i,j}} & \text{si } r_{i_k} = r_{i_l}+1, \\ \displaystyle\sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} q^{i_l-i} v_{S_{i,j}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on obtient

$$A_\Sigma = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} \left(q^{i_{l-1}-i_l+1} v_{S'_i} + \sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} q^{i_l-j} v_{S_{i,j}} \right) & \text{si } r_{i_k} = r_{i_l}+1, \\ \displaystyle\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} q^{i_k-i+i_l-j} v_{S_{i,j}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $A_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod qF_A(\Lambda)$. Remarquons également que si $r_{i_k} = r_{i_l}+1$ alors nécessairement $l = k+1$.

La troisième famille de d-symboles standards

Soit $1 \leq k \leq p$ tel que $i_k - i_{k-1} \geq 2$ et on considère le d-symbole standard $\Sigma = S_{i_k-1,i_k}$. L'algorithme de [LT00] donne

$$A_\Sigma = F_{i_k}^{(2)} v_{S^0}.$$

Ainsi on a

$$F_{i_k} v_{S^0} = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{\tilde{S}_i}.$$

Par suite,

$$F_{i_k} v_{\tilde{S}_i} = \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i-1} q^{i_k-i-2} v_{S_{i,j}} + \sum_{j=i+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{S_{i,j}},$$

et l'action de $F_{i_k}^2$ est donnée par

$$\begin{aligned}
F_{i_k}^2 v_{S^0} &= \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \left(\sum_{j=i_{k-1}+1}^{i-1} q^{2i_k-i-j-2} v_{S_{i,j}} + \sum_{j=i+1}^{i_k} q^{2i_k-i-j} v_{S_{i,j}} \right) \\
&= \sum_{i_{k-1}+1 \leq i < j \leq i_k} (q^{2i_k-i-j-2} + q^{2i_k-i-j}) v_{S_{i,j}} \\
&= [2]_q \sum_{i_{k-1}+1 \leq i < j \leq i_k} q^{2i_k-i-j-1} v_{S_{i,j}}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$A_\Sigma = \sum_{i_{k-1}+1 \leq i < j \leq i_k} q^{2i_k-i-j-1} v_{S_{i,j}}.$$

On vérifie facilement que $A_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod qF_A(\Lambda)$.

La quatrième famille de d-symboles standards

Enfin, soit $1 \leq k \leq p$ tel que $r_{i_k} - r_{i_{k+1}} \geq 2$ et on considère le d-symbole standard $\Sigma = S'_{i_k}$. L'algorithme de [LT00] donne

$$A_\Sigma = F_{i_k-1} F_{i_k} v_{S^0}.$$

Ainsi on a

$$F_{i_k} v_{S^0} = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{\tilde{S}_i},$$

et donc

$$F_{i_k-1} v_{\tilde{S}_i} = v_{S'_i}$$

puisque $r_{i_k} - r_{i_{k+1}} \geq 2$. Finalement,

$$A_\Sigma = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} q^{i_k-i} v_{S'_i}.$$

On vérifie facilement que $A_\Sigma \equiv v_\Sigma \mod qF_A(\Lambda)$.

1.4 Quand $n=2$

Terminons ce chapitre par un calcul explicite des caractères c-cellulaires pour le groupe $G(d,1,2)$, pour n'importe quel paramètre c. On relie par la suite ces caractères aux caractères constructibles que l'on obtient à l'aide des expressions des vecteurs de la base canonique sur la base standard de l'espace de Fock. Ici, on va plutôt noter (x,y) la base standard de $\mathbb{C}^2$ et (X,Y) sa base duale.

Pour $0\leq k\leq d-1$ la réflexion $s_{1,2,k}$ est donnée par la matrice

$$s_{1,2,k}=\begin{pmatrix}0 & \zeta^k\\ \zeta^{-k} & 0\end{pmatrix},$$

et on la notera s_k pour simplifier. On note s la matrice s_0 et t la matrice diagonale diag$(\zeta,1)$, de sorte que $G(d,1,2)$ admet pour présentation

$$\langle s,t\mid s^2=1,t^d=1,stst=tsts\rangle.$$

On a vu que les représentations irréductibles de $G(d,1,2)$ sont paramétrées par les d-partitions de 2 : on dispose de $2d$ représentations de dimension 1 correspondant à une d-partition de 2 concentrée en une seule position, et de $\binom{d}{2}$ représentations de dimension 2 correspondant à une d-partition de 2 concentrée en deux positions différentes.

Pour $1\leq i\leq d$, η_i désignera la représentation associée à la d-partition $\lambda=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(d)})$ avec $\lambda^{(i)}=(2)$ et $\lambda^{(j)}=\emptyset$ pour $j\neq i$, η'_i désignera la représentation associée à la d-partition $\lambda=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(d)})$ avec $\lambda^{(i)}=(1,1)$ et $\lambda^{(j)}=\emptyset$ pour $j\neq i$. Enfin, pour $1\leq i<j\leq d$, $\rho_{i,j}$ désignera la représentation associée à la d-partition $\lambda=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(d)})$ avec $\lambda^{(i)}=\lambda^{(j)}=(1)$ et $\lambda^{(k)}=\emptyset$ pour $k\notin\{i,j\}$. Les caractères correspondants seront notés χ_i,χ'_i et $\chi_{i,j}$.

Matriciellement, ces représentations sont données sur les générateurs s et t par

	s	t
$\eta_i, 1\leq i\leq d$	1	ζ^{i-1}
$\eta'_i, 1\leq i\leq d$	-1	ζ^{i-1}
$\rho_{i,j}, 1\leq i<j\leq d$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\zeta^{i-j}&0\\0&\zeta^{j-i}\end{pmatrix}$

On fait le choix d'un paramètre $c\colon$ Réf$(G(d,1,2))\to\mathbb{C}$ constant sur les classes de conjugaison. Comme expliqué dans la partie 1.1.2, on va plutôt travailler avec le jeu de paramètres k_i pour $0\leq i\leq d$ et c_0, ce qui est équivalent à se donner le jeu de paramètres c. On pose enfin $k_i^\#=k_{1-i}$.

Remarque 1.4.1. On travaille avec ces paramètres pour plusieurs raisons. Dans le corollaire 1.2.7, les conditions pour avoir des caractères c-cellulaires simples s'expriment mieux avec ces derniers. Ces paramètres sont également ceux de l'algèbre de Hecke cyclotomique adaptée à la situation, voir [BR17b, Chapter 15].

Les deux générateurs de $\mathrm{Gau}_c(d,2)$ sont notés $\mathscr{D}_x$ et $\mathscr{D}_y$ et sont respectivement égaux à

$$\mathscr{D}_x=\sum_{k=0}^{d-1}c_k\zeta^k\frac{1}{X}\sigma_1^k-c_0\sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{X-\zeta^kY}s_k,$$

et
$$\mathscr{D}_y = \sum_{k=0}^{d-1} c_k \zeta^k \frac{1}{Y}\sigma_2^k + c_0 \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\zeta^k}{X-\zeta^k Y} s_k.$$

Enfin, comme $\mathrm{Gau}_c(d,2) \subset \mathbb{C}(V)G(d,1,2)$, tout $\mathrm{Gau}_c(d,2)$-module simple apparaît dans une restriction à $\mathrm{Gau}_c(d,2)$ d'une représentation simple de l'algèbre $\mathbb{C}(V)G(d,1,2)$. On notera alors $\mathscr{L}_i$ (resp. $\mathscr{L}'_i$, resp. $\mathscr{L}_{i,j}$) la restriction à $\mathrm{Gau}_c(d,2)$ de $\mathbb{C}(V)\eta_i$ (resp. $\mathbb{C}(V)\eta'_i$, resp. $\mathbb{C}(V)\rho_{i,j}$).

Afin de calculer les $\mathrm{Gau}_c(d,2)$-modules ainsi définis, on récapitule dans le lemme suivant des identités de fractions rationnelles afin de simplifier certaines sommes qui apparaîtront.

Lemme 1.4.2. *Dans $\mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(X,Y)$, on a pour tout $1 \leq l \leq d$*

$$\sum_{k=0}^{d-1} \frac{\zeta^{kl}}{X-\zeta^k Y} = \frac{dX^{l-1}Y^{d-l}}{X^d - Y^d}. \tag{1.1}$$

Démonstration. Commençons par montrer que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \frac{\zeta^{kl}}{X-\zeta^k} = \frac{dX^{l-1}}{X^d-1},$$

en effectuant une décomposition en éléments simples. Puisque $X^d - 1 = \prod_{k=0}^{d-1}(X-\zeta^k)$, il existe des complexes $(a_k)_{0\leq k<d}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{X-\zeta^k} = \frac{dX^{l-1}}{X^d-1}.$$

Pour $0 \leq p < d$, si on multiplie l'égalité précédente par $X-\zeta^p$ et que l'on évalue en ζ^p, on obtient

$$a_p = \frac{d\zeta^{p(l-1)}}{\prod\limits_{\substack{0\leq k<d \\ k\neq p}} (\zeta^p - \zeta^k)} = \frac{d\zeta^{pl}}{\prod\limits_{1\leq k<d}(1-\zeta^k)} = \zeta^{pl}.$$

On obtient alors l'égalité (1.1) en remplaçant X par X/Y. □

Afin de simplifier les résultats, on va considérer d'autres générateurs de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ qui diffèrent de $\mathscr{D}_x$ et de $\mathscr{D}_y$ par multiplication par un élément de $\mathbb{C}(V)$:

$$\mathscr{D}'_x = \frac{X(X^d - Y^d)}{d}\mathscr{D}_x \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'_y = \frac{Y(X^d-Y^d)}{d}.$$

Lemme 1.4.3. *L'action des générateurs $\mathscr{D}'_x$ et $\mathscr{D}'_y$ de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ sur les restrictions des représentations simples de $\mathbb{C}(V)G(d,1,2)$ est donnée dans la table 1.1.*

Démonstration. Commençons par l'action de $\mathscr{D}'_x$ sur $\mathscr{L}_i$ pour $1 \leq i \leq d$. Elle est donnée par

$$\eta_i(\mathscr{D}'_x) = \frac{X(X^d-Y^d)}{d}\left(\sum_{r=1}^{d} \frac{c_t\zeta^{ri}}{X} - c_0 \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{X-\zeta^k Y}\right) = (X^d-Y^d)k_i^{\#} - c_0 X^d,$$

	$\mathscr{D}'_x$	$\mathscr{D}'_y$
$\mathscr{L}_i$, $1\leq i\leq d$	$(X^d-Y^d)k_i^\#-c_0X^d$	$(X^d-Y^d)k_i^\#+c_0Y^d$
$\mathscr{L}'_i$, $1\leq i\leq d$	$(X^d-Y^d)k_i^\#+c_0X^d$	$(X^d-Y^d)k_i^\#-c_0Y^d$
$\mathscr{L}_{i,j}$, $1\leq i<j\leq d$	$\begin{pmatrix}(X^d-Y^d)k_i^\# & -c_0X^{d-(j-i)}Y^{j-i}\\ -c_0X^{j-i}Y^{d-(j-i)} & (X^d-Y^d)k_j^\#\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}(X^d-Y^d)k_j^\# & c_0X^{d-(j-i)}Y^{j-i}\\ c_0X^{j-i}Y^{d-(j-i)} & (X^d-Y^d)k_i^\#\end{pmatrix}$

TABLE 1.1 – Action des générateurs de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$

la dernière égalité provenant de la définition de $k_i^\#$ et du lemme 1.4.2.

Pour l'action de $\mathscr{D}'_y$, on fait de même, tout comme pour calculer les actions de $\mathscr{D}'_x$ et $\mathscr{D}'_y$ sur la représentation $\mathscr{L}'_i$.

Soient maintenant $1\leq i<j\leq n$ et calculons l'action de $\mathscr{D}'_x$ sur $\mathscr{L}_{i,j}$:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)&=\frac{X^d-Y^d}{d}\sum_{r=1}^{d-1}c_r\begin{pmatrix}\zeta^{ri} & 0\\ 0 & \zeta^{rj}\end{pmatrix}-\frac{X(X^d-Y^d)}{d}c_0\sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{X-\zeta^kY}\begin{pmatrix}0 & \zeta^{k(d-(j-i))}\\ \zeta^{k(j-i)} & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(X^d-Y^d)k_i^\# & -c_0X^{d-(j-i)}Y^{j-i}\\ -c_0X^{j-i}Y^{d-(j-i)} & (X^d-Y^d)k_j^\#\end{pmatrix},\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la définition de $k_i^\#$ et $k_j^\#$ et le lemme 1.4.2. On fait alors de même pour $\mathscr{D}'_y$. □

Les représentations de dimension 2 ont alors un comportement très différent selon si c_0 s'annule ou pas.

1.4.1 Le cas $c_0=0$

Hypothèse. *On suppose ici que $c_0=0$.*

Comme toutes les matrices sont diagonales, il est immédiat que $\mathscr{L}_i\simeq\mathscr{L}'_i$ et que $\mathscr{L}_{i,j}\simeq\tilde{\mathscr{L}}_{i,j}\oplus\tilde{\mathscr{L}}_{j,i}$, où $\tilde{\mathscr{L}}_{i,j}$ est la représentation de dimension 1 sur laquelle $\mathscr{D}'_x$ agit par $(X^d-Y^d)k_i^\#$ et $\mathscr{D}'_y$ agit par $(X^d-Y^d)k_j^\#$. Remarquons alors que $\mathscr{L}_i$ n'est autre que $\tilde{\mathscr{L}}_{i,i}$.

De plus, on a un isomorphisme entre $\tilde{\mathscr{L}}_{i,j}$ et $\tilde{\mathscr{L}}_{p,q}$ si et seulement si $k_i^\#=k_p^\#$ et $k_j^\#=k_q^\#$. On définit alors une relation d'équivalence sur l'ensemble $\{1,\ldots,d\}$ par $i\sim j$ si et seulement si $k_i^\#=k_j^\#$. Les modules simples de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ sont alors paramétrés par les paires de classes d'équivalences de cette relation : si $\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}'$ sont deux classes d'équivalences, un représentant de la classe d'isomorphie correspondante est $\tilde{\mathscr{L}}_{i,j}$ avec $i\in\mathscr{O}$ et $j\in\mathscr{O}'$.

Proposition 1.4.4. *Pour $\mathscr{O}$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$, le caractère*

$$\gamma_{\mathscr{O},\mathscr{O}}=\sum_{i\in\mathscr{O}}(\chi_i+\chi'_i)+\sum_{\substack{i,j\in\mathscr{O}\\ i<j}}2\chi_{i,j}$$

est un caractère c-cellulaire.

Pour $\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}'$ deux classes d'équivalences distinctes pour la relation $\sim$, le caractère

$$\gamma_{\mathscr{O},\mathscr{O}'}=\sum_{\substack{i\in\mathscr{O},j\in\mathscr{O}'\\ i<j}}\chi_{i,j}+\sum_{\substack{i\in\mathscr{O},j\in\mathscr{O}'\\ i>j}}\chi_{j,i}$$

est un caractère c-cellulaire.

De plus, tous les caractères c-cellulaires sont égaux à un $\gamma_{\mathscr{O}}$ *ou à un* $\gamma_{\mathscr{O},\mathscr{O}'}$

Remarque 1.4.5. Toutes les représentations simples de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ sont absolument simples dans ce cas, l'algèbre est déployée.

1.4.2 Le cas $c_0 \neq 0$

Hypothèse. *On suppose ici que* $c_0 \neq 0$.

Les matrices donnant l'action de $\mathscr{D}'_x$ et $\mathscr{D}'_y$ sur la représentation $\mathscr{L}_{i,j}$ n'étant plus diagonales, les modules simples de $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ vont s'obtenir en trigonalisant ces matrices. On remarque que les matrices $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ et $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_y)$ ont même trace et même déterminant, donc leurs polynômes caractéristiques sont égaux. On n'étudie alors que la matrice donnant l'action de $\mathscr{D}'_x$,

$$\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x) = \begin{pmatrix} (X^d - Y^d)k_i^\# & -c_0 X^{d-(j-i)} Y^{j-i} \\ -c_0 X^{j-i} Y^{d-(j-i)} & (X^d - Y^d)k_j^\# \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\mathbf{t}^2 - (X^d - Y^d)(k_i^\# + k_j^\#)\mathbf{t} + (X^d - Y^d)^2 k_i^\# k_j^\# - c_0^2 X^d Y^d,$$

et est scindé dans $\mathbb{C}(V)$ si et seulement son discriminant

$$(X^d - Y^d)^2(k_i^\# + k_j^\#)^2 - 4k_i^\# k_j^\#(X^d - Y^d)^2 + 4c_0^2 X^d Y^d = \\ (k_i^\# - k_j^\#)^2 X^{2d} + 2(2c_0^2 - (k_i^\# - k_j^\#)^2) X^d Y^d + (k_i^\# - k_j^\#)^2 Y^{2d}$$

est un carré dans $\mathbb{C}(V)$, ce qui est équivalent à être un carré dans $\mathbb{C}[V]$. Ce polynôme homogène de degré 2 en X^d et Y^d est alors un carré si et seulement si $k_i^\# = k_j^\#$ et d est pair ou $c_0 = \pm(k_i^\# - k_j^\#)$ (rappelons que $c_0 \neq 0$).

Dans le cas où $k_i^\# = k_j^\#$ et d est pair, les deux valeurs propres de la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ sont

$$(X^d - Y^d)k_i^\# + c_0 X^{d/2} Y^{d/2} \quad \text{et} \quad (X^d - Y^d)k_i^\# - c_0 X^{d/2} Y^{d/2},$$

et puisque $c_0 \neq 0$, elles sont différentes. Par suite la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}(V)$ et des vecteurs propres associés aux deux valeurs propres ci-dessus sont

$$(X^{d/2-(j-i)}, -Y^{d/2-(j-i)}) \quad \text{et} \quad (X^{d/2-(j-i)}, Y^{d/2-(j-i)}).$$

Dans cette base, les matrices $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ et $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_y)$ sont diagonales et respectivement égales à

$$\mathrm{diag}((X^d - Y^d)k_i^\# + c_0 X^{d/2} Y^{d/2}, (X^d - Y^d)k_i^\# - c_0 X^{d/2} Y^{d/2})$$

et

$$\mathrm{diag}((X^d - Y^d)k_i^\# - c_0 X^{d/2} Y^{d/2}, (X^d - Y^d)k_i^\# + c_0 X^{d/2} Y^{d/2}).$$

Dans ce cas $\mathscr{L}_{i,j} \simeq \mathscr{L}^+_{i,j} \oplus \mathscr{L}^-_{i,j}$ avec $\mathscr{L}^+_{i,j} \not\simeq \mathscr{L}^-_{i,j}$ puisque $c_0 \neq 0$. Les deux représentations non isomorphes de dimension 1 ainsi obtenues ne sont pas la restriction d'une représentation de $\mathbb{C}(V)G(d,1,2)$ à l'algèbre de Gaudin.

Traitons le cas où $c_0 = k^\#_i - k^\#_j$. Les deux valeurs propres de la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ sont

$$k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d \quad \text{et} \quad k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d.$$

Puisque c_0 est non nul, $k^\#_i \neq k^\#_j$ et ces deux valeurs propres sont distinctes : la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}(V)$. Des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont

$$(X^{d-(j-i)}, -Y^{d-(j-i)}) \quad \text{et} \quad (Y^{j-i}, X^{j-i}).$$

Dans cette base, les matrices $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ et $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_y)$ sont diagonales et respectivement égales à

$$\operatorname{diag}(k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d, k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d)$$

et

$$\operatorname{diag}(k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d, k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d).$$

On obtient alors un isomorphisme $\mathscr{L}_{i,j} \simeq \mathscr{L}'_j \oplus \mathscr{L}_i$.

Enfin, le cas où $c_0 = k^\#_j - k^\#_i$ s'obtient de manière similaire. Les deux valeurs propres de la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ sont

$$k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d \quad \text{et} \quad k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d.$$

Puisque c_0 est non nul, $k^\#_i \neq k^\#_j$ et ces deux valeurs propres sont distinctes : la matrice $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}(V)$. Des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont

$$(X^{d-(j-i)}, Y^{d-(j-i)}) \quad \text{et} \quad (Y^{j-i}, -X^{j-i}).$$

Dans cette base, les matrices $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_x)$ et $\rho_{i,j}(\mathscr{D}'_y)$ sont diagonales et respectivement égales à

$$\operatorname{diag}(k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d, k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d)$$

et

$$\operatorname{diag}(k^\#_j X^d - k^\#_i Y^d, k^\#_i X^d - k^\#_j Y^d).$$

On obtient alors un isomorphisme $\mathscr{L}_{i,j} \simeq \mathscr{L}_j \oplus \mathscr{L}'_i$.

En ce qui concerne les isomorphismes entre les représentations obtenues comme restrictions, ils sont décrits comme suit :

- $\mathscr{L}_i \simeq \mathscr{L}_j$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_j$
- $\mathscr{L}'_i \simeq \mathscr{L}'_j$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_j$,
- si $c_0^2 \neq (k^\#_i - k^\#_j)^2$ et $c_0^2 \neq (k^\#_p - k^\#_q)^2$ alors $\mathscr{L}_{i,j} \simeq \mathscr{L}_{p,q}$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_p$ et $k^\#_j = k^\#_q$ ou $k^\#_i = k^\#_q$ et $k^\#_j = k^\#_p$,
- si d est pair, $k^\#_i = k^\#_j$ et $k^\#_p = k^\#_q$, $\mathscr{L}^+_{i,j} \simeq \mathscr{L}^+_{p,q}$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_p$, $\mathscr{L}^-_{i,j} \simeq \mathscr{L}^-_{p,q}$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_p$.

On définit à nouveau une relation d'équivalence sur $\{1,\dots,d\}$ par $i \sim j$ si et seulement si $k^\#_i = k^\#_j$. Deux classes d'équivalences $\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}'$ sont dites liées si $c_0^2 = (k^\#_i - k^\#_j)^2$ pour $i \in \mathscr{O}$ et $j \in \mathscr{O}'$.

Proposition 1.4.6. *Pour $\mathcal{O}$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$, le caractère*

$$\gamma_{\mathcal{O}} = \sum_{i\in\mathcal{O}} \Big(\chi_i + \sum_{\substack{j\in\mathcal{O}'\\ j<i}} \chi_{j,i} + \sum_{\substack{j\in\mathcal{O}'\\ j>i}} \chi_{i,j}\Big)$$

est un caractère c-cellulaire, où $\mathcal{O}'$ est une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ telle que $k_i^\# - k_j^\# = c_0$ pour tout $i\in\mathcal{O}$ et $j\in\mathcal{O}'$ (la seconde somme étant vide si une telle classe n'existe pas).

Pour $\mathcal{O}$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$, le caractère

$$\gamma'_{\mathcal{O}} = \sum_{i\in\mathcal{O}} \Big(\chi'_i + \sum_{\substack{j\in\mathcal{O}'\\ j<i}} \chi_{j,i} + \sum_{\substack{j\in\mathcal{O}'\\ j>i}} \chi_{i,j}\Big)$$

est un caractère c-cellulaire, où $\mathcal{O}'$ est une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ telle que $k_j^\# - k_i^\# = c_0$ pour tout $i\in\mathcal{O}$ et $j\in\mathcal{O}'$ (la seconde somme étant vide si une telle classe n'existe pas).

Pour $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux classes d'équivalence pour la relation $\sim$ non liées, le caractère

$$\gamma_{\mathcal{O},\mathcal{O}'} = \sum_{\substack{i\in\mathcal{O},j\in\mathcal{O}'\\ i<j}} \chi_{i,j} + \sum_{\substack{i\in\mathcal{O},j\in\mathcal{O}'\\ i>j}} \chi_{j,i}$$

est un caractère c-cellulaire.

Pour $\mathcal{O}$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ de cardinal supérieur ou égal à deux, le caractère

$$\gamma_{\mathcal{O},\mathcal{O}} = \sum_{\substack{i,j\in\mathcal{O}\\ i<j}} \chi_{i,j}$$

est un caractère c-cellulaire.

De plus, tous les caractères c-cellulaires sont égaux à un $\gamma_{\mathcal{O}}$, à un $\gamma'_{\mathcal{O}}$, à un $\gamma_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}$ ou à un $\gamma_{\mathcal{O},\mathcal{O}}$.

Remarque 1.4.7. Dans le cas où $c_0 \neq 0$, l'algèbre $\mathbb{C}(V)\mathrm{Gau}_c(d,2)$ n'est pas nécessairement déployée : il peut exister des représentations irréductibles de dimension 2 bien que l'algèbre soit commutative.

1.4.3 Comparaison avec les caractères constructibles

Hypothèses. *Dans cette partie, on suppose que $c_0 \neq 0$ et que pour tout $1 \le i \le d$, $k_i^\#$ est un multiple entier de c_0. On suppose de plus que :*

$$\frac{k_1^\#}{c_0} \le \frac{k_2^\#}{c_0} \le \cdots \le \frac{k_d^\#}{c_0}.$$

Posons alors $\mathbf{r} = -c_0^{-1}(k_1^\#, k_2^\#, \ldots, k_d^\#)$ le d-uplet décroissant d'entiers ainsi obtenu.

Le but est de maintenant relier les caractères c-cellulaires obtenus à la proposition 1.4.6 aux caractères constructibles associés au paramètre $\mathbf{r}$ de la définition 1.3.2, en utilisant la bijection déjà décrite entre d-symboles de hauteur 2 et d-partitions de 2.

Proposition 1.4.8. *L'ensemble des caractères c-cellulaires est égal à l'ensemble des caractères constructibles associés au paramètre* $\mathbf{r}$.

Démonstration. On reprend les notations de la partie 1.3.4, notamment la suite d'entiers $(i_j)_{-1\le j\le p+1}$ et les notations pour les symboles. L'orbite pour la relation $\sim$ contenant i est $\{1 \le j \le d \mid r_{j-1} = r_{i-1}\}$. Ce sont alors exactement les ensembles $\mathcal{O}_j = \{i_{j-1}+2, i_j+3, \dots, i_j+1\}$ pour $0 \le j \le p$, et $k^\#$ prend la valeur $k^\#_{i_j+1} = -c_0^{-1} r_{i_j-1}$ sur cette orbite. Les orbites $\mathcal{O}_j$ et $\mathcal{O}_l$ sont alors liées si et seulement si $(k^\#_{i_j+1} - k^\#_{i_l+1})^2 = c_0^2$ ce qui est équivalent à $|i-j| = 1$ et $(r_{i_j} - r_{i_l})^2 = 1$.

Supposons que $\Sigma = S_{i_k}$. Le caractère constructible associé à Σ est

$$\gamma_\Sigma = \begin{cases} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \left(\chi_{S_i} + \sum_{j=i_{k-2}}^{i_{k-1}} \chi_{S_{i,j}}\right) & \text{si } r_{i_{k-1}} = r_{i_k}+1, \\ \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \chi_{S_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $r_{i_{k-1}} \neq r_{i_k}+1$, on retrouve le caractère c-cellulaire $\gamma_{\mathcal{O}_k}$ puisque la représentation correspondant au symbole S_i est la représentation χ_{i+1}. Si $r_{i_{k-1}} = r_{i_k}+1$ ceci signifie que les orbites $\mathcal{O}_{k-1}$ et $\mathcal{O}_k$ sont liées et que $k^\#_{i_k+1} - k^\#_{i_{k-1}+1} = c_0$. Le caractère γ_Σ est alors aussi le caractère c-cellulaire $\gamma_{\mathcal{O}_k}$.

Supposons que $\Sigma = S_{i_k,i_l}$. Le caractère constructible associé à Σ est

$$\gamma_\Sigma = \begin{cases} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \left(\chi_{S'_i} + \sum_{j=i_{l-1}}^{i_l} \chi_{S_{i,j}}\right) & \text{si } r_{i_k} = r_{i_l}+1, \\ \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \chi_{S'_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $r_{i_k} = r_{i_l}+1$ alors $l = k+1$ et ceci signifie que les orbites $\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{O}_{k+1}$ sont liées et que $k^\#_{1+i_{k+1}} - k^\#_{1+i_k} = c_0$. Le caractère γ_Σ est alors égal au caractère c-cellulaire $\gamma'_{\mathcal{O}_k}$. Si $r_{i_k} \neq r_{i_l}+1$ le caractère constructible γ_Σ est égal caractère c-cellulaire $\gamma_{\mathcal{O}_k,\mathcal{O}_l}$.

Supposons que $\Sigma = S_{i_k-1,i_k}$ avec $i_k - i_{k-1} \ge 2$. L'orbite $\mathcal{O}_k$ est alors de cardinal supérieur ou égal à 2. Le caractère constructible associé à Σ est

$$\gamma_\Sigma = \sum_{i_{k-1}+1 \le i < j \le i_k} \chi_{S_{i,j}},$$

et est égal au caractère c-cellulaire $\gamma_{\mathcal{O}_k,\mathcal{O}_k}$.

Enfin, supposons que $\Sigma = S'_{i_k}$ avec $r_k - r_{k+1} \ge 2$, ce qui signifie que les orbites $\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{O}_{k+1}$ ne sont pas liées puisqu'alors $|k^\#_{1+i_k} - k^\#_{1+i_{k+1}}| \ge 2|c_0|$. Le caractère constructible associé à Σ est

$$\gamma_\Sigma = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} \chi_{S'_i},$$

et est égal au caractère c-cellulaire $\gamma'_{\mathcal{O}_k}$.

Tous les caractères constructibles sont des caractères c-cellulaires. Réciproquement, il est clair que tous les caractères c-cellulaires apparaissent comme caractère constructible. □

On propose la conjecture suivante en ce qui concerne les caractères c-cellulaires de $G(d,1,n)$, corroborrée par le résultat précédent et par des calculs effectués informatiquement en rang supérieur.

Conjecture 1.4.9. *Soit* $c : \mathrm{Réf}(G(d,1,n)) \to \mathbb{C}$ *invariante par conjugaison. On note toujours* $c_0 = c_{s_1}$ *et* $k_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d-1} \zeta^{j(1-i)} c_{s_0^j}$*, et on suppose que pour tout* $1 \le i \le d$*,* $k_i^\#$ *est un multiple entier de* c_0 *et que*

$$\frac{k_1^\#}{c_0} \le \frac{k_2^\#}{c_0} \le \cdots \le \frac{k_d^\#}{c_0}.$$

Soit $\mathbf{r} = -c_0^{-1}(k_1^\#, k_2^\#, \ldots, k_d^\#)$ *le* d*-uplet décroissant d'entiers ainsi obtenu.*

Alors l'ensemble des caractères c*-cellulaires coïncide avec l'ensemble des caractères* $\mathbf{r}$*-constructibles.*

Chapitre 2

Données modulaires associées aux groupes de réflexions complexes

La notion de donnée $\mathbb{N}$-modulaire se retrouve chez Lusztig, lors de l'étude des caractères unipotents des groupes réductifs sur des corps finis. Dans [Lu94], il en donne une définition en terme de représentation du groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$, et la définition que l'on considérera sera moins stricte : certains coefficients entiers positifs pourront être négatifs. On préférera travailler avec une version faisant apparaître des représentations de $SL_2(\mathbb{Z})$, comme dans [Ga05].

Une grande source de données $\mathbb{Z}$-modulaires provient d'une généralisation de la théorie de Lusztig à certains groupes de réflexions complexes. Une grande partie de la combinatoire des groupes de Weyl et de la théorie des représentations d'un groupe réductif sur un corps fini associé se prolongent à certains groupes de réflexions complexes et on dispose de données $\mathbb{Z}$-modulaires. Les catégories modulaires fournissent également des données $\mathbb{N}$-modulaires : ce sont ces catégories abéliennes et monoïdales, munies de tressage et d'une notion de dualité vérifiant encore quelques conditions supplémentaires [EGNO15, Definition 8.13.4]. On reviendra sur cette notion dans le chapitre 3.

On commence par donner la définition d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire, ainsi que celle de l'algèbre de fusion associée. On considère ensuite la combinatoire des "caractères unipotents" du groupe de réflexions complexes imprimitif $G(d,1,n)$, en insistant sur les données $\mathbb{Z}$-modulaires qui y sont attachées. Enfin, on termine en donnant des exemples liés aux groupes de réflexions complexes exceptionnels. Le cas des groupes de la forme $G(d,d,n)$ n'est pas traité, excepté l'exemple des groupes diédraux dans le chapitre 5.

2.1 Données $\mathbb{Z}$-modulaires

2.1.1 Donnée modulaire et algèbre de fusion associée

Commençons par donner la définition d'une donnée modulaire. On trouvera des définitions similaires dans [Lu94] ou dans [Ga05].

Définition 2.1.1. Une donnée $\mathbb{N}$-*modulaire* (resp. $\mathbb{Z}$-*modulaire*) est un quadruplet (I,S,T,i_0) où I est un ensemble fini I, $S \in \mathcal{M}_I(\mathbb{C})$ est une matrice carrée, $T \in \mathcal{M}_I(\mathbb{C})$ est une matrice diagonale et $i_0 \in I$ est un élément dit *spécial* tels que

1. S est symétrique et unitaire,
2. pour tout $i \in I$, le coefficient $S_{i_0,i}$ est non nul,
3. S et T définissent une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $S^4 = \mathrm{id}$, S^2 et T commutent et il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $(ST)^3 = \gamma S^2$,
4. pour tous $i, j, k \in I$,
$$N_{i,j}^k = \sum_{l \in I} \frac{S_{l,i} S_{l,j} \bar{S}_{l,k}}{S_{l,i_0}} \in \mathbb{N} \text{ (resp. } \in \mathbb{Z}).$$

Les entiers $N_{i,j}^k$ sont appelés les *constantes de structure* associées à la donnée modulaire.

Comparativement à la définition [Lu94, 1.1] de Lusztig, on ne demande pas l'existence d'involutions compatibles à la conjugaison complexe. Notre définition se rapproche plus de celle de [Ga05, Definition 1], sauf que l'on n'impose pas la positivité des coefficients de la ligne spéciale.

Lemme 2.1.2. *Soit (I, S, T, i_0) une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire. Alors $(ST^{-1})^3 = \gamma^{-1}\,\mathrm{id}$.*

Réciproquement, si (I, S, T, i_0) est un quadruplet satisfaisant tous les axiomes d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire, sauf $(ST)^3 = \gamma S^2$ que l'on remplace par $(ST^{-1})^3 = \gamma\,\mathrm{id}$ alors (I, S, T, i_0) est une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Démonstration. En prenant l'inverse le la relation $(ST)^3 = \gamma S^2$, on obtient $(T^{-1}S^3)^3 = \gamma^{-1}S^2$ puisque $S^4 = \mathrm{id}$. Il reste à simplifier à droite par S^2 et à utiliser le fait que S^2 et T commutent pour conclure. La seconde partie se fait de même. □

L'intégralité des constantes de structure permet alors de définir l'anneau de fusion associé à une donnée modulaire.

Définition 2.1.3. Soit (I, S, T, i_0) une donnée modulaire. L'*anneau de fusion associé A_S* est l'anneau unitaire associatif libre comme $\mathbb{Z}$-module, disposant d'une base $B = (b_i)_{i \in I}$ telle que la multiplication des éléments de la base vérifie
$$b_i \cdot b_j = \sum_{k \in I} N_{i,j}^k b_k$$
pour tous $i, j \in I$.

Remarque 2.1.4. Pour définir un tel anneau, on a seulement besoin d'une matrice S unitaire avec une ligne spéciale non nulle. Dans le chapitre 5, on considérera de tels anneaux.

L'élément neutre est alors b_{i_0} puisque $N_{i_0,j}^k = 1 = N_{j,i_0}^k$ pour tous $j, k \in I$. L'associativité découle de l'unitarité de S : il suffit de montrer pour tous $i, j, k, m \in I$ l'égalité
$$\sum_{l \in I} N_{i,j}^l N_{l,k}^m = \sum_{l \in I} N_{i,l}^m N_{j,k}^l,$$
et ces expressions sont toutes deux égales à
$$\sum_{p \in I} \frac{S_{p,i} S_{p,j} S_{p,k} \bar{S}_{p,m}}{(S_{p,i_0})^2}.$$

La matrice S contient de nombreuses informations sur l'anneau A_S, comme en atteste le lemme suivant.

Lemme 2.1.5. *Soit (I, S, T, i_0) une donnée modulaire et A_S l'anneau de fusion associé. Pour tout $i \in I$ le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $s_i\colon A_S \to \mathbb{C}$ défini sur la base par $b_j \mapsto \frac{S_{i,j}}{S_{i,i_0}}$ est un morphisme d'anneaux.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $S_{i,j}S_{i,k} = \sum_{l\in I} N_{j,k}^{l} S_{i,i_0} S_{i,l}$ pour tous $j, k \in I$, ce qui découle de l'unitarité de S et de la définition des constantes de structure :

$$\sum_{l\in I} N_{j,k}^{l} S_{i,i_0} S_{i,l} = \sum_{l,m\in I} \frac{S_{m,j}S_{m,k}\bar{S}_{m,l}}{S_{m,i_0}} S_{i,i_0} S_{i,l} = \sum_{m\in I} \frac{S_{m,j}S_{m,k}}{S_{m,i_0}} S_{i,i_0}\delta_{m,i} = S_{i,j}S_{i,k}.$$

□

2.1.2 Modification d'une donnée modulaire

On sera amené, par la suite, à modifier des données modulaires en conjuguant les matrices S et T par une matrice diagonale à coefficients dans ± 1. Une donnée $\mathbb{N}$-modulaire peut ne pas rester $\mathbb{N}$-modulaire après un tel changement, mais reste quand même toujours une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Remarque 2.1.6. Il existe néanmoins des données $\mathbb{Z}$-modulaires qui ne peuvent pas être rendues $\mathbb{N}$-modulaires par une transformation de ce type [Cu07, Example 5].

Au niveau de l'algèbre de fusion, cette modification revient à changer des signes de la base. En effet, si S et S' sont reliées par $S' = DSD^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}((d_i)_{i\in I})$ avec $d_i \in \{\pm 1\}$, les constantes de structure $N_{i,j}^{k}$ de A_S et les constantes de structures $(N')_{i,j}^{k}$ de $A_{S'}$ vérifient

$$(N')_{i,j}^{k} = d_i d_j d_k d_{i_0} N_{i,j}^{k},$$

pour tous $i, j, k \in I$. Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $A_{S'} \to A_S$ défini par $b_i' \mapsto d_i d_{i_0} b_i$ est alors un isomorphisme d'anneaux.

Remarque 2.1.7. Lorsque l'on dispose d'une modification d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire (I, S, T, i_0) qui est une donnée $\mathbb{N}$-modulaire, il existe alors une base $(b_i')_{i\in I}$ de A_S obtenue par des changements de signes de la base $(b_i)_{i\in I}$ telle que les constantes de structures de l'anneau A_S relativement à la nouvelle base $(b_i')_{i\in I}$ soient entières positives.

On peut également multiplier la matrice S d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire par une racine quatrième de l'unité sans changer l'algèbre du fusion associée. Une autre manière de modifier une donnée modulaire est de changer l'élément spécial i_0 par j_0 vérifiant lui aussi $S_{j_0,i} \neq 0$ pour tout $i \in I$. Une donnée modulaire (I, S, T, i_0) étant fixée, on se demande si (I, S, T, j_0) est également une donnée modulaire. Pour spécifier le choix de la ligne spéciale dans les constantes de structure, on note ${}_{i_0}N_{i,j}^{k}$ les constantes de structures calculées avec l'élément spécial i_0.

Lemme 2.1.8. *Soit (I, S, T, i_0) une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire et j_0 tel que $S_{j_0,i} \neq 0$ pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$ on définit la matrice ${}_{i_0}N_i$ par $({}_{i_0}N_i)_{j,k} = {}_{i_0}N_{i,k}^{j}$ et de même pour ${}_{j_0}N_i$ en remplaçant i_0 par j_0. On a alors, pour tout $i \in I$*

$${}_{j_0}N_i = {}_{j_0}N_{i_0}\, {}_{i_0}N_i.$$

Démonstration. Il s'agit à nouveau d'un simple manipulation algébrique utilisant les hypothèses sur S. D'après le lemme 2.1.5, on a, pour $j,k \in I$

$$ {}_{j_0}N_{i,j}^k = \sum_{l\in I} \frac{S_{l,i}S_{l,j}\bar{S}_{l,k}}{S_{l,j_0}} = \sum_{l,m\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^m \frac{S_{l,i_0}S_{l,m}\bar{S}_{l,k}}{S_{l,j_0}} = \sum_{m\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^m \, {}_{j_0}N_{i_0,m}^k, $$

ce qui est bien la relation attendue. □

En changeant d'élément spécial, on n'obtient donc pas nécessairement une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire. En supposant que (I,S,T,i_0) soit une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire, le quadruplet (I,S,T,j_0) est une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire si et seulement si la matrice carrée ${}_{j_0}N_{i_0}$ appartient à $\mathscr{M}_I(\mathbb{Z})$, ce qui est équivalent à demander à ce que la matrice ${}_{i_0}N_{j_0}$ appartienne à $GL_I(\mathbb{Z})$. Cette dernière est néanmoins toujours dans $GL_I(\mathbb{Q})$, puisque ${}_{j_0}N_{i_0}\,{}_{i_0}N_{j_0} = \mathrm{id} = {}_{i_0}N_{j_0}\,{}_{j_0}N_{i_0}$.

Proposition 2.1.9. *Soient (I,S,T,i_0) une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire et $j_0 \in I$ tel que $S_{j_0,i} \neq 0$ pour tout $i \in I$. On note ${}_{i_0}A_S$ l'algèbre de fusion associée à la donnée (I,S,T,i_0), dont on note la base associée par $({}_{i_0}b_i)_{i\in I}$. On définit ${}_{j_0}A_S^{\mathbb{Q}}$ comme la $\mathbb{Q}$-algèbre de base $({}_{j_0}b_i)_{i\in I}$ et de multiplication donnée sur la base par les constantes de structures associées au quadruplet (I,S,T,j_0).*

L'élément ${}_{j_0}b_{i_0}$ est inversible dans ${}_{j_0}A_S^{\mathbb{Q}}$, son inverse appartient au $\mathbb{Z}$-module engendré par la base $({}_{j_0}b_i)_{i\in I}$ et on a un isomorphisme d'algèbres ${}_{i_0}A_S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to {}_{j_0}A_S^{\mathbb{Q}}$ donné par ${}_{i_0}b_i \mapsto {}_{j_0}b_{i_0}^{-1}\,{}_{j_0}b_i$.

Démonstration. Le lemme 2.1.8 implique que l'élément $\sum_{i\in I} {}_{i_0}N_{j_0,j_0}^i \, {}_{j_0}b_i$ est l'inverse de ${}_{j_0}b_{i_0}$. En effet,

$$ \sum_{i\in I} {}_{i_0}N_{j_0,j_0}^i \, {}_{j_0}b_i \, {}_{j_0}b_{i_0} = \sum_{k\in I}\left(\sum_{i\in I} {}_{i_0}N_{j_0,j_0}^i \, {}_{j_0}N_{i_0,i}^k\right) {}_{j_0}b_k = \sum_{k\in I} {}_{j_0}N_{j_0,j_0}^k \, {}_{j_0}b_k = {}_{j_0}b_{j_0}. $$

En ce qui concerne l'isomorphisme d'anneaux, il suffit de montrer que pour tous $i,j \in I$,

$$ \sum_{k\in I} {}_{j_0}N_{i,j}^k \, {}_{j_0}b_k = \sum_{k\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^k \, {}_{j_0}b_{i_0} \, {}_{j_0}b_k, $$

ce qui est à nouveau une conséquence du lemme 2.1.8 :

$$ \sum_{k\in I} {}_{j_0}N_{i,j}^k \, {}_{j_0}b_k = \sum_{k,l\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^l \, {}_{j_0}N_{i_0,l}^k \, {}_{j_0}b_k = \sum_{l\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^l \left(\sum_{k\in I} {}_{j_0}N_{i_0,l}^k \, {}_{j_0}b_k\right) = \sum_{l\in I} {}_{i_0}N_{i,j}^l \, {}_{j_0}b_{i_0} \, {}_{j_0}b_l. $$

□

2.1.3 Produit tensoriel de données modulaires

Si on se donne deux données $\mathbb{Z}$-modulaires (I_1,S_1,T_1,i_1) et (I_2,S_2,T_2,i_2), on en définit une troisième (I,S,T,i_0) où $I = I_1 \times I_2$, les matrices S et T sont obtenues comme produit de Kronecker $S = S_1 \otimes S_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$ et l'élément spécial i_0 est le couple (i_1,i_2).

Lemme 2.1.10. *Le quadruplet (I,S,T,i_0) défini ci-dessus est une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire et son algèbre de fusion A_S est isomorphe au produit tensoriel $A_{S_1} \otimes_{\mathbb{Z}} A_{S_2}$ des algèbres de fusion des données $\mathbb{Z}$-modulaires (I_1,S_1,T_1,i_1) et (I_2,S_2,T_2,i_2).*

Démonstration. Le fait que (S,T) définissent une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$ découle directement de la définition du produit de Kronecker. Il ne reste qu'à montrer l'intégralité des constantes de structures.

Il découle directement de la définition des constantes de structure de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire (I,S,T,i_0) que pour tous $(j_1,j_2),(k_1,k_2),(l_1,l_2)\in I$,

$$N_{(j_1,j_2),(k_1,k_2)}^{(l_1,l_2)} = \sum_{(m_1,m_2)\in I_1\times I_2} \frac{S_{m_1,j_1}S_{m_1,k_1}\bar{S}_{m_1,l_1}}{S_{m_1,i_1}} \frac{S_{m_2,j_2}S_{m_2,k_2}\bar{S}_{m_2,l_2}}{S_{m_2,i_2}} = (N_1)_{j_1,k_1}^{l_1}(N_2)_{j_2,k_2}^{l_2},$$

où N_n désigne les constantes de structure de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire (I_n,S_n,T_n,i_n) pour $n\in\{1,2\}$.

L'isomorphisme d'algèbres $A_{S_1}\otimes_{\mathbb{Z}} A_{S_2}\to A_S$ est alors donné sur la base par $b_{j_1}\otimes b_{j_2}\mapsto b_{(j_1,j_2)}$. □

Cette construction sera utilisée dans le chapitre 6 pour décomposer certaines données $\mathbb{Z}$-modulaires associées aux groupes de réflexions complexes exceptionnels en produit tensoriel de deux données $\mathbb{Z}$-modulaires plus petites.

2.2 Données modulaires associées au groupe $G(d,1,n)$

On récapitule les notations de l'article [Ma95], ainsi que les différentes remarques de Cuntz sur les algèbres de fusion associées. On fixe un entier $d\geq 1$ ainsi qu'une racine primitive d-ième de l'unité ζ dans $\mathbb{C}$. Les notions de d-symboles utilisées dans ce chapitre diffèrent légèrement de celles introduites au chapitre 1.

2.2.1 d-symboles

Un *d-symbole* est une suite ordonnée $\mathcal{S}=(S_0,\dots,S_{d-1})$ de d suites strictement croissantes d'entiers positifs $S_i=(S_{1,i},\dots,S_{m_i,i})$ que l'on présente généralement sous la forme

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix} S_{0,1} & \cdots & S_{0,m_0}\\ S_{1,1} & \cdots & S_{1,m_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ S_{d-1,1} & \cdots & S_{d-1,m_{d-1}}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Les suites S_i sont appelées *lignes* du d-symbole et on note $|S_i|$ la longueur de la ligne S_i. Définissons le *symbole conjugué* de $\mathcal{S}$ par $\bar{\mathcal{S}}=(S_0,S_{d-1},\dots,S_1)$. La *taille* d'un symbole est $\mathrm{t}(\mathcal{S})=\sum_{i=0}^{d-1}|S_i|$, son *rang* est

$$\mathrm{rg}(\mathcal{S})=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=1}^{|S_i|}S_{i,j}-\frac{(\mathrm{t}(\mathcal{S})-1)(\mathrm{t}(\mathcal{S})-d+1)}{2d}, \tag{2.2}$$

et son *contenu* est le multiensemble de ses entrées.

Si $\mathcal{S}$ est un d-symbole avec $kd+l$ entrées, $0\leq l<d$, le rang de $\mathcal{S}$ vérifie

$$\mathrm{rg}(\mathcal{S})\geq\frac{(l-1)(d-l-1)}{2d},$$

et en particulier est toujours positif. Le rang ne dépend que du contenu du symbole, et est indépendant de la position des éléments du contenu dans les différentes lignes du symbole.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des d-symboles par la clôture transitive et symétrique de deux opérations élémentaires : la permutation cyclique des lignes d'un symbole et l'insertion simultanée d'un 0 en première position $(S_{i,1},\dots,S_{i,m_i})\mapsto(0,S_{i,1}+1,\dots,S_{i,m_i}+1)$. La taille modulo d est invariante par ces opérations, ainsi que le rang.

Si $\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_{d-1})$ est une d-partition de n, avec $\lambda_i=(\lambda_{i,1}\leq\lambda_{i,2}\leq\cdots\leq\lambda_{i,m_i})$, on lui associe un symbole $\mathscr{S}_\lambda$. Pour cela, on suppose, quitte à ajouter des 0, que $m_0-1=m_1=m_2=\ldots=m_{d-1}$ et on pose $S_i=(\lambda_{i,j}+j-1)_{1\leq j\leq m_i}$. Le rang de $\mathscr{S}_\lambda$ est alors n. Un tel symbole sera dit *principal*. Les d-symboles principaux de rang n sont en bijection avec les représentations complexes de $G(d,1,n)$ et la représentation associée au symbole principal $\bar{\mathscr{S}}$ est la conjuguée de la représentation associée au symbole $\mathscr{S}$.

Il existe une notion de symbole *spécial* pour les symboles principaux [Ma95, Bemerkung 2.24] : un symbole principal

$$\mathscr{S}=\begin{pmatrix} S_{d,1} & \cdots & S_{d,m} & S_{d,m+1}\\ S_{1,1} & \cdots & S_{1,m} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ S_{d-1,1} & \cdots & S_{d-1,m} & \end{pmatrix}$$

est spécial si $S_{i,j}\leq S_{k,l}$ pour $j\leq l$ ou $j=l$ et $i>k$. Un symbole principal est dit *cospécial* si son symbole conjugué est spécial.

2.2.2 Caractères unipotents pour $G(d,1,n)$ et familles

Les symboles qui vont nous intéresser à présent sont ceux de taille congrue à 1 modulo d. Pour un tel symbole, on définit son défaut par

$$\operatorname{def}(\mathscr{S})=\frac{(d-1)(\mathrm{t}(\mathscr{S})-1)}{2}-\sum_{i=0}^{d-1}i|S_i| \mod d \tag{2.3}$$

Un d-symbole de taille congrue à 1 modulo d est dit *réduit* si son défaut est nul et toutes les lignes ne commencent pas par 0. Cette notion de symbole réduit permet de choisir un représentant pour la relation d'équivalence sur les symboles, le défaut changeant de 1 par permutation cyclique des lignes. Remarquons alors que le rang d'un symbole réduit de taille $md+1$ est supérieur ou égal à m.

Définition 2.2.1. L'ensemble des *caractères unipotents* $\mathrm{Uch}(G(d,1,n))$ de $G(d,1,n)$ est l'ensemble des d-symboles réduits de rang n et de taille congrue à 1 modulo d.

Exemple 2.2.2. Le groupe cyclique $G(d,1,1)$ admet $1+\frac{d(d-1)}{2}$ caractères unipotents : il existe un symbole de taille 1 et $\frac{d(d-1)}{2}$ de taille $d+1$.

De cette définition combinatoire, Malle définit une fonction degré $\mathrm{Uch}(G(d,1,n))\to\mathbb{Z}[q]$, $\mathscr{S}\to\gamma_{\mathscr{S}}$ [Ma95, 3.9], une théorie de Harish-Chandra [Ma95, Satz 3.14], une d-alité d'Ennola [Ma95, Folgerung 3.11], des caractères fantômes $R_{\mathscr{S}}$, des familles de caractères, une transformée de Fourier ainsi que des valeurs propres du Frobenius.

Commençons par décrire les familles, avant de s'attarder sur la transformée de Fourier et les valeurs propres du Frobenius. Deux symboles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont dans la même famille si leurs contenus sont égaux. Décrivons ces familles d'une autre manière, suivant toujours [Ma95, Abschnitt 4].

Soit Y un ensemble totalement ordonné avec $md+1$ éléments, $m \in \mathbb{N}$, ainsi qu'une application $\pi\colon Y \to \mathbb{N}$. On considère l'ensemble $\Psi(Y,\pi)$ des fonctions $f\colon Y \to \{0,1,\dots,d-1\}$ telle que f est strictement croissante sur chaque $\pi^{-1}(i)$, $i \in \mathbb{N}$. On suppose que cet ensemble est non vide, ce qui est équivaut à demander à ce que $|\pi^{-1}(i)| \le d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.2.3. Cet ensemble est plus restrictif que l'ensemble Ψ défini par Cuntz [Cu07, Section 3.1]. On a en fait déjà choisi un représentant de chaque classe d'équivalence pour la relation $\sim_\pi$ de fonctions π-admissibles.

Le lien entre d-symboles à valeurs dans $\pi(Y)$ et éléments de $\Psi(Y,\pi)$ se fait comme tel : à une fonction f, on associe le symbole $\mathscr{S}^f = (S_0,\dots,S_{d-1})$ où, pour tout $0 \le i \le d-1$, S_i est l'ensemble $\pi(f^{-1}(i))$ que l'on a ordonné. On remarque que, pour tout $1 \le i \le d$, l'application π est injective sur $f^{-1}(i)$ puisque f est croissante sur chaque $\pi^{-1}(j)$ et donc que S_i est bien une suite strictement croissante. Le symbole $\mathscr{S}^f$ comporte alors $|Y| = md+1$ entrées.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, notons n_j le cardinal de $\pi^{-1}(j)$. Pour tout symbole $\mathscr{S}$ avec n_j entrées j, il existe alors une unique fonction $f \in \Psi(Y,\pi)$ telle que $\mathscr{S} = \mathscr{S}^f$.

Le rang d'un symbole $\mathscr{S}$ avec entrées dans $\pi(Y)$ peut alors s'exprimer seulement en fonction de π

$$\operatorname{rg}(\mathscr{S}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} i|\pi^{-1}(i)| - m\left(\frac{d(d-1)}{2}+1\right),$$

et le défaut du symbole $\mathscr{S}_f$ associé à $f \in \Psi(Y,\pi)$ est donné par

$$\operatorname{def}(\mathscr{S}_f) = m\binom{d}{2} - \sum_{y\in Y} f(y).$$

Les caractères unipotents étant donnés par des symboles réduits, on va considérer le sous-ensemble

$$\Psi^\#(Y,\pi) = \left\{ f \in \Psi(Y,\pi) \;\middle|\; \sum_{y\in Y} f(y) \equiv m\binom{d}{2} \right\}$$

de $\Psi(Y,\pi)$. Un symbole de taille congrue à 1 modulo d est réduit s'il est de défaut nul et si tous les $S_{i,1}$ ne sont pas nuls. Cette seconde condition se traduit par $|\pi^{-1}(0)| \ne d$.

Pour $f \in \Psi^\#(Y,\pi)$, on définit une fonction $\bar{f} \in \Psi^\#(Y,\pi)$ comme l'unique fonction telle que $\bar{f}_{|\pi^{-1}(i)} = \{d - f(y) \mid y \in \pi^{-1}(i)\}$. Cette involution correspond à celle définie sur les symboles : $\overline{\mathscr{S}^f} = \mathscr{S}^{\bar{f}}$ pour tout $f \in \Psi^\#(Y,\pi)$.

Les symboles principaux sont également facilement déterminés au niveau des fonctions de $\Psi^\#(Y,\pi)$: le symbole $\mathscr{S}^f$ est principal si et seulement si pour tout $0 \le i < d$ on a $|f^{-1}(i)| = m + \delta_{0,i}$. On note $\Psi^\#(Y,\pi)_0$ le sous-ensemble de telles fonctions.

Si on se donne $\mathscr{F}$ une famille de caractères unipotents de $G(d,1,n)$, la taille de tous les symboles de $\mathscr{F}$ est égale à $md+1$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Choisissons alors un ensemble Y totalement ordonné de cardinal $md+1$ et une fonction $\pi\colon Y \to \mathbb{N}$ telle que pour tout symbole $\mathscr{S}$ de $\mathscr{F}$, on a

$$|\pi^{-1}(i)| = \left|\left\{ j \in \{0,\dots,d-1\} \;\middle|\; i \in S_j \right\}\right|.$$

La famille $\mathscr{F}$ est alors en bijection avec $\Psi^{\#}(Y,\pi)$ et, en notant $n_i = |\pi^{-1}(i)|$, est de cardinal

$$\frac{1}{d}\prod_{i\in\mathbb{N}}\binom{d}{n_i}.$$

Exemple 2.2.4. Le groupe cyclique $G(3,1,1)$ a 4 caractères unipotents qui se répartissent en deux familles. La première famille ne contient que le symbole principal associé à la représentation triviale. L'autre famille est de taille trois et contient les 3-symboles

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \\ 1 & \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} - & \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux premiers sont des symboles principaux, le premier est le symbole spécial tandis que le deuxième est le cospécial.

En ce qui concerne les symboles spéciaux et cospéciaux, il existe un unique symbole spécial dans chaque famille et un unique cospécial [Ma95, Bemerkung 2.24].

2.2.3 Puissances extérieures, matrices de Fourier et valeurs propres du Frobenius

Notons $V = \oplus_{i=0}^{d-1}\mathbb{C}v_i$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d de base $(v_i)_{0\le i<d}$ et considérons $\mathscr{S}$ la matrice carrée $(\zeta^{ij})_{0\le i,j<d}$ que l'on voit comme un automorphisme de V.

Fixons $\mathscr{F}$ une famille de caractères unipotents de $G(d,1,n)$ que l'on voit comme un ensemble $\Psi^{\#}(Y,\pi)$ pour Y et π bien choisis. Comme précédemment, notons $n_i = |\pi^{-1}(i)|$ et $p = \max\{i \in \mathbb{N} \mid n_i \neq 0\}$. Pour un k-uplet $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ tels que $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k < d$ on note $v_{\underline{i}}$ le vecteur $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ de $\bigwedge^k V$. Pour $f \in \Psi(Y,\pi)$, on définit un vecteur de $\mathbf{V} = \bigwedge^{n_1} V \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{n_p} V$

$$\mathbf{v}_f = v_{f(\pi^{-1}(0))} \otimes v_{f(\pi^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{f(\pi^{-1}(p))}.$$

L'ensemble des $(\mathbf{v}_f)_{f\in\Psi(Y,\pi)}$ constitue alors une base de $\mathbf{V}$ et on considère la matrice carrée $(\mathbf{S}_{f,g})_{f,g\in\Psi(Y,\pi)}$ dans cette base de l'automorphisme $\bigwedge^{n_1}\mathscr{S} \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{n_p}\mathscr{S}$ de $\mathbf{V}$.

Définition 2.2.5. La *matrice de Fourier* $\mathbb{S}$ associée à la famille $\mathscr{F}$ est la matrice $(\mathbb{S}_{f,g})_{f,g\in\Psi^{\#}(Y,\pi)}$ définie par

$$\mathbb{S}_{f,g} = \frac{(-1)^{m(d-1)}}{\tau(d)^m}\varepsilon(f)\varepsilon(g)\mathbf{S}_{f,g},$$

où $\tau(d) = \prod_{0\le i<j<d}(\zeta^i - \zeta^j) = (-1)^{\binom{d}{2}}\det(\mathscr{S})$ et $\varepsilon(f) = (-1)^{|\{(y,y')\in Y\times Y \mid y<y' \text{ et } f(y)<f(y')\}|}$.

La matrice de Fourier associée à $G(d,1,n)$ est la matrice diagonale par blocs ayant pour blocs les matrices de Fourier des familles de $\mathrm{Uch}(G(d,1,n))$.

Choisissons ζ_* une racine $12d$-ième de l'unité telle que $\zeta_*^{12} = \zeta$. Pour $f \in \Psi(Y,\pi)$, définissons

$$\mathrm{Fr}(f) = \zeta_*^{md(1-d^2)}\prod_{y\in Y}\zeta_*^{-6(f(y)^2+df(y))}.$$

On note $\mathbb{T}$ la matrice diagonale avec entrées sur la diagonale $(\mathrm{Fr}(f))_{f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)}$.

On note f_{sp} l'élément de $\Psi^{\#}(Y,\pi)$ correspondant au symbole spécial.

Proposition 2.2.6 ([Ma95, Folgerung 4.15], [Cu07, Proposition 5.1]). *Avec les notations qui précèdent, on a*

1. $\mathbb{S}^4 = 1$, $(\mathbb{S}\mathbb{T})^3 = 1$, $[\mathbb{S}^2, \mathbb{T}] = 1$.
2. ${}^t\mathbb{S} = \mathbb{S}$ *et* ${}^t\bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = 1$.
3. *Pour tous* $f, g, h \in \Psi^\#(Y, \pi)$

$$N_{f,g}^h = \sum_{k \in \Psi^\#(Y,\pi)} \frac{\mathbb{S}_{k,f}\mathbb{S}_{k,g}\bar{\mathbb{S}}_{k,h}}{S_{k,f_{\mathrm{sp}}}} \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, en vertu du lemme 2.1.2, le quadruplet $(\Psi^\#(Y,\pi), \mathbb{S}, \mathbb{T}^{-1}, f_{\mathrm{sp}})$ définit une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Remarque 2.2.7. Cuntz démontre l'intégralité des $\sum_{k \in \Psi^\#(Y,\pi)} \frac{\mathbb{S}_{k,f}\mathbb{S}_{k,g}\bar{\mathbb{S}}_{k,h}}{S_{k,f_0}}$ pour toute fonction f_0 telle que $f_0(\pi^{-1}(i))$ soit un ensemble de la forme $\{a_i, a_i+1, \ldots, a_i+n_i\}$, les entiers $a_i + j$ étant vus modulo d.

Le symbole spécial est effectivement de cette forme puisque la fonction f_{sp} vérifie

$$f_{\mathrm{sp}}(\pi^{-1}(i)) = \{n_p + \cdots + n_{i+1}, n_p + \cdots + n_{i+1} + 1, \ldots, n_p + \cdots + n_i - 1\},$$

où p est l'entier maximal k tel que n_k est non nul.

2.2.4 Valeur absolue des constantes de structure

Notons toujours $\mathscr{F}$ une famille de caractères unipotents de $G(d,1,n)$ correspondant à $\Psi^\#(Y,\pi)$. On note $A_{\mathscr{F}}$ l'algèbre de fusion associée à la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire associée à la famille $\mathscr{F}$ de base $(b_f)_{f \in \Psi^\#(Y,\pi)}$.

Cuntz a conjecturé dans sa thèse que les valeurs absolues des constantes de structure de $A_{\mathscr{F}}$ définissent toujours une $\mathbb{Z}$-algèbre $A_{\mathscr{F}}^{\mathrm{abs}}$ unitaire, associative, libre comme $\mathbb{Z}$-module et de même rang que $A_{\mathscr{F}}$. La conjecture de Cuntz ne concerne que les anneaux associés aux puissances extérieures de la table de caractères de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ mais on est amené à penser qu'elle est vraie également pour les anneaux associés aux matrices de Fourier des familles de caractères unipotents de $G(d,1,n)$.

Conjecture 2.2.8 ([Cu05, Vermutung 5.1.6]). *Soit $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2|\mathscr{F}|$ et de base $(\tilde{b}_f, \tilde{b}'_f)_{f \in \Psi^\#(Y,\pi)}$. Soit $p\colon \tilde{A}_{\mathscr{F}} \longrightarrow A_{\mathscr{F}}$ le morphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules défini par $p(\tilde{b}_f) = b_f$ et $p(\tilde{b}'_f) = -b_f$. Soit également $\varphi\colon A_{\mathscr{F}} \to \tilde{A}_{\mathscr{F}}$ défini par*

$$\sum_{f \in \Psi^\#(Y,\pi)} \lambda_f b_f \longmapsto \sum_{\substack{f \in \Psi^\#(Y,\pi) \\ \lambda_f > 0}} \lambda_f \tilde{b}_f - \sum_{\substack{f \in \Psi^\#(Y,\pi) \\ \lambda_f < 0}} \lambda_f \tilde{b}'_f.$$

La multiplication $r \cdot r' = \varphi(p(r)p(r'))$ ainsi définie sur $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ est associative et les constantes de structure de l'anneau $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ sont positives. Autrement dit, l'anneau $A_{\mathscr{F}}$ est quotient d'un anneau $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ de rang double et avec constantes de structures positives.

Remarque 2.2.9. Si les constantes de structures de $A_{\mathscr{F}}$ sont toutes positives, cette conjecture est trivialement vraie, mais si certaines constantes sont négatives, il n'est absolument pas évident que la multiplication de $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ est associative.

La situation des trois anneaux $A_{\mathscr{F}}$, $A_{\mathscr{F}}^{\mathrm{abs}}$ et $\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ peut se résumer dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{A}_{\mathscr{F}} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ A_{\mathscr{F}}^{\mathrm{abs}} \simeq \tilde{A}_{\mathscr{F}}/(\tilde{b}_{f_{\mathrm{sp}}} - \tilde{b}'_{f_{\mathrm{sp}}}) & & A_{\mathscr{F}} \simeq \tilde{A}_{\mathscr{F}}/(\tilde{b}_{f_{\mathrm{sp}}} + \tilde{b}'_{f_{\mathrm{sp}}}) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

où p et q s'identifient aux morphismes quotients. On démontrera cette conjecture pour certaines familles dans le chapitre 4 en construisant une catégorie légèrement dégénérée $\mathscr{C}$ telle que $\tilde{A}_{\mathscr{F}} \simeq \mathrm{sGr}(\hat{\mathscr{C}})$, $A_{\mathscr{F}} \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\varepsilon])$ et $A_{\mathscr{F}}^{\mathrm{abs}} \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]+[\varepsilon])$.

2.3 Données modulaires associées aux groupes exceptionnels spetsiaux

La notion de “caractère unipotent” a été également définie pour certains groupes de réflexions complexes exceptionnels [BMM99], [BMM14], dits spetsiaux. Les caractères unipotents associés aux groupes spetsiaux sont également partitionnés en familles, et pour chaque famille, on dispose d'une matrice de Fourier et de valeurs propres du Frobenius. Les matrices de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius sont disponibles dans le paquet CHEVIE de GAP [GHL+96], [Mi15]. Les commandes suivantes permettent d'obtenir les caractères unipotents du groupe de réflexion complexe G_4 dans la classification de Shephard-Todd [ST54] et de les afficher classés par familles :

```
gap> G:=ComplexReflectionGroup(4);;
gap> U:=UnipotentCharacters(G);;
gap> Display(U,rec(byFamily:=true));
Unipotent characters for G4
     Name |               Degree FakeDegree Eigenvalue    Label
_________________________________________________________________
*phi{1,0} |                    1          1          1

_________________________________________________________________
*phi{2,1} |(3-ER(-3))/6qP'3P4P"6        qP4          1      1.E3
#phi{2,3} |(3+ER(-3))/6qP"3P4P'6      q^3P4          1    1.E3^2
Z3:2      |     -ER(-3)/3qP1P2P4          0       E3^2  E3.E3^2

_________________________________________________________________
*phi{3,2} |              q^2P3P6    q^2P3P6          1

_________________________________________________________________
*phi{1,4} | -ER(-3)/6q^4P"3P4P"6        q^4          1  1.-E3^2
phi{2,5}  |          1/2q^4P2^2P6      q^5P4          1    1.E3^2
G4        |        -1/2q^4P1^2P3          0         -1 -E3^2.-1
Z3:11     |   -ER(-3)/3q^4P1P2P4          0       E3^2    E3.-E3
#phi{1,8} |  ER(-3)/6q^4P'3P4P'6        q^8          1   -1.E3^2
```

La première colonne est le nom du caractère unipotent, ceux dont le nom comporte `phi` correspondant à la série principale (et donc aux représentations de G_4). Les deux caractères `Z3:2` et `Z3:11` appartiennent à la série de Harish-Chandra du caractère cuspidal `Z3` d'un sous groupe parabolique isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Enfin, le caractère noté `G4` est un caractère cuspidal. Les symboles `*` indiquent le caractère spécial de la famille, et si le caractère cospécial de la famille est différent du caractère spécial, il est indiqué par `#`.

Dans la deuxième colonne, on lit le degré du caractère unipotent correspondant. Ce dernier est un polynôme et les divers `Pk`, `P'k` et `P''k` désignent des polynômes cyclotomiques.

Dans la troisième colonne, se trouve le degré fantôme du caractère correspondant. Il est nul pour les caractères qui ne proviennent pas de la série principale.

Dans la quatrième colonne, on peut lire la valeur propre du Frobenius, qui vaut toujours 1 sur un caractère de la série principale.

Enfin, la dernière colonne contient un nom qui reflète les interprétations catégoriques que l'on connait de la donnée modulaire définie par une famille. On pourra par exemple trouver une succession de $2k$ signes $+$ et $-$ en type B, indexant les modules simples de l'algèbre $D((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k)$ ou encore, dans l'exemple ci-dessus, une manière d'indexer les modules simples de l'algèbre du double de Drinfled de l'algèbre de Taft.

Les symbole `E3` et `ER(-3)` désignent respectivement une racine 3-ième de l'unité et une racine carrée de -3 reliées comme suit dans GAP :

```
gap> ER(-3);
E(3)-E(3)^2
```

On peut accéder à une famille, ainsi qu'à sa matrice de Fourier et aux valeurs propres du Frobenius comme suit :

```
gap> f:=U.families[2];
Family("RZ/3^2",[6,5,8])
gap> f.fourierMat;
[ [ -2/3*E(3)-1/3*E(3)^2, -1/3*E(3)-2/3*E(3)^2, -1/3*E(3)+1/3*E(3)^2 ],
  [ -1/3*E(3)-2/3*E(3)^2, -2/3*E(3)-1/3*E(3)^2, 1/3*E(3)-1/3*E(3)^2 ],
  [ -1/3*E(3)+1/3*E(3)^2, 1/3*E(3)-1/3*E(3)^2, 1/3*E(3)-1/3*E(3)^2 ] ]
gap> f.eigenvalues
[ 1, 1, E(3)^2 ]
```

Ces matrices sont construites afin de vérifier la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *Soit G un groupe de réflexions complexes exceptionnel spetsial, $\mathscr{F}$ une famille de caractères unipotents de G, S la matrice de Fourier de la famille $\mathscr{F}$,* Fr *la matrice diagonale des valeurs propres du Frobenius et f_{sp} l'élément spécial de la famille $\mathscr{F}$.*

Le quadruplet $(\mathscr{F}, S, \mathrm{Fr}^{-1}, f_{\mathrm{sp}})$ est alors une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Par des calculs au cas par cas, on note que la conjecture de Cuntz 2.2.8 est vraie pour l'anneau de fusion $A_{\mathscr{F}}$ pour n'importe quelle famille de caractères unipotents des groupes exceptionnels spetsiaux. Dans sa thèse [Cu05], Cuntz a donné des constructions des algèbres de fusion associées à la grande majorité des familles de caractères unipotents des groupes de réflexions complexes exceptionnels spetsiaux. Par contre, il ne donne aucune explication des valeurs propres du Frobenius pour ces familles.

Chapitre 3

Catégorification de données $\mathbb{Z}$-modulaires

Dans ce chapitre, on introduit les principaux outils catégoriques qui vont nous permettre de produire des données modulaires. En ce qui concerne les données $\mathbb{N}$-modulaires, la notion de catégorie modulaire donne une réponse à ce problème ; étant donnée une donnée $\mathbb{N}$-modulaire, un problème classique est de trouver une catégorie qui la produit. Par contre, il est impossible de produire des données $\mathbb{Z}$-modulaires avec les catégories modulaires, puisque les constantes de structures s'interprètent comme des multiplicités d'objets simples dans la décomposition d'un produit tensoriel d'objets simples. Afin de catégorifier une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire, on introduit la notion de catégorie légèrement dégénérée, qui contient un objet simple transparent de dimension quantique -1. Tensoriser par cet objet simple a un effet similaire au changement de parité dans les catégories enrichies sur les super-espaces vectoriels.

Ce chapitre est organisé comme suit. On commence tout d'abord par généraliser légèrement les résultats bien connus sur les catégories modulaire au cas où la structure pivotale n'est pas sphérique, et on donne dans une deuxième sous-partie un exemple de situation où cette hypothèse de sphéricité doit être enlevée afin de catégorifier une donnée modulaire. Dans un troisième temps, on introduit un notion cruciale, celle de catégorie légèrement dégénérée et on montre qu'elles fournissent des données $\mathbb{Z}$-modulaires. On étudie alors le lien avec les super-catégories tressées sans objets simples transparents. Enfin, on donne un exemple de catégorie légèrement dégénérée, qui est relié aux données $\mathbb{Z}$-modulaires du groupe cyclique, introduites dans le chapitre 2.

Dans tout ce chapitre, $\Bbbk$ désignera un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Ce chapitre est en grande partie tiré de la pré-publication [La18b].

3.1 Extension des résultats aux catégories non sphériques

3.1.1 Catégories de fusion, pivotales, tressées

On se donne une catégorie de fusion $\mathscr{C}$ sur le corps $\Bbbk$ au sens de [EGNO15, Definition 4.1.1] : la catégorie $\mathscr{C}$ est $\Bbbk$-linéaire, abélienne, monoïdale (de produit tensoriel $\otimes$ et d'objet unité $\mathbf{1}$), rigide, finie et semi-simple telle que le bifoncteur $\otimes \colon \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est bilinéaire sur les morphismes et telle que $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) \simeq \Bbbk$. Ici, la notion de finitude est la suivante : il existe un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets simples et les espaces de morphismes sont de dimension finie sur $\Bbbk$ (la définition [EGNO15, Definition 1.8.6] a deux conditions supplémentaires, impliquées ici par le fait que la catégorie est semi-simple). On note $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathscr{C}$. On omettra la contrainte d'associativité $(-\otimes-)\otimes-\simeq-\otimes(-\otimes-)$ ainsi que les contraintes d'unité $\mathbf{1}\otimes-\simeq-$ et $-\otimes\mathbf{1}\simeq-$.

La catégorie $\mathscr{C}$ est rigide : tout objet X de $\mathscr{C}$ admet un dual à gauche $(X^*, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$. Les morphismes d'évaluation et de coévaluation sont tels que les compositions suivantes sont l'identité :

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev}_X\otimes\mathrm{id}_X} X\otimes X^*\otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{ev}_X} X,$$

et

$$X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*}\otimes\mathrm{coev}_X} X^*\otimes X\otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_x\otimes\mathrm{id}_{X^*}} X^*.$$

Un dual à gauche est unique à unique isomorphisme près [EGNO15, Proposition 2.10.5] et pour $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, il existe une application $f^*\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y^*,X^*)$ définie comme la composition

$$Y^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{coev}_X} Y^*\otimes X\otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{Y^*}\otimes f\otimes\mathrm{id}_{X^*}} Y^*\otimes Y\otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id}_{X^*}} X^*.$$

La dualité $-^*\colon\mathscr{C}\to\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ définit alors un foncteur monoïdal contravariant, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ désignant la catégorie $\mathscr{C}$ munie du produit tensoriel opposé. De même, tout objet X de $\mathscr{C}$ admet un dual à droite $({}^*X, \mathrm{ev}'_X, \mathrm{coev}'_X)$ vérifiant des propriétés similaires au dual à gauche, que l'on peut retrouver en remarquant qu'un dual à droite dans $\mathscr{C}$ est un dual à gauche dans $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

On suppose que $\mathscr{C}$ est également munie d'une structure pivotale [EGNO15, Definition 4.7.8] : il existe un isomorphisme naturel et monoïdal $a\colon\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to-^{**}$. En identifiant $(X\otimes Y)^{**}$ à $X^{**}\otimes Y^{**}$, dire que a est un foncteur monoïdal signifie que $a_{X\otimes Y}=a_X\otimes a_Y$. La structure pivotale permet alors de définir les traces quantiques d'un morphisme $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$, qui sont des éléments de $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1})$. La trace quantique positive (ou à gauche) $\mathrm{Tr}^+_X(f)$ de $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ est donnée par la composition

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}_X} X\otimes X^* \xrightarrow{(a_X\circ f)\otimes\mathrm{id}_{X^*}} X^{**}\otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{X^*}} \mathbf{1},$$

et la trace quantique négative (ou à droite) $\mathrm{Tr}^-_X(f)$ de $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ est donnée par la composition

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}_{X^*}} X^*\otimes X^{**} \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*}\otimes(f\circ a_X^{-1})} X^*\otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} \mathbf{1}.$$

Comme $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1})\simeq\Bbbk$, on identifiera ces traces à des scalaires.

Remarque 3.1.1. Dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, avec l'identification usuelle d'un espace avec son bidual, on retrouve la trace usuelle.

Si ces deux traces coïncident, la catégorie $\mathscr{C}$ est dite *sphérique*, ce qui est équivalent à dire que les dimensions quantiques positives et négatives coïncident d'après [EGNO15, Theorem 4.7.15]. Les propriétés des traces quantiques sont similaires à celle de la trace dans la catégorie des espaces vectoriels.

Proposition 3.1.2. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie monoïdale additive, rigide et munie d'une structure pivotale. Soient X et Y des objets de $\mathscr{C}$, f un endomorphisme de X et g un endomorphisme de Y. Alors*

1. $\mathrm{Tr}^{\pm}_{X^*}(f^*) = \mathrm{Tr}^{\mp}_X(f)$,
2. $\mathrm{Tr}^{\pm}_{X\oplus Y}(f\oplus g) = \mathrm{Tr}^{\pm}_X(f) + \mathrm{Tr}^{\pm}_Y(g)$,
3. $\mathrm{Tr}^{\pm}_{X\otimes Y}(f\otimes g) = \mathrm{Tr}^{\pm}_X(f)\,\mathrm{Tr}^{\pm}_Y(g)$,
4. *pour* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ *et* $k \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$ *on a* $\mathrm{Tr}^{\pm}_X(k\circ h) = \mathrm{Tr}^{\pm}_Y(h\circ k)$.

Démonstration. Voir [EGNO15, Proposition 4.7.3] □

Pour un endomorphisme f d'un objet $X\otimes Y$ de $\mathscr{C}$, on définit des traces partielles par

$$\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{Tr}^+_Y(f)\colon X \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{coev}_Y} X\otimes Y\otimes Y^* \xrightarrow{((\mathrm{id}_X\otimes a_Y)\circ f)\otimes\mathrm{id}_{Y^*}} X\otimes Y^{**}\otimes Y^* \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{ev}_{Y^*}} X$$

et

$$\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y(f)\colon Y \xrightarrow{\mathrm{coev}_{X^*}\otimes\mathrm{id}_Y} X^*\otimes X^{**}\otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*}\otimes(f\circ(a_X^{-1}\otimes\mathrm{id}_Y))} X^*\otimes X\otimes Y \xrightarrow{\mathrm{ev}_X\otimes\mathrm{id}_Y} Y.$$

Bien entendu, on a $\mathrm{Tr}^+_X(\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{Tr}^+_Y(f)) = \mathrm{Tr}^+_{X\otimes Y}(f)$ et $\mathrm{Tr}^-_Y(\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y(f)) = \mathrm{Tr}^-_{X\otimes Y}(f)$. Grâce à ces traces partielles, on définit la trace mixte $\mathrm{Tr}^{-,+}_{X\otimes Y}(f)$ d'un endomorphisme f de $X\otimes Y$ comme l'endomorphisme $\mathrm{Tr}^-_X(\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{Tr}^+_Y(f))$ de l'objet unité, qui est aussi égal à $\mathrm{Tr}^+_Y(\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y(f))$.

Lemme 3.1.3. *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie monoïdale rigide et pivotale, X et Y des objets de $\mathscr{C}$ ainsi que $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X\otimes Y, X\otimes Y)$. Alors $\mathrm{Tr}^{-,+}_{Y^*\otimes X^*}(f^*) = \mathrm{Tr}^{-,+}_{X\otimes Y}(f)$.*

Démonstration. Pour simplifier, on notera le produit tensoriel de deux objets par la juxtaposition. Rappelons que la structure pivotale est notée a. Par définition

$$\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{Tr}^+_{X^*}(f^*) = (\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{ev}_{X^{**}})\circ(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes a_{X^*}\otimes\mathrm{id}_{X^{**}})\circ(\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id}_{YX^*X^{**}})\circ(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{ev}_X\otimes\mathrm{id}_{YY^*X^*X^{**}})$$
$$\circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*}\otimes f\otimes\mathrm{id}_{Y^*X^*X^{**}})\circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*X}\otimes\mathrm{coev}_Y\otimes\mathrm{id}_{X^*X^{**}})\circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*}\otimes\mathrm{coev}_X\otimes\mathrm{id}_{X^{**}})\circ(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{coev}_{X^*}).$$

En utilisant la fonctorialité du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{Tr}^+_{X^*}(f^*) = {} & (\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{ev}_X\otimes\mathrm{id}_{YY^*})\circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*}\otimes f\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*X}\otimes\mathrm{coev}_Y)\\ & \circ(\mathrm{id}_{Y^*X^*}\otimes((\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{ev}_{X^{**}})\circ(\mathrm{id}_X\otimes a_{X^*}\otimes\mathrm{id}_{X^{**}})\circ(\mathrm{coev}_X\otimes\mathrm{id}_{X^{**}})))\circ\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{coev}_{X^*}.\end{aligned}$$

Mais $a_{X^*} = (a_X^{-1})^*$ (cf. [EGNO15, Exercise 4.7.9]) et donc $(\mathrm{id}_X\otimes a_{X^*})\circ\mathrm{coev}_X = (a_X^{-1}\otimes\mathrm{id}_{X^{***}})\circ\mathrm{coev}_{X^{**}}$. Utilisant la définition de la dualité, $(\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{ev}_{X^{**}})\circ(\mathrm{id}_X\otimes a_{X^*}\otimes\mathrm{id}_{X^{**}})\circ(\mathrm{coev}_X\otimes\mathrm{id}_{X^{**}}) = a_X^{-1}$ et ainsi

$$\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{Tr}^+_{X^*}(f^*) = (\mathrm{ev}_Y\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ(\mathrm{id}^*_Y\otimes(\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y)(f)\otimes\mathrm{id}_{Y^*})\circ(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\mathrm{coev}_Y) = \left[(\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y)(f)\right]^*.$$

Finalement,

$$\mathrm{Tr}^{-,+}_{Y^*\otimes X^*}(f^*) = \mathrm{Tr}^-_{Y^*}\left(\left[(\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y)(f)\right]^*\right) = \mathrm{Tr}^+_Y((\mathrm{Tr}^-_X\otimes\mathrm{id}_Y)(f)) = \mathrm{Tr}^{-,+}_{X\otimes Y}(f),$$

comme attendu. □

Ces traces donnent lieu à deux dimensions, les dimensions quantiques positive et négative :

$$\dim^+(X) = \mathrm{Tr}^+_X(\mathrm{id}_X) \qquad \text{et} \qquad \dim^-(X) = \mathrm{Tr}^-_X(\mathrm{id}_X),$$

qui vérifient $\dim^+(X^*) = \dim^-(X)$. La norme carrée d'un objet simple X est définie comme

$$|X|^2 = \dim^+(X)\dim^-(X) = \dim^+(X)\dim^+(X^*).$$

C'est un nombre totalement positif si X est simple [EGNO15, Proposition 7.21.14] : pour tout plongement ι du sous-corps $\Bbbk_{\mathrm{alg}}$ des éléments algébriques de $\Bbbk$ dans $\mathbb{C}$, $\iota(|X|^2) > 0$. En particulier, les dimensions quantiques d'un objet simple sont non nulles (cf. également [EGNO15, Proposition 4.8.4]). La dimension de la catégorie $\mathscr{C}$ est définie par

$$\dim(\mathscr{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} |X|^2,$$

$\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ désignant un système de représentants des classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathscr{C}$.

Dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, d'après [ENO05, Proposition 2.9], les dimensions quantiques sont reliées par la conjugaison complexe : pour tout objet X,

$$\overline{\dim^+(X)} = \dim^-(X).$$

Exemple 3.1.4. Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe fini G avec l'identification usuelle de bidual, la dimension d'un objet est simplement la dimension en tant qu'espace vectoriel et $\mathscr{C}$ n'est autre que l'ordre de G.

On supposera par la suite que la catégorie $\mathscr{C}$ est tressée : il existe une famille d'isomorphismes bifonctoriels $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ satisfaisant les axiomes de l'hexagone [EGNO15, Definition 8.1.1]. Une telle catégorie admet toujours un isomorphisme naturel $u \colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to -^{**}$ appelé morphisme de Drinfeld. Il est défini comme la composition

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev}_{X^*}} X \otimes X^* \otimes X^{**} \xrightarrow{c_{X,X^*}} X^* \otimes X \otimes X^{**} \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} X^{**}.$$

Ce n'est pas un morphisme de foncteurs monoïdaux mais pour X et Y objets de $\mathscr{C}$, on a

$$u_X \otimes u_Y = u_{X \otimes Y} \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}.$$

Se donner une structure pivotale a sur $\mathscr{C}$ est alors équivalent à se donner un twist θ sur $\mathscr{C}$, qui est un endomorphisme du foncteur identité et qui vérifie pour X et Y objets de $\mathscr{C}$

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}.$$

Le lien entre le twist et la structure pivotale est $a = u\theta$. Notre point de vue est le suivant : la catégorie tressée $\mathscr{C}$ est pivotale et sera plus tard munie d'un twist, qui sera la plupart du temps celui défini par la structure pivotale.

3.1.2 Objets transparents et S-matrices

Commençons par définir la notion d'objet transparent, ainsi que de centre symétrique [Mü03, Definition 2.9].

Définition 3.1.5. Un objet X d'une catégorie monoïdale tressée est dit *transparent* si pour tout objet Y le double tressage $c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ est l'identité de $X \otimes Y$. La sous-catégorie monoïdale des objets transparents est appelé *centre symétrique* de $\mathscr{C}$ et est noté $\mathscr{Z}_{\mathrm{sym}}(\mathscr{C})$.

Une catégorie de fusion tressée $\mathscr{C}$ est dite *non dégénérée* si le seul objet simple de son centre symétrique est l'objet unité.

Remarque 3.1.6. On n'utilise pas la notation $\mathscr{Z}(\mathscr{C})$ pour le centre symétrique, cette dernière étant plutôt réservée au centre de Drinfeld de la catégorie $\mathscr{C}$ [EGNO15, Definition 7.13.1]. On trouve parfois la notation $\mathscr{Z}_2(\mathscr{C})$ pour le centre symétrique (cf. [Mü03]).

Hypothèse et notations. *À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, on suppose que $\mathscr{C}$ est une catégorie de fusion, pivotale et tressée. L'anneau de Grothendieck* $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ *de $\mathscr{C}$ admet ainsi pour base* $([X])_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}$ *et les constantes de structures de cet anneau sont notées* $(N_{X,Y}^Z)_{X,Y,Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}$ *:*

$$[X]\cdot[Y] = \sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N_{X,Y}^Z [Z].$$

De manière équivalente, $N_{X,Y}^Z$ est la multiplicité de l'objet simple Z dans le produit tensoriel $X \otimes Y$ de deux objets simples X et Y, ou encore $N_{X,Y}^Z =$ $\dim_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X\otimes Y))$.

Pour des objets X et Y de $\mathscr{C}$, définissons

$$s_{X,Y}^+ = (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Tr}_Y^+)(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$$

et

$$s_{X,Y}^- = (\mathrm{Tr}_X^- \otimes \mathrm{id}_Y)(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(Y).$$

Ceci induit des morphismes de groupes abéliens

$$s_X^+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X) \\ Y & \longmapsto & s_{X,Y}^+ \end{array} \right. \quad \text{et} \quad s_Y^- : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(Y) \\ X & \longmapsto & s_{X,Y}^- \end{array} \right. .$$

Proposition 3.1.7. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée. Si X est un objet simple de $\mathscr{C}$ alors, en identifiant* $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ *à* $\Bbbk$, *les morphismes* $s_X^+ : \mathrm{Gr}(\mathscr{C}) \to \Bbbk$ *et* $s_X^- : \mathrm{Gr}(\mathscr{C}) \to \Bbbk$ *sont des morphisme d'anneaux.*

Démonstration. Voir [EGNO15, Proposition 8.3.11]. □

Dans le cas où la catégorie $\mathscr{C}$ est sphérique, on définit la S-matrice comme la matrice des traces quantiques des doubles tressages. Ici, on dispose de plus d'une trace et on définit alors les matrices $S^{+,+}$, $S^{-,-}$ et $S^{-,+}$ dans $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}(\Bbbk)$ par

$$\begin{aligned} S_{X,Y}^{+,+} &= \mathrm{Tr}_{X\otimes Y}^+(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}) = \mathrm{Tr}_X^+(s_{X,Y}^+), \\ S_{X,Y}^{-,-} &= \mathrm{Tr}_{X\otimes Y}^-(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}) = \mathrm{Tr}_Y^-(s_{X,Y}^-), \\ S_{X,Y}^{-,+} &= \mathrm{Tr}_Y^+(s_{X,Y}^-) = \mathrm{Tr}_X^-(s_{X,Y}^+). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que les objets X et Y sont simples, il est facile de montrer que ces matrices sont reliées comme suit :

$$\frac{\dim^-(X)}{\dim^+(X)} S^{+,+}_{X,Y} = S^{-,+}_{X,Y} = \frac{\dim^+(Y)}{\dim^-(Y)} S^{-,-}_{X,Y}.$$

La proposition 3.1.7 se traduit en l'égalité

$$S^{+,+}_{X,Y} S^{+,+}_{X,Z} = \sum_{W \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^W_{Y,Z} \dim^+(X) S^{+,+}_{X,W}, \tag{3.1}$$

pour tout X, Y, Z objets simples de $\mathscr{C}$.

Remarque 3.1.8. Les matrices $S^{+,+}$ et $S^{-,-}$ sont symétriques. Ce n'est pas le cas de $S^{-,+}$. La compatibilité avec la dualité assure néanmoins

$$S^{+,+}_{X^*,Y^*} = S^{-,-}_{X,Y} \quad \text{et} \quad S^{-,+}_{X^*,Y^*} = S^{-,+}_{Y,X},$$

de sorte que la matrice $S = (S^{-,+}_{X,Y^*})_{X,Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})}$ est symétrique.

Ces matrices étant définies comme des traces de double tressage, si un objet simple X est transparent, alors pour tout objet simple Y et $(?,?') \in \{(+,+),(-,+),(-,-)\}$ on a $S^{?,?'}_{X,Y} = \dim^{?}(X)\dim^{?'}(Y)$. Ceci permet en fait de caractériser les objets transparents.

Proposition 3.1.9. *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée et X un objet simple de $\mathscr{C}$. Sont équivalents :*

1. *$X \in \mathscr{C}'$,*
2. *pour tout $Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ on a $S^{-,+}_{X,Y} = \dim^-(X)\dim^+(Y)$,*
3. *pour tout $Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ on a $S^{+,+}_{X,Y} = \dim^+(X)\dim^+(Y)$,*
4. *pour tout $Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ on a $S^{-,-}_{X,Y} = \dim^-(X)\dim^-(Y)$.*

Démonstration. Voir [EGNO15, Proposition 8.20.5]. □

On peut munir la catégorie $\mathscr{C}$ d'un autre tressage que l'on note c^{rev} et qui est défini par $c^{\mathrm{rev}}_{X,Y} = c^{-1}_{Y,X}$. La catégorie de fusion pivotale $\mathscr{C}$ munie de ce tressage sera notée $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$ et les S-matrices correspondantes par $S^{\mathrm{rev},+,+}$, $S^{\mathrm{rev},-,-}$ et $S^{\mathrm{rev},-,+}$. Les structures pivotales de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$ sont ici les mêmes et donc les traces quantiques sont les mêmes dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$.

Proposition 3.1.10. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée. Quels que soient X et Y objets simples de $\mathscr{C}$, on a $S^{\mathrm{rev},-,+}_{X,Y} = S^{+,+}_{Y,X^*}$.*

Démonstration. On commence par un lemme qui découle de [EGNO15, Lemma 8.9.1].

Lemme 3.1.11. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée. Quels que soient X et Y objets de $\mathscr{C}$, on a*

1. $(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c_{Y,X}) = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{ev}_X) \circ (c^{-1}_{Y,X^*} \otimes \mathrm{id}_X)$,
2. $(c_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}_Y) = (\mathrm{id}_Y \otimes c^{-1}_{X,Y^*}) \circ (\mathrm{coev}_Y \otimes \mathrm{id}_X)$.

Maintenant, par définition

$$S^{\mathrm{rev},-,+}_{X,Y} = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{ev}_{Y^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^* \otimes X} \otimes a_Y \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \\ \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{Y,X} \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a^{-1}_X \otimes \mathrm{id}_{Y \otimes Y^*}) \circ (\mathrm{coev}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_Y).$$

La naturalité du tressage et le lemme 3.1.11 appliqué à $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$ assurent que

$$(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{Y^{**}}) \circ (\mathrm{id}_{X^* \otimes X} \otimes a_Y) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,Y}) = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{Y^{**}}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,Y^{**}}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a_Y \otimes \mathrm{id}_X) \\ = (\mathrm{id}_{Y^{**}} \otimes \mathrm{ev}_X) \circ (c_{X^*,Y^{**}} \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a_Y \otimes \mathrm{id}_X).$$

De la même manière,

$$(\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{Y,X}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a^{-1}_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{coev}_{X^*} \otimes \mathrm{id}_Y) = (\mathrm{id}_{X^* \otimes Y} \otimes a^{-1}_X) \circ (c_{Y,X^*} \otimes \mathrm{id}_{X^{**}}) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{coev}_{X^*}).$$

Par conséquent,

$$S^{\mathrm{rev},-,+}_{X,Y} = \mathrm{ev}_{X \otimes Y^*} \circ (c_{X^*,Y^{**}} \otimes \mathrm{id}_{X \otimes Y^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a_Y \otimes a^{-1}_X \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (c_{Y,X^*} \otimes \mathrm{id}_{X^{**} \otimes Y^*}) \circ \mathrm{coev}_{Y \otimes X^*} \\ = \mathrm{ev}_{X \otimes Y^*} \circ (a_Y \otimes \mathrm{id}^*_X \otimes a^{-1}_X \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (c_{X^*,Y} \otimes \mathrm{id}_{X^{**} \otimes Y^*}) \circ (c_{Y,X^*} \otimes \mathrm{id}_{X^{**} \otimes Y^*}) \circ \mathrm{coev}_{Y \otimes X^*}.$$

Enfin, comme $(a^{-1}_X)^* = a_{X^*}$ et comme pour tout $f : W \to Z$ on a $\mathrm{ev}_W \circ (\mathrm{id}_W \otimes f^*) = \mathrm{ev}_Z \circ (f \otimes \mathrm{id}_{Z^*})$, on trouve bien $S^{\mathrm{rev},-,+}_{X,Y} = S^{+,+}_{Y,X^*}$. □

3.1.3 Twists et sommes de Gauss

La S-matrice est le premier des deux ingrédients donnant la représentation de $SL_2(\mathbb{Z})$ attendue. Le second va être donné par la T-matrice, qui est reliée au twist associé à la structure pivotale. On s'efforce à noter θ le twist associé à la structure pivotale, c'est-à-dire $a = u\theta$ et on notera $\tilde{\theta}$ un autre twist. Étant donné un twist $\tilde{\theta}$ et un objet simple X, on identifiera $\tilde{\theta}_X \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ au scalaire $\lambda \in \Bbbk$ tel que $\tilde{\theta}_X = \lambda\, \mathrm{id}_X$.

Proposition 3.1.12. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée. On considère le twist θ associé à la structure pivotale. Pour tout objet X simple, $\theta_{X^*} \dim^+(X) = \dim^-(X)\theta_X$.*

Démonstration. Similairement à [EGNO15, Proposition 8.10.14], on a

$$\dim^+(X) = \theta_X\, \mathrm{ev}_X \circ c_{X,X^*} \circ \mathrm{coev}_X .$$

Il est ici crucial que le twist θ et la structure pivotale a soient reliés par le morphisme de Drinfeld. Montrons alors que $\mathrm{Tr}^{-,+}_{X \otimes X}(c^{-1}_{X,X}) = \mathrm{ev}_X \circ c_{X,X^*} \circ \mathrm{coev}_X$. Par définition,

$$\mathrm{Tr}^{-,+}_{X \otimes X}(c^{-1}_{X,X}) = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{ev}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^* \otimes X} \otimes a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,X} \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \\ \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes a^{-1}_X \otimes \mathrm{id}_{X \otimes X^*}) \circ (\mathrm{coev}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X).$$

En utilisant la naturalité de c, on se débarrasse de la structure pivotale

$$\mathrm{Tr}^{-,+}_{X \otimes X}(c^{-1}_{X,X}) = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{ev}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c^{-1}_{X,X^{**}} \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{coev}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X).$$

Le lemme 3.1.11 affirme alors que $(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_{X^*}) \circ (c^{-1}_{X,X^{**}} \otimes \mathrm{id}_{X^*}) = (\mathrm{ev}_{X^*} \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_{X^{**}} \otimes c_{X,X^*})$. Ainsi, en utilisant les propriétés de la dualité, on a $\mathrm{Tr}^{-,+}_{X \otimes X}(c^{-1}_{X,X}) = \mathrm{ev}_X \circ c_{X,X^*} \circ \mathrm{coev}_X$, ce qui permet de conclure que $\dim^+(X) = \theta_X\, \mathrm{Tr}^{-,+}_{X \otimes X}(c^{-1}_{X,X})$.

D'après le lemme 3.1.3, on a $\mathrm{Tr}^{-,+}_{X^*\otimes X^*}((c^{-1}_{X,X})^*) = \mathrm{Tr}^{-,+}_{X\otimes X}(c^{-1}_{X,X})$ et comme $(c_{X,X})^* = c_{X^*,X^*}$ (cf. [EGNO15, Exercise 8.9.2]) on trouve que

$$\theta_X^{-1}\dim^+(X) = \mathrm{Tr}^{-,+}_{X\otimes X}(c^{-1}_{X,X}) = \mathrm{Tr}^{-,+}_{X^*\otimes X^*}(c^{-1}_{X^*,X^*}) = \theta^{-1}_{X^*}\dim^+(X^*),$$

ce qui permet de conclure. □

Il découle alors que pour X simple ses dimensions positive et négative coïncident si et seulement si $\theta_{X^*} = \theta_X$.

Corollaire 3.1.13. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée. La structure pivotale est sphérique si et seulement si le twist θ associé à la structure pivotale est un ruban, c'est-à-dire vérifie $\theta_{X^*} = (\theta_X)^*$.*

Démonstration. La catégorie étant semi-simple, pour $X = \bigoplus_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} Z^{\oplus n_Z}$, on a $\dim^\pm(X) = \sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} n_Z \dim^\pm(Z)$, $\theta_{X^*} = \bigoplus_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}(\theta_{Z^*}\,\mathrm{id}_{Z^*})^{\oplus n_Z}$ et $(\theta_X)^* = \bigoplus_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}(\theta_Z\,\mathrm{id}_{Z^*})^{\oplus n_Z}$. Le résultat découle alors de la proposition 3.1.12. □

Définition 3.1.14. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée munie d'un twist $\tilde\theta$. Les *sommes de Gauss* de la catégorie $\mathscr{C}$ sont définies par

$$\tau^\pm(\mathscr{C},\tilde\theta) = \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \tilde\theta_X^\pm |X|^2.$$

Si le twist est celui provenant de la structure pivotale, on notera simplement ces sommes $\tau^\pm(\mathscr{C})$.

La relation $\tilde\theta_{X\otimes Y} = (\tilde\theta_X\otimes\tilde\theta_Y)\circ c_{Y,X}\circ c_{X,Y}$ donne lieu, en prenant la trace quantique positive à

$$\tilde\theta_X\tilde\theta_Y S^{+,+}_{X,Y} = \sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^Z_{X,Y}\dim^+(Z)\tilde\theta_Z, \tag{3.2}$$

pour X et Y des objets simples de $\mathscr{C}$.

Lemme 3.1.15. *Soit Y un objet simple d'une catégorie $\mathscr{C}$ de fusion pivotale, tressée et munie d'un twist $\tilde\theta$. Alors*

$$\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \tilde\theta_X \dim^-(X) S^{+,+}_{X,Y} = \tilde\theta_Y^{-1}\dim^+(Y)\tau^+(\mathscr{C},\tilde\theta). \tag{3.3}$$

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que [EGNO15, Lemma 8.15.2]. En utilisant (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \tilde\theta_X \dim^-(X) S^{+,+}_{X,Y} &= \tilde\theta_Y^{-1}\sum_{X,Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^Z_{X,Y}\dim^+(Z)\dim^-(X)\tilde\theta_Z\\ &= \tilde\theta_Y^{-1}\sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(Z)\tilde\theta_Z\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^{X^*}_{Z^*,Y}\dim^+(X^*)\\ &= \tilde\theta_Y^{-1}\dim^+(Y)\sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\tilde\theta_Z|Z|^2.\end{aligned}$$

□

On obtient une formule similaire pour θ^{-1} en utilisant conjointement les propositions 3.1.10 et 3.1.12.

Lemme 3.1.16. *Soit Y un objet simple d'une catégorie $\mathscr{C}$ de fusion pivotale, tressée et munie du twist θ associé à la structure pivotale. Alors*

$$\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X^{-1}\dim^+(X)S^{+,+}_{X,Y} = \theta_Y \dim^+(Y)\tau^-(\mathscr{C}). \tag{3.4}$$

Démonstration. En utilisant le fait que $\theta^{\mathrm{rev}} = \theta^{-1}$ est un twist pour la catégorie $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$, le lemme 3.1.15 donne

$$\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X^{\mathrm{rev}}\dim^-(X)S^{\mathrm{rev},+,+}_{X,Y} = (\theta_Y^{\mathrm{rev}})^{-1}\dim^+(Y)\tau^+(\mathscr{C}^{\mathrm{rev}},\theta^{\mathrm{rev}}).$$

D'après la proposition 3.1.10, on a $\dim^-(X)S^{\mathrm{rev},+,+}_{X,Y} = \dim^+(X)S^{+,+}_{X^*,Y}$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$ ayant les mêmes objets simples, on a $\tau^+(\mathscr{C}^{\mathrm{rev}},\theta^{\mathrm{rev}}) = \tau^-(\mathscr{C})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\theta_Y\dim^+(Y)\tau^-(\mathscr{C}) &= \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X^{-1}\dim^-(X)S^{\mathrm{rev},+,+}_{X,Y}\\ &= \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X^{-1}\dim^+(X)S^{+,+}_{X^*,Y}\\ &= \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_{X^*}^{-1}\dim^-(X)S^{+,+}_{X^*,Y},\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la proposition 3.1.12. Comme $X\mapsto X^*$ est une bijection de $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, on conclut en utilisant le fait que $\dim^-(X) = \dim^+(X^*)$. □

3.1.4 Catégories pivotales non dégénérées

Il est bien connu qu'une catégorie modulaire, c'est-à-dire de fusion, sphérique, tressée et non dégénérée, donne lieu à une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$, ou de manière équivalente à une donnée $\mathbb{N}$-modulaire [EGNO15, Theorem 8.16.1]. Le but de cette partie est de généraliser cela aux catégories pivotales non sphériques.

> **Hypothèse.** *Dans cette partie, et seulement dans cette partie, nous supposerons que $\mathscr{C}$ est une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée.*

Une involution remplaçant la dualité

La non dégénérescence implique que tous les caractères de l'anneau de Grothendieck $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ sont de la forme s^+_X avec X un objet simple. De plus, $s^+_X = s^+_Y$ si et seulement si les objets simples X et Y sont isomorphes. Une particularité du cas non sphérique est que le caractère $Y\mapsto s^+_X(Y^*)$ de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ n'est pas égal au caractère $s^+_{X^*}$ mais au caractère $s^-_{X^*}$. Mais ce caractère est de la forme s^+_Z pour un unique $Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$. On définit alors une involution $\bar{\ }$ de $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ par l'égalité de caractères $s^+_{\bar{X}} = s^-_{X^*}$.

Proposition 3.1.17. *L'objet $\bar{\mathbb{1}}$ est inversible et pour tout objet $X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, $\bar{X}\simeq X^*\otimes\bar{\mathbb{1}}$.*

Démonstration. Soit X un objet simple. Par définition, on a

$$s_X^+(\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*) = s_X^+(\bar{\mathbf{1}})s_X^+(\bar{\mathbf{1}}^*) = \frac{S^{+,+}_{X,\bar{\mathbf{1}}} S^{+,+}_{X,\bar{\mathbf{1}}^*}}{\dim^+(X)^2}.$$

Mais $S^{+,+}_{X,\bar{\mathbf{1}}} = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})s^+_{\mathbf{1}}(X^*) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim^-(X)$ et on a également

$$\begin{aligned} S^{+,+}_{X,\bar{\mathbf{1}}^*} = S^{-,-}_{X^*,\bar{\mathbf{1}}} &= \frac{\dim^-(X^*)}{\dim^+(X^*)} \frac{\dim^-(\bar{\mathbf{1}})}{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})} \\ &= \frac{\dim^+(X)}{\dim^-(X)} \dim^-(\bar{\mathbf{1}}) s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X^*) \\ &= \frac{\dim^+(X)^2}{\dim^-(X)} \dim^-(\bar{\mathbf{1}}). \end{aligned}$$

Ainsi $s_X^+(\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*) = |\bar{\mathbf{1}}|^2$ et l'élément $[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*] - |\bar{\mathbf{1}}|^2[\mathbf{1}]$ de $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ est annihilé par tous les caractères de $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ et est donc nul. Or, dans $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$, on a l'égalité $[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*] = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^X_{\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}}^*}[X]$ ce qui implique, $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ étant une base de $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$, que $N^X_{\mathbf{1},\mathbf{1}^*} = 0$ pour tout $X \neq \mathbf{1}$ et que $N^{\mathbf{1}}_{\mathbf{1},\mathbf{1}^*} = |\bar{\mathbf{1}}|^2$. Mais $N^{\mathbf{1}}_{X,X^*} = 1$ pour tout objet simple X ce qui donne $\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^* \simeq \mathbf{1}$ et l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est bien inversible.

Comme $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible, $X^* \otimes \bar{\mathbf{1}}$ est simple quel que soit X objet simple dans $\mathscr{C}$. On montre alors que $s^+_{X^* \otimes \bar{\mathbf{1}}}(Y) = s^+_X(Y^*)$ pour tout objet simple Y afin de conclure :

$$\begin{aligned} s^+_{X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}}(Y) = \frac{\dim^+(Y)}{\dim^+(X^* \otimes \bar{\mathbf{1}})} s^+_Y(X^* \otimes \bar{\mathbf{1}}) &= \frac{\dim^+(Y)}{\dim^+(X^* \otimes \bar{\mathbf{1}})} s^+_Y(X^*) s^+_Y(\bar{\mathbf{1}}) \\ &= \frac{S^{+,+}_{Y,X^*}}{\dim^+(X^*)\dim^+(Y)} s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(Y) \\ &= \frac{S^{-,-}_{Y^*,X}}{\dim^+(X^*)\dim^+(Y)} \dim^+(Y^*) \\ &= \frac{S^{+,+}_{Y^*,X}}{\dim^+(X)} \\ &= s^+_X(Y^*). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.18. *Sous les mêmes hypothèses, pour tous objets simples X et Y on a $S^{+,+}_{\bar{X},Y} = S^{+,+}_{X,\bar{Y}}$.*

Démonstration. Par définition de $s^+_{\bar{X}}$, on a $S^{+,+}_{\bar{X},Y} = \dim^+(\bar{X})s^+_{\bar{X}}(Y)$. D'après ce qui précède $\dim^+(\bar{X}) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim^+(X^*)$. Or $\dim^+ = s^+_{\mathbf{1}}$ et ainsi

$$\dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim^+(X^*) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X) = S^{+,+}_{\bar{\mathbf{1}},X} = \dim^+(X)s^+_X(\bar{\mathbf{1}}).$$

De là, on déduit que $S^{+,+}_{\bar{X},Y} = \dim^+(X)s^+_X(Y^* \otimes \bar{\mathbf{1}})$ ce qui permet de conclure. □

Dans le cas modulaire, à une constante multiplicative près, le carré de la S-matrice est donné par la dualité (cf. [EGNO15, Proposition 8.14.2]). Ici, l'involution $\bar{\ }$ remplace la dualité. Soit E la matrice dans $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}(\Bbbk)$ telle que $E_{X,Y} = \delta_{X,\bar{Y}}$.

Proposition 3.1.19. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée. Alors* $(S^{+,+})^2 = \dim(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})E$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de [EGNO15, Proposition 8.14.2], l'involution $\bar{}$ remplaçant la dualité. Supposons $Y \neq \bar{Z}$. Par orthogonalité des caractères [EGNO15, Lemma 8.14.1],

$$\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} S^{+,+}_{Y,X}S^{+,+}_{X,Z} = \dim^+(Y)\dim^+(Z)\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} s^+_Y(X)s^+_{\bar{Z}}(X^*) = 0.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $(S^{+,+})^2_{Y,\bar{Y}} = \dim(\mathscr{C})$:

$$\begin{aligned}\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} S^{+,+}_{Y,X}S^{+,+}_{X,\bar{Y}} &= \sum_{X,W\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N^W_{Y,\bar{Y}}\dim^+(X)S^{+,+}_{X,W}\\ &= \sum_{W\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(W)N^W_{Y,\bar{Y}}\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(X)s^+_W(X).\end{aligned}$$

Mais $\dim^+(X) = s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X) = s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X^*)$ et donc la seconde somme est nulle sauf si $W = \bar{\mathbf{1}}$ et vaut alors

$$\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(X)s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X) = \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(X)\dim^-(X) = \dim(\mathscr{C}).$$

Enfin, comme $\bar{Y} \simeq Y^*\otimes\bar{\mathbf{1}}$, on a $N^{\bar{\mathbf{1}}}_{Y,\bar{Y}} = N^{\mathbf{1}}_{Y,Y^*} = 1$ et ainsi $(S^{+,+})^2_{Y,\bar{Y}} = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim(\mathscr{C})$. □

Corollaire 3.1.20 (Formule de Verlinde)**.** *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée ainsi que $X, Y, Z \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$. Les constantes de structure de* $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ *sont données par*

$$N^Z_{X,Y} = \frac{1}{\dim(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\sum_{W\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\frac{S^{+,+}_{W,X}S^{+,+}_{W,Y}S^{+,+}_{W,\bar{Z}}}{\dim^+(W)}.$$

Comme expliqué dans la partie 3.1.1, se donner une structure pivotale sur une catégorie tressée est la même chose que se donner un twist. On note θ le twist de $\mathscr{C}$ associé à la structure pivotale.

Lemme 3.1.21. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée. Alors pour X simple, $\theta_{\bar{X}} = \theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_X$.*

Démonstration. La trace du morphisme $\theta_{X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}} = \theta_{X^*}\otimes\theta_{\bar{\mathbf{1}}}\circ c_{\bar{\mathbf{1}},X^*}\circ c_{X^*,\bar{\mathbf{1}}}$ donne

$$\begin{aligned}\theta_{\bar{X}}\dim^+(\bar{X}) = \theta_{X^*}\theta_{\bar{\mathbf{1}}}S^{+,+}_{X^*,\bar{\mathbf{1}}} &= \theta_{X^*}\theta_{\bar{\mathbf{1}}}\dim^+(\bar{\mathbf{1}})s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X^*)\\ &= \theta_{X^*}\theta_{\bar{\mathbf{1}}}\dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim^+(X).\end{aligned}$$

L'égalité $\theta_{\bar{X}} = \theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_X$ découle immédiatement du fait que $\bar{X} \simeq X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}$ et de la proposition 3.1.12. □

Remarque 3.1.22. En prenant pour X l'objet simple $\bar{\mathbf{1}}$, on obtient que $\theta^2_{\bar{\mathbf{1}}} = 1$.

Proposition 3.1.23. *Pour $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée on a*

$$\tau^+(\mathscr{C})\tau^-(\mathscr{C}) = \dim(\mathscr{C}). \tag{3.5}$$

Démonstration. En multipliant (3.3) par $\dim^-(Y)$ et en sommant sur $Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, on obtient

$$\begin{aligned}\tau^+(\mathscr{C})\tau^-(\mathscr{C}) &= \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\left(\sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^-(Y)S^{+,+}_{X,Y}\right)\theta_X\dim^-(X)\\ &= \sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\dim^+(Y)\dim^-(Y),\end{aligned}$$

grâce à l'orthogonalité des caractères et la non dégénérescence de $\mathscr{C}$. □

Proposition 3.1.24. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée. Alors $\theta_{\bar{\mathbf{1}}} = 1$ et ainsi $\theta_{\bar{X}} = \theta_X$ pour X simple.*

Démonstration. En multipliant (3.3) par $S^{+,+}_{Y,Z}$ et en sommant sur $Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, on obtient

$$\begin{aligned}\tau^+(\mathscr{C})\sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\theta_Y^{-1}\dim^+(Y)S^{+,+}_{Y,Z} &= \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\left(\sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}S^{+,+}_{X,Y}S^{+,+}_{Y,Z}\right)\theta_X\dim^-(X)\\ &= \theta_{\bar{Z}}\dim^-(\bar{Z})\dim(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}}),\end{aligned}$$

en utilisant la proposition 3.1.19. En utilisant le fait que $\theta_{\bar{Z}} = \theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_Z$ et que $\bar{Z} \simeq Z^* \otimes \bar{\mathbf{1}}$, on trouve que

$$\theta_{\bar{Z}}\dim^-(\bar{Z})\dim(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}}) = \theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_Z\dim^+(Z)\dim(\mathscr{C})|\bar{\mathbf{1}}|^2.$$

Mais $|\bar{\mathbf{1}}|^2 = 1$ car $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et en utilisant la proposition 3.1.23, on arrive à

$$\sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}\theta_Y^{-1}\dim^+(Y)S^{+,+}_{Y,Z} = \theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_Z\dim^+(Z)\tau^-(\mathscr{C}).$$

En comparant avec (3.4), on trouve que pour tout objet simple Z,

$$\theta_{\bar{\mathbf{1}}}\theta_Z\dim^+(Z)\tau^-(\mathscr{C}) = \theta_Z\dim^+(Z)\tau^-(\mathscr{C}),$$

ce qui, avec $Z = \mathbf{1}$, et en utilisant le fait que $\tau^-(\mathscr{C}) \neq 0$, donne $\theta_{\bar{\mathbf{1}}} = 1$. □

Représentation du groupe modulaire

Le groupe modulaire est le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1. Ce groupe est engendré par les matrices

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{t} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

et admet pour présentation

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \mid \mathfrak{s}^4 = 1, (\mathfrak{s}\mathfrak{t})^3 = \mathfrak{s}^2\rangle.$$

Définissons la T-matrice de la catégorie $\mathscr{C}$ comme la matrice diagonale T dont les entrées sont $(\theta_X^{-1})_{X\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C})}$. La dimension de $\mathscr{C}$ étant un nombre totalement positif, on note $\sqrt{\dim(\mathscr{C})}$ sa racine carrée positive pour un plongement $\Bbbk_{\mathrm{alg}} \to \mathbb{C}$ que l'on fixe. On choisit également une racine carrée $\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$ de $\dim^+(\bar{\mathbf{1}})$. On obtient ainsi l'analogue non sphérique de [EGNO15, Theorem 8.16.1] :

Théorème 3.1.25. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée. On a* $(S^{+,+}T)^3 = \tau^-(\mathscr{C})(S^{+,+})^2$ *et* $(S^{+,+})^4 = (\dim(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}}))^2\,\mathrm{id}$. *Ainsi*

$$\mathfrak{s} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\sqrt{\dim(\mathscr{C})}} S^{+,+} \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{t} \mapsto T$$

définissent une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de [EGNO15, Theorem 8.16.1]. □

La renormalisation $\tilde{S}^{+,+}$ de $S^{+,+}$ est faite pour que $(\tilde{S}^{+,+})^4 = \mathrm{id}$. Par contre, on a $(\tilde{S}^{+,+}T)^3 = \xi(\mathscr{C})^{-1}(\tilde{S}^{+,+})^2$ où $\xi(\mathscr{C}) = \frac{\tau^+(\mathscr{C})}{\sqrt{\dim(\mathscr{C})}}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$. On a aussi $(\tilde{S}^{+,+}T^{-1})^3 = \xi(\mathscr{C})\,\mathrm{id}$ d'après le lemme 2.1.2. De plus, comme $\tilde{S}^{+,+}$ a son carré donné par la matrice E et comme $\theta_{\bar{X}} = \theta_X$ pour tout $X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, les matrices $(S^{+,+})^2$ et T commutent.

Corollaire 3.1.26. *Supposons que le corps de base soit* $\mathbb{C}$. *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée. Le quadruplet* $(\mathrm{Irr}(\mathscr{C}), \tilde{S}^{+,+}, T, \mathbf{1})$ *est une donnée* $\mathbb{N}$*-modulaire.*

Démonstration. Il reste à montrer que $\tilde{S}^{+,+}$ est unitaire. Comme le carré de cette matrice est donné par la matrice de permutation associée à $\bar{\ }$, on doit montrer que pour tous objets simples X et Y, on a

$$\overline{\tilde{S}^{+,+}_{X,Y}} = \tilde{S}^{+,+}_{X,\bar{Y}}.$$

La même preuve que celle de [ENO05, Proposition 2.12] montre que

$$\overline{\left(\frac{\tilde{S}^{+,+}_{X,Y}}{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}}\right)} = \frac{\tilde{S}^{+,+}_{X^*,Y}}{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}}.$$

On déduit donc que

$$\overline{\tilde{S}^{+,+}_{X,Y}} = \frac{\overline{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}}}{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}}\tilde{S}^{+,+}_{X^*,Y} = \frac{\overline{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}}}{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},\bar{Y}}}\tilde{S}^{+,+}_{X,\bar{Y}},$$

par définition de l'involution $\bar{\ }$.

Or $\overline{\tilde{S}^{+,+}_{\mathbf{1},Y}} = \sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\dim^+(Y^*)(\sqrt{\dim(\mathscr{C})})^{-1}$, puisque $\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$ est une racine de l'unité. On conclut en utilisant le fait que $\bar{Y} \simeq Y^* \otimes \bar{\mathbf{1}}$. □

Définition 3.1.27. On dira qu'une catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{C}$ est une catégorification de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(I, \mathbb{S}, \mathbb{T}, i_0)$ s'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}((d_i)_{i\in I})$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$ et une bijection $\varphi : I \longrightarrow \mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ telles que la donnée $\mathbb{N}$-modulaire $(\mathrm{Irr}(\mathscr{C}), \tilde{S}^{+,+}, T, \mathbf{1})$ et la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(I, D\mathbb{S}D^{-1}, \mathbb{T}, i_0)$ sont égales à une racine quatrième de l'unité λ près, c'est-à-dire :

$$\varphi(i_0) = \mathbf{1}, \mathbb{S}_{i,j} = \lambda d_i d_j \tilde{S}^{+,+}_{\varphi(i),\varphi(j)} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_i = T_{\varphi(i)},$$

pour tous $i, j \in I$.

En particulier, lorsque la catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée $\mathscr{C}$ est une catégorification d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(I, \mathbb{S}, \mathbb{T}, i_0)$, on dispose d'un isomorphisme d'anneaux $A_{\mathbb{S}} \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$, et la modification $(I, D\mathbb{S}D^{-1}, \mathbb{T}, i_0)$ est une donnée $\mathbb{N}$-modulaire.

3.2 Structure pivotale non sphérique sur $D(G)$-mod

Soit G un groupe fini. Son double de Drinfeld $D(G)$ est une algèbre de Hopf tressée semi-simple et on peut munir sa catégorie de modules d'une structure sphérique qui en fait une catégorie modulaire. Pour illustrer la partie précédente par un exemple, on modifie cette structure sphérique par le biais d'un élément $x \in D(G)$ central de type groupe. La catégorie de fusion ainsi obtenue est alors munie d'une structure pivotale, qui n'est pas nécessairement sphérique. Dans le cas particulier où G est le groupe abélien $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$, on montre que la donnée $\mathbb{N}$-modulaire obtenue grâce à la catégorie $D(G)$-mod donne une catégorification de la donnée modulaire associée à une famille de caractères unipotents du groupe $G(d,1,k(k+1))$.

3.2.1 Double de Drinfeld d'un groupe fini

Le double de Drinfeld d'un groupe fini est le cas particulier d'une construction plus générale qui s'applique à n'importe quelle algèbre de Hopf de dimension finie [Ka95, Chapter IX]. Soit $\mathbb{C}G$ l'algèbre de groupe de G et $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre des fonctions sur G. On note g l'élément de $\mathbb{C}G$ correspondant à l'élément g de G, et on note e_g la fonction sur G égale au dirac en g. L'algèbre $D(G)$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, au produit tensoriel $\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}G$. Elle admet donc $(e_g h)_{g,h\in G}$ pour base et la multiplication sur la base est définie par

$$(e_g h)(e_{g'} h') = \delta_{g,hg'h^{-1}} e_g(hh').$$

L'élément neutre correspond à la fonction $\sum_{g\in G} e_g$, fonction constante égale à 1.

L'algèbre $D(G)$ est également une algèbre de Hopf, son coproduit Δ, sa counité ε et son antipode S étant définis par

$$\Delta(e_g g') = \sum_{g_1 g_2 = g} e_{g_1} g' \otimes e_{g_2} g', \quad \varepsilon(e_g g') = \delta_{g,1}, \quad \text{et} \quad S(e_g g') = g'^{-1} e_{g^{-1}} = e_{g'^{-1}g^{-1}g'} g'^{-1}.$$

Ainsi la catégorie $D(G)$-mod des représentations de dimension finie de l'algèbre $D(G)$ est une catégorie de fusion [BK01, Section 3.2].

Cette algèbre dispose également d'une R-matrice universelle

$$R = \sum_{g\in G} g \otimes e_g,$$

ce qui permet de tresser la catégorie de modules $D(G)$-mod [Ka95, Proposition XIII.1.4]. Comme le carré de l'antipode est l'identité, n'importe quel élément x de type groupe et dans le centre de $D(G)$ permet de définir une structure pivotale via

$$a_{x,V} : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} \\ v & \longmapsto & (\phi \in V^* \mapsto \phi(x\cdot v)) \end{array} \right. .$$

La structure sphérique a_1 sera smplement notée a.

Lemme 3.2.1. *Soient $g_0 \in G$ et $\alpha : G \to \mathbb{C}^*$ un caractère multiplicatif. Alors l'élément $x_{g_0,\alpha} = \sum_{g\in G} \alpha(g) e_g g_0$ est de type groupe dans $D(G)$. Réciproquement, tout élément de type groupe est de cette forme.*

Un tel élément de type groupe est central si et seulement si g_0 est dans le centre de G.

Démonstration. Il est clair qu'un tel élément est de type groupe. Considérons alors $x = \sum_{a,b\in G} \alpha_{a,b} e_a b$ un élément de type groupe. Comme $\varepsilon(x) = 1$, il existe $h_0, g_0 \in G$ tels que $\alpha_{h_0,g_0} \neq 0$. Puisque

$$x \otimes x = \sum_{a,b,p,q\in G} \alpha_{a,b}\alpha_{p,q} e_a b \otimes e_p q \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \sum_{g,p,q} \alpha_{pq,g} e_p g \otimes e_q g,$$

on voit que $\alpha_{a,b}\alpha_{p,q} = 0$ si $b \neq q$. Ainsi $\alpha_{a,b} = 0$ si $b \neq g_0$. Si $b = g_0$, on doit avoir $\alpha_{p,g_0}\alpha_{q,g_0} = \alpha_{pq,g_0}$ comme souhaité.

De plus, $\sum_{g\in G} \alpha(g) e_g g_0$ est central si et seulement si

$$\alpha(k^{-1}hk)e_h k g_0 = \alpha(g_0 h g_0^{-1}) e_{g_0 h g_0^{-1}} g_0 k,$$

pour tous $h, k \in G$, ce qui est en effet équivalent à $g \in Z(G)$. □

Afin de simplifier, on note $a_{g_0,\alpha}$ la structure pivotale associée à l'élément de type groupe et central $x_{g_0,\alpha}$ et on la note a_{g_0} si $\alpha = 1$. Les traces quantiques positive et négative associées à la structure pivotale $a_{g_0,\alpha}$ d'un endomorphisme f de V sont alors données par

$$\mathrm{Tr}^+_V(f) = \mathrm{tr}_V(x_{g_0,\alpha} f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}^-_V(f) = \mathrm{tr}_V(f x^{-1}_{g_0,\alpha}) = \mathrm{tr}_V(f x_{g_0^{-1},\alpha^{-1}}),$$

tr désignant la trace usuelle. On obtient comme ceci toutes les structures pivotales de la catégorie $D(G)$-mod, puisque deux structures pivotales diffèrent d'un isomorphisme naturel et monoïdal du foncteur identité, et que ces isomorphismes sont en bijection avec le groupe des inversibles de $D(G)$-mod d'après [GN08, Theorem 6.2].

Pour calculer le twist associé à la structure pivotale $a_{x_{g_0,\alpha}}$, on a besoin de connaître le morphisme de Drinfeld dans la catégorie $D(G)$-mod. Il est donné par l'action de l'élément de Drinfeld $u = \sum_{g\in G} e_{g^{-1}} g$. Cet élément vérifie [Ka95, Proposition VIII.4.5]

$$\varepsilon(u) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(u) = (R_{21}R)^{-1} u \otimes u.$$

Le twist $\theta_{g_0,\alpha}$ associé à la structure pivotale $a_{g_0,\alpha}$ est alors donné par l'action de l'élément $x_{g_0,\alpha} u^{-1}$ de $D(G)$.

Proposition 3.2.2. *La structure pivotale $a_{g_0,\alpha}$ est sphérique si et seulement si $\alpha^2 = 1$ et $g_0^2 = 1$.*

Démonstration. La structure pivotale $a_{g_0,\alpha}$ est sphérique si et seulement si le twist $\theta_{g_0,\alpha}$ est un ruban. Or c'est le cas si et seulement si $S(x_{g_0,\alpha} u^{-1}) = x_{g_0,\alpha} u^{-1}$. Puisqu'ici $S(u) = u$, et $S(x_{g_0,\alpha}) = x_{g_0^{-1},\alpha^{-1}}$, cette condition est équivalente à

$$\sum_{g\in G} \alpha(g)^{-1} e_g g_0^{-1} = \sum_{g\in G} \alpha(g) e_g g_0,$$

le résultat découle du fait que $(e_g h)_{g,h\in G}$ est une base de $D(G)$. □

3.2.2 Représentations simples de $D(G)$ et S-matrice

Comme les éléments $(e_g)_{g\in G}$ satisfont $e_g e_{g'} = \delta_{g,g'} e_g$, tout $D(G)$-module V est gradué par le groupe G :

$$V = \bigoplus_{g\in G} V_g,$$

où $V_g = e_g V$. De plus, on a $g(V_{g'}) \subset V_{gg'g^{-1}}$ et e_g est simplement la projection sur V_g. Un $D(G)$-module simple est donc supporté par une classe de conjugaison de G. Les $D(G)$-modules simples sont en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences des couples (g,ρ), $g \in G$et $\rho \in \mathrm{Irr}(Z_G(g))$, modulo la relation $(g,\rho) \sim (hgh^{-1}, {}^h\rho)$ pour tout $h \in G$.

On peut construire le module simple $V_{g,\rho}$ comme suit. Soit V_ρ l'espace de la représentation ρ. On en fait un module pour l'algèbre $D_G(Z_G(g))$ engendrée par les $e_a b$, $a \in G, b \in Z_G(g)$ via

$$e_a b \cdot v = \delta_{a,g}\rho(b)(v),$$

pour tous $a \in G, b \in Z_G(g)$ et $v \in V_\rho$. Le module simple $V_{g,\rho}$ est alors l'induction à $D(g)$ du $D_G(Z_G(g))$-module V_ρ :

$$V_{g,\rho} = D(G) \otimes_{D_G(Z_G(g))} V_\rho,$$

et la composante de degrée h de $V_{g,\rho}$ est donnée par

$$(V_{g,\rho})_h = \begin{cases} e_h r \otimes_{D_G(Z_G(g))} V_\rho & \text{si } h = rgr^{-1}, \\ 0 & \text{si } h \text{ n'est pas conjugué à } g. \end{cases}$$

L'action de $e_a b$ sur un élément $e_p q \otimes_{D_G(Z_G(g))} v$ de $V_{g,\rho}$ est alors donnée par

$$e_a b \cdot e_p q \otimes_{D_G(Z_G(g))} v = \delta_{a,bpb^{-1}} e_a c \otimes_{D_G(Z_G(g))} \rho(d)(v), \tag{3.6}$$

où $c \in G$ et $d \in Z_G(g)$ sont tels que $bq = cd$.

Proposition 3.2.3. *Soit $g_0 \in G$ central et α un caractère multiplicatif de G. La catégorie de fusion tressée $D(G)$*-mod *munie de la structure pivotale $a_{g_0,\alpha}$ est non dégénérée. La S-matrice et les valeurs du twist sur les objets simples sont données par*

$$S^{++}_{(g,\rho),(h,\pi)} = \alpha(g)\alpha(h)\omega_\rho(g_0)\omega_\pi(g_0)\frac{|G|}{|Z_G(g)||Z_G(h)|}\sum_{\substack{l\in G\\ lhl^{-1}\in Z_G(g)}} \chi_\rho(lhl^{-1})\chi_\pi(l^{-1}gl),$$

$$\theta_{V_{g,\rho}} = \alpha(g)\omega_\rho(gg_0),$$

où ω_ρ et ω_π désignent les caractères centraux associés aux représentations ρ et π.

Démonstration. Puisque la structure pivotale a_{α,g_0} diffère de la structure sphérique a par l'action de l'élément central $x_{g_0,\alpha}$, on se restreint tout d'abord au cas où $g_0 = 1$ et $\alpha = 1$.

On commence par calculer le twist θ qui est donné par l'action de l'élément central u^{-1}. Comme $u^{-1} = \sum_{h\in G} e_h h$, il découle de (3.6) que l'élément central u^{-1} agit par le scalaire $\omega_\rho(g)$ sur $V_{g,\rho}$.

En ce qui concerne le calcul de la S-matrice, on utilise la relation

$$\theta_{V_{g,\rho}}\theta_{V_{h,\pi}} S_{(g,\rho),(h,\pi)} = \mathrm{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}).$$

Choisissons pour tout $a \in [g]$ un élément $g_a \in G$ tel que $a = g_a g g_a^{-1}$, et pour tout $b \in [h]$, un élément $h_b \in G$ tel que $b = h_b h h_b^{-1}$.

Pour $v \in V_\rho, w \in V_\pi, a \in [g]$ et $b \in [h]$, on a

$$\theta_{V_{g,\rho},V_{h,\pi}}((e_a g_a \otimes v) \otimes (e_b h_h \otimes w)) = (e_{abab^{-1}a^{-1}} abg_a \otimes v) \otimes (e_{aba^{-1}} abh_b \otimes w),$$

et cet élément est dans $(V_{g,\rho})_{abab^{-1}a^{-1}} \otimes (V_{h,\pi})_{aba^{-1}}$. Seuls les éléments dans $(V_{g,\rho})_a \otimes (V_{h,\pi})_b$ contribuent donc à la trace, et l'expression précédente se simplifie en

$$\theta_{V_{g,\rho},V_{h,\pi}}((e_a g_a \otimes v)\otimes(e_b h_h \otimes w)) = (e_a g_a \otimes \rho(g g_a^{-1} b g_a)(v)) \otimes (a_b h_b \otimes \pi(h h_b^{-1} a h_b)(w)).$$

En prenant la trace, on obtient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}) &= \omega_\rho(g)\omega_\pi(h) \sum_{\substack{a\in[g]\\ b\in[h]\\ ab=ba}} \chi_\rho(g_a^{-1} b g_a)\chi_\pi(h_b^{-1} a h_b)\\ &= \omega_\rho(g)\omega_\pi(h)\frac{|G|}{|Z_G(g)||Z_G(h)|} \sum_{\substack{l\in G\\ lhl^{-1}\in Z_G(g)}} \chi_\rho(lhl^{-1})\chi_\pi(l^{-1}gl).\end{aligned}$$

Ceci permet donc de conclure quant à la formule pour la S-matrice. □

Afin de décrire l'involution $\bar{\ }$ remplaçant la dualité, il suffit de comprendre l'objet $\bar{\mathbf{1}}$.

Lemme 3.2.4. *Si l'on munit* $D(G)$-mod *de la structure pivotale a_{α,g_0} associée à l'élément central $g_0 \in G$, l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est isomorphe à $V_{g_0^{-2},\alpha^{-2}}$.*

Démonstration. On cherche l'unique paire (h,π) telle que le caractère $s^+_{V_{h,\pi}}$ soit égal à la dimension quantique négative. Il est clair que d'une part $\dim^-(V_{g,\rho}) = \alpha(g)^{-1}\chi_\rho(g_0^{-1})\left|[g]\right|$ et d'autre part,

$$s^+_{V_{g_0^{-2},\alpha^{-2}}}(V_{g,\rho}) = \alpha(g)\omega_\rho(g_0)\frac{|G|}{|Z_G(g)||G|}\sum_{l\in G}\alpha(lgl^{-1})^{-2}\chi_\rho(g_0^{-2}) = \alpha(g)^{-1}\chi_\rho(g_0^{-1})\left|[g]\right|.$$

□

Remarque 3.2.5. On retrouve le fait que $\bar{\mathbf{1}}$ est isomorphe à $\mathbf{1}$ si et seulement si $g_0^2 = 1$ et $\alpha^2 = 1$.

3.2.3 Double de Drinfeld de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$

Soient $k \geq 1$ et $d \geq 2$ des entiers, et ζ une racine primitive d-ième de l'unité. On considère à partir de maintenant le cas où $G = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$. Le groupe G étant commutatif, toutes les classes de conjugaison sont des singletons et tous les centralisateurs sont le groupe G tout entier. Ainsi

$$\mathrm{Irr}(D(G)\text{-mod}) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{(g,\rho) \mid g\in G \text{ et } \rho\in\mathrm{Irr}(G)\},$$

et le module correspondant $V_{g,\rho}$ est de dimension 1. On va considérer les éléments de G comme des k-uplets et on utilise désormais une notation additive. Identifions alors G à $\mathrm{Irr}(G)$ en associant à $g \in G$ la représentation de dimension 1 sur laquelle $g' \in G$ agit par multiplication par $\zeta^{\langle g,g'\rangle}$, $\langle g,g'\rangle$ étant par définition $\sum_{i=1}^k g_i g_i'$, le produit étant entendu dans l'anneau $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.6. *Pour $g_0 \in G$ et α un caractère irréductible de G, la S-matrice de la catégorie $D(G)$-mod pour la structure pivotale a_{α,g_0} est donnée par*

$$S^{++}_{(g,g'),(h,h')} = \alpha(g)\alpha(h)\zeta^{\langle g_0+g,h'\rangle+\langle g',g_0+h\rangle},$$

pour tous $(g,g'),(h,h') \in \mathrm{Irr}(D(G)\text{-mod})$.

Le twist θ associé à la structure pivotale a_{α,g_0} sur l'objet simple $V_{g,g'}$ est donné par

$$\theta_{(g,g')} = \alpha(g)\zeta^{\langle g_0+g,g'\rangle}.$$

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition 3.2.3. □

Remarque 3.2.7. Si $d = 2$, toutes les structures pivotales a_{α,g_0} sont sphériques puisque $2g_0 = 0$ et $\alpha^2 = 1$ dans ce cas précis.

La dimension de la catégorie $D((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)$-mod est d^{2k} puisque tout objet simple est inversible, donc de norme carré égale à 1 ; la racine carrée positive de la dimension de cette catégorie est alors d^k. Pour la structure pivotale a_{g_0}, l'objet $\mathbf{\bar{1}}$ est de dimension quantique positive 1 dont on choisit bien entendu 1 pour racine carré.

Avec ces renormalisations, la matrice $\tilde{S}$ pour la structure pivotale a_{g_0} est donnée par

$$\tilde{S}_{(g,g'),(h,h')} = \frac{\zeta^{\langle g_0+g,h'\rangle+\langle g',g_0+h\rangle}}{d^k}.$$

3.2.4 Une famille de $G(d,1,k(k+1))$

Soit $\mathscr{F}$ la famille de caractères de $\mathrm{Uch}(G(d,1,k(k+1)))$ dont les symboles ont pour contenu le multiensemble

$$\{0^{d-1}, 1^{d-1}, \ldots, (k-1)^{d-1}, k^1, (k+1)^1, \ldots, (2k)^1\},$$

l'exposant indiquant la multiplicité de l'entier considéré. La taille d'un symbole de cette famille est $k(d-1)+k+1 = kd+1$ et on vérifie que son rang est bien $k(k+1)$. De plus, le cardinal de $\mathscr{F}$ est d^{2k}.

On note alors $Y = \{0,1,\ldots,kd\}$ et on choisit pour $\pi\colon Y \to \mathbb{N}$ la fonction définie par

$$\pi(y) = \begin{cases} y+k & \text{si } 0 \le y \le k,\\ \left\lfloor \frac{y-k-1}{d-1} \right\rfloor & \text{sinon,}\end{cases}$$

et on considère les ensembles $\Psi(Y,\pi)$ et $\Psi^\#(Y,\pi)$ définis dans la partie 2.2.2. Pour une fonction $f \in \Psi(Y,\pi)$ et pour $0 \le i \le k-1$, $f(\pi^{-1}(i))$ est de cardinal $d-1$ et donc il existe un unique entier $k_i(f) \in \{0,\ldots,d-1\}$ tel que $k_i(f) \notin f(\pi^{-1}(i))$. L'application

$$\begin{cases} \Psi(Y,\pi) & \longrightarrow & \{0,\ldots,d-1\}^{2k+1}\\ f & \longmapsto & (f(0),\ldots,f(k),k_0(f),\ldots,k_{k-1}(f))\end{cases}$$

est alors bijective et, de plus, la fonction $f \in \Psi(Y,\pi)$ est dans $\Psi^\#(Y,\pi)$ si et seulement si $\sum_{i=0}^k f(i) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} k_i(f) \mod d$.

Le symbole spécial de la famille est donné par la fonction $f_{\mathrm{sp}} \in \Psi^\#(Y,\pi)$ vérifiant

$$f_{\mathrm{sp}}(i) = k-i, \text{ pour tous } 0 \le i \le k \quad \text{et} \quad k_i(f_{\mathrm{sp}}) = i+1, \text{ pour tous } 0 \le i \le k-1.$$

Lemme 3.2.8. *Soient* $0 \leq i, j < d$. *Alors*

$$\left(\bigwedge^{d-1} \mathscr{S}\right)_{\hat{\imath},\hat{\jmath}} = (-1)^{i+j} \frac{(-1)^{\binom{d}{2}} \tau(d)}{d} \zeta^{-ij},$$

où $\hat{\imath}$ *est le* $(d-1)$*-uplet* $(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d-1)$.

Démonstration. Voir [BR17a, Lemma 6.2]. □

La matrice de Fourier associée à la famille $\mathscr{F}$ s'écrit alors

$$\mathbb{S}_{f,g} = (-1)^{k(d-1)+k\binom{d}{2}} \left(\frac{\overline{\tau(d)}}{\tau(d)}\right)^k \varepsilon(f)\varepsilon(g)(-1)^{\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)+k_i(g))} \frac{\zeta^{\sum_{i=0}^{k-1} k_i(f)k_i(g) - \sum_{i=0}^{k} f(i)g(i)}}{d^k},$$

pour $f, g \in \Psi^{\#}(Y, \pi)$. Remarquons que $\overline{\tau(d)} = (-1)^{\binom{d-1}{2}}\tau(d)$ et ainsi $(-1)^{k(d-1)+k\binom{d}{2}}\left(\frac{\overline{\tau(d)}}{\tau(d)}\right)^k = 1$. Arrangeons la puissance de ζ en utilisant le fait que f et g sont dans $\Psi^{\#}(Y,\pi)$. Modulo d, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} k_i(f)k_i(g) - \sum_{i=0}^{k} f(i)g(i)& \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)k_i(g) - f(k-1-i)g(k-1-i)) \\
&\quad - \sum_{0\leq i,j\leq k-1} (k_i(f) - f(k-1-i))(k_j(g) - g(k-1-j)) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f) - f(k-1-i))g(k-1-i) + \sum_{i=0}^{k-1}(k_i(g) - g(k-1-i))f(k-1-i) \\
&\quad - \sum_{0\leq i\neq j\leq k-1} (k_i(f) - f(k-1-i))(k_j(g) - g(k-1-j)) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\Bigg[(k_i(f) - f(k-1-i))\left(\sum_{j=0}^{i} g(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1} k_j(g)\right) \\
&\qquad + (k_i(g) - g(k-1-i))\left(\sum_{j=0}^{i} f(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1} k_j(f)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Notons alors $\varphi : \Psi^{\#}(Y,\pi) \longrightarrow ((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)^2$ l'application bijective

$$f \mapsto \left(\left(\sum_{j=0}^{i} f(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1} k_j(f)\right)_{0\leq i\leq k-1}, \left((k_i(f) - f(k-1-i))\right)_{0\leq i\leq k-1}\right),$$

de sorte qu'en notant $\varphi_i(f)$ la i-ème composante de φ, pour $i \in \{1,2\}$, on trouve

$$\mathbb{S}_{f,g} = (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)+k_i(g))} \varepsilon(f)\varepsilon(g) \frac{\zeta^{\langle\varphi_1(f),\varphi_2(g)\rangle + \langle\varphi_2(f),\varphi_1(g)\rangle}}{d^k},$$

pour tous $f, g \in \Psi^{\#}(Y,\pi)$.

Passons au calcul des valeurs propres du Frobenius. Par définition, en ayant fixé au préalable ζ_* une racine $12d$-ième de l'unité telle que $\zeta_*^{12} = \zeta$, on a

$$\mathrm{Fr}(f) = \zeta_*^{kd(1-d^2)} \prod_{y\in Y} \zeta_*^{-6(f(y)^2+df(y))},$$

pour tout $f \in \Psi^\#(Y,\pi)$. Écrivons alors $\mathrm{Fr}(f) = \zeta_*^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}/12d\mathbb{Z}$ égal à

$$\alpha = kd(1-d^2) - 6\sum_{y\in Y}(f(y)^2 + df(y)).$$

Par définition des entiers $k_i(f)$, on obtient que

$$\alpha = kd(1-d^2) - 6k\sum_{i=0}^{d-1}(i^2+di) + 6\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)^2 + dk_i(f)) - 6\sum_{i=0}^{k}(f(i)^2+df(i)).$$

Or on vérifie que $d(1-d^2) - 6\sum_{i=0}^{d-1}(i^2+di) = -6d^2(d-1)$ et $d(d-1)$ étant pair, $6d^2(d-1)$ est nul dans $\mathbb{Z}/12d\mathbb{Z}$. Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que $f(k) = \sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f) - f(i)) + \eta d$, $\eta \in \mathbb{Z}$. On trouve alors que

$$f(k)^2 + df(k) = \left(\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f) - f(i))\right)^2 + d\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(i)) + \eta(\eta+1)d^2,$$

et donc que, modulo $12d$,

$$6\sum_{i=0}^{k}(f(i)^2+df(i)) \equiv 6\sum_{i=0}^{k-1}(f(i)^2+df(i)) + 6\left(\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(i))\right)^2 + 6d\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(i)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha &= 6\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)^2 + dk_i(f)) - 6\sum_{i=0}^{k-1}(f(i)^2+df(i)) - 6\left(\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(i))\right)^2 - 6d\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(i))\\ &= 6\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)^2 - f(k-1-i)^2) - 6\left(\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f) - f(k-1-i))\right)^2.\end{aligned}$$

Le même calcul que pour la puissance de ζ dans la matrice $\mathbb{S}$ montre que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)^2 - f(k-1-i)^2) - \left(\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(k-1-i))\right)^2 =\\ &\qquad 2\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)-f(k-1-i))\left(\sum_{j=0}^{i} f(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1}k_j(f)\right),\end{aligned}$$

et finalement

$$\alpha = 12\langle\varphi_1(f), \varphi_2(f)\rangle.$$

Proposition 3.2.9. *La matrice de Fourier associée à la famille $\mathscr{F}$ est donnée par*

$$\mathbb{S}_{f,g} = (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1}(k_i(f)+k_i(g))}\varepsilon(f)\varepsilon(g)\frac{\zeta^{\langle\varphi_1(f),\varphi_2(g)\rangle + \langle\varphi_2(f),\varphi_1(g)\rangle}}{d^k},$$

pour tous $f, g \in \Psi^\#(Y,\pi)$.

La valeur propre du Frobenius correspondant à $f \in \Psi^\#(Y,\pi)$ est

$$\mathrm{Fr}(f) = \zeta^{\langle\varphi_1(f),\varphi_2(f)\rangle}.$$

3.2.5 Comparaison des deux données modulaires

On va maintenant comparer les deux données modulaires, en faisant de sorte que l'objet unité $V_{0,0}$ corresponde au symbole spécial f_{sp}. Considérons la bijection φ_{g_0} composée de la bijection φ avec la translation par $(-g_0, 0)$:

$$f \mapsto \left(\left(\sum_{j=0}^{i} f(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1} k_j(f) \right)_{0 \le i \le k-1} - g_0, \big((k_i(f) - f(k-1-i)) \big)_{0 \le i \le k-1} \right).$$

L'image du symbole spécial par φ est $((i+1)_{0 \le i \le k-1}, 0)$ donc on choisit pour g_0 l'élément $(1,2,\dots,k)$ de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$.

Théorème 3.2.10. *La catégorie de fusion* $D((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k)$-mod *munie de la structure pivotale* a_{g_0} *est une catégorification de la donnée modulaire associée à la famille* $\mathscr{F}$.

Plus précisément, la S*-matrice renormalisée* $\tilde{S}$ *et la matrice* $\mathbb{S}$ *sont reliées par*

$$\tilde{S}_{\varphi_{g_0}(f), \varphi_{g_0}(g)} = \mathrm{sgn}(f)\,\mathrm{sgn}(g)\,\mathbb{S}_{f,g},$$

pour tous $f, g \in \Psi^\#(Y, \pi)$*, avec* $\mathrm{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} k_i(f)} \varepsilon(f)$*, et le twist* θ_{g_0} *et la valeur du Frobenius sont reliés par*

$$(\theta_{g_0})_{\varphi_{g_0}(f)} = \mathrm{Fr}(f),$$

pour tout $f \in \Psi^\#(Y, \pi)$*.*

Remarque 3.2.11. Le symbole cospécial f_{cosp} correspond à l'objet $\overline{\mathbf{1}}$. En effet, dans ce cas le symbole cospécial est donné par

$$f_{\mathrm{cosp}}(i) = d - k + i, \text{ pour tous } 0 \le i < k \quad \text{et} \quad k_i(f_{\mathrm{sp}}) = d - i - 1, \text{ pour tous } 0 \le i \le k-1,$$

et ainsi $\sum_{j=0}^{i} f_{\mathrm{cosp}}(k-1-j) - \sum_{j=0}^{i-1} k_j(f_{\mathrm{cosp}}) = -i-1$ et $k_i(f) - f(k-1-i) = 0$ pour tout i, ce qui donne bien $\varphi_{g_0} = (-2g_0, 0)$.

Plus généralement, on a $\overline{V_{\varphi_{g_0}(f)}} = V_{\varphi_{g_0}(\overline{f})}$.

3.3 Catégories légèrement dégénérées

On commence par rappeler la notion de super-espace vectoriel, en soulignant les différences entre deux structures pivotales existantes. On s'intéresse ensuite aux catégories légèrement dégénérées et on montre que les S et T-matrices fournissent des données $\mathbb{Z}$-modulaires.

3.3.1 Les super-espaces vectoriels

Un *super-espace vectoriel* est un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, c'est-à-dire un espace vectoriel V muni de deux sous-espaces V_0 et V_1 tels que $V = V_0 \oplus V_1$. Pour $v \in V$ homogène, on notera $|v|$ son degré, c'est à dire $|v| = i$ si $v \in V_i$. Les éléments de V_0 sont dits *pairs* tandis que ceux de V_1 sont dits *impairs*.

Une application linéaire $f : V \to W$ entre deux super-espaces vectoriels est dite *paire* si $f(V_i) \subseteq W_i$ pour $i \in \{0,1\}$ et *impaire* si $f(V_i) \subseteq W_{1-i}$ pour $i \in \{0,1\}$. Ceci munit l'ensemble des applications linéaires de V dans W d'une structure de super-espace vectoriel de sorte que pour f et g homogènes et composables $|g\circ f| = |g| + |f|$.

Le produit tensoriel de deux super-espaces vectoriel V et W est encore muni d'une graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, à savoir $(V\otimes W)_0 = (V_0\otimes W_0)\oplus(V_1\otimes W_1)$ et $(V\otimes W)_1 = (V_0\otimes W_1)\oplus(V_1\otimes W_0)$. On définit le produit tensoriel de deux application homogènes $f\colon V\to V'$ et $g\colon W\to W'$ par

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = (-1)^{|v||g|} f(v)\otimes g(w),$$

pour v et w homogènes, de sorte que $|f\otimes g| = |f| + |g|$.

Si on considère la catégorie dont les objets sont les super-espaces vectoriels de dimension finie et les morphismes sont *toutes* les applications linéaires, on n'obtient pas une catégorie monoïdale, la relation

$$(g\circ f)\otimes(g'\circ f') = (-1)^{|f||g'|}(g\otimes g')\circ(f\otimes f')$$

étant vérifiée et $\otimes$ n'est pas un bifoncteur. Néanmoins, si on se restreint aux morphismes pairs, on obtient une catégorie monoïdale, que l'on notera sVect.

La catégorie sVect est de fusion, admet deux classes d'isomorphismes d'objets simples. Un premier représentant est l'espace noté $\mathbb{k}^{1|0}$ correspondant à un super-espace concentré en degré 0 et de dimension 1 : c'est l'unité pour $\otimes$. Le second représentant est l'espace noté $\mathbb{k}^{0|1}$ correspondant à un super-espace concentré en degré 1 et de dimension 1. Le dual à gauche de $V = V_0\oplus V_1$ est l'espace des formes linéaires $V\to\mathbb{k}^{1|0}$, $(V^*)_0$ étant le sous-espace des formes linéaires paires et $(V^*)_1$ celui des formes linéaires impaires. Les morphismes d'évaluation et de coévaluation sont les mêmes que pour un espace vectoriel.

La catégorie sVect peut être munie de deux structures pivotales distinctes. La première associe à $v\in V$ l'élément $\varphi\mapsto(-1)^{(|\varphi|+1)|v|}\varphi(v)$ de V^{**}. Si $f\colon V\to V$, on peut vérifier que les traces quantiques positive et négative de f sont égales à

$$\mathrm{Tr}^{\pm}_V(f) = \mathrm{tr}_{V_0}(f_{|V_0}) + \mathrm{tr}_{V_1}(f_{|V_1}),$$

tr désignant la trace usuelle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel. La dimension quantique d'un super-espace vectoriel V est alors sa dimension en tant qu'espace vectoriel, et en particulier est toujours positive.

La seconde change le signe relatif au degré des éléments : elle associe à $v\in V$ homogène l'élément $\varphi\mapsto(-1)^{|\varphi||v|}\varphi(v)$ de V^{**}. Si $f\colon V\to V$, on peut vérifier que les traces quantiques positive et négative de f sont égales à

$$\mathrm{Tr}^{\pm}_V(f) = \mathrm{tr}_{V_0}(f_{|V_0}) - \mathrm{tr}_{V_1}(f_{|V_1}),$$

qui est parfois appelée super-trace. La dimension quantique d'un super-espace vectoriel $V = V_0\oplus V_1$, que l'on note sdim, est alors $\mathrm{sdim}(V) = \dim(V_0) - \dim(V_1)$. Elle peut bien entendu être négative.

Enfin, la catégorie sVect est tressée, et est même symétrique. Le tressage tient compte de la graduation : pour $v\in V$ et $w\in W$ homogènes

$$c_{V,W}(v\otimes w) = (-1)^{|v||w|} w\otimes v.$$

Le morphisme de Drinfeld associe alors à $v\in V$ homogène l'élément $\varphi\mapsto(-1)^{|\varphi||v|}\varphi(v)$ de V^{**}. Si θ est le twist associé à la première structure pivotale, on a $\theta_{\mathbb{k}^{1|0}} = 1$ et $\theta_{\mathbb{k}^{0|1}} = -1$. Si θ est le twist associé à la seconde structure pivotale, on a $\theta_{\mathbb{k}^{1|0}} = \theta_{\mathbb{k}^{0|1}} = 1$. Pour les deux structures pivotales, on remarque que $\dim(\mathbb{k}^{0|1})\theta_{\mathbb{k}^{0|1}} = -1$.

3.3.2 Catégories légèrement dégénérées et S-matrice

Dans la partie 3.1.4, on a étudié des catégories avec un centre symétrique le plus petit possible, c'est-à-dire égal à la catégorie des espaces vectoriels. Ici, on s'intéresse à des catégories avec un centre symétrique un peu plus gros, égal à la catégorie sVect.

Définition 3.3.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée. On dit que $\mathscr{C}$ est *légèrement dégénérée* si son centre symétrique est égal à la catégorie sVect des super-espaces vectoriels.

On fixe désormais une catégorie $\mathscr{C}$ de fusion tressée et légèrement dégénérée, que l'on suppose également pivotale. On note $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'objet transparent correspondant au super-espace $\Bbbk^{0|1}$. En particulier, $\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}\simeq\mathbf{1}$. On ne suppose rien quant à la structure pivotale induite sur le centre symétrique. Puisque $\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}\simeq\mathbf{1}$, les deux dimensions quantiques de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont égales, et on note $\dim(\boldsymbol{\varepsilon})\in\{\pm1\}$ leur valeur commune. On dispose toujours de diverses S-matrices, et pour X simple, les morphismes s_X^+ et s_X^- sont toujours des caractères de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$.

Lemme 3.3.2. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée, pivotale et légèrment dégénérée. Pour tout objet simple X, s_X^+ et s_X^- sont des caractères de l'anneau quotient* $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}]-\dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$.

Démonstration. Comme $\boldsymbol{\varepsilon}$ est dans le centre symétrique, le double tressage de $\boldsymbol{\varepsilon}$ avec n'importe quel objet de $\mathscr{C}$ est l'identité. Ainsi $S^{++}_{W,\boldsymbol{\varepsilon}}=\dim^+(W)\dim(\boldsymbol{\varepsilon})$ pour W simple et on trouve bien que $s_W^{++}(\boldsymbol{\varepsilon})=\dim(\boldsymbol{\varepsilon})s_W^{++}(\mathbf{1})$. □

L'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant inversible, la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ induit une involution sur $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$. En vertu de [EGNO15, Proposition 9.15.4], pour tout objet simple X de $\mathscr{C}$, X et $\boldsymbol{\varepsilon}\otimes X$ ne sont pas isomorphes. La question suivante est soulevée dans [BGH+17, Question 2.8], dans un cadre où l'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est pas nécessairement transparent.

Conjecture 3.3.3. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée. Alors pour tous objets simples X,Y,Z de $\mathscr{C}$, on a $N_{X,Y}^{Z}N_{X,Y}^{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z}=0$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignant un générateur du centre symétrique.*

On choisit désormais $J\subset\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ un système de représentants sous l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$, de sorte que $\mathbf{1}\in J$. L'anneau $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$. La tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'ayant pas de point fixe, l'anneau quotient $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}]-\dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$ est également un $\mathbb{Z}$-module libre, une base étant donnée par J, donc le rang de cet anneau est la moitié de celui de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$. Pour $X,Y,Z\in J$ les constantes de structure de cet anneau quotient sont

$$sN_{X,Y}^{Z}=N_{X,Y}^{Z}+\dim(\boldsymbol{\varepsilon})N_{X,Y}^{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z}.$$

On remarque également que $s_X^+=s_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes X}^+$ pour tout objet simple X. Une application directe de [EGNO15, Theorem 8.20.7] montre que pour X et Y simples l'égalité entre caractères $s_X^+=s_Y^+$ est vérifiée si et seulement si $X\simeq Y$ ou $X\simeq\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Y$. La S-matrice S^{++} décrit alors tous les caractères de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}]-\dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$.

Ayant fait un choix J de représentants de $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ sous l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$, on peut à nouveau définir une involution $\bar{\ }$, non par sur $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ mais sur J. Pour $X\in J$, $\bar{X}$ est l'unique élément de J tel que les caractères $s_{\bar{X}}$ et $Y\mapsto s_X^+(Y^*)$ sont égaux.

Proposition 3.3.4. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée. Si* $\dim(\boldsymbol{\varepsilon})=1$ *alors l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible. Si* $\dim(\boldsymbol{\varepsilon})=-1$ *et si la conjecture 3.3.3 est vraie alors l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible.*

De plus, sous l'hypothèse d'inversibilité de $\bar{\mathbf{1}}$*, pour* $X \in J$*, on a* $\bar{X} \simeq X^* \otimes \bar{\mathbf{1}}$ *ou* $\bar{X} \simeq \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X^* \otimes \bar{\mathbf{1}}$ *selon les choix faits pour l'ensemble* J*.*

Démonstration. Similairement à la preuve de la proposition 3.1.17, on montre que pour tout objet simple X de $\mathscr{C}$, on a $s^+_X(\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*) = |\bar{\mathbf{1}}|^2$. Ainsi dans $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}] - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$ on a l'égalité $[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*] = |\bar{\mathbf{1}}|^2$. De là, il existe des scalaires $(n_X)_{X \in J}$ tels que dans $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ on ait

$$[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*] = |\bar{\mathbf{1}}|^2[\mathbf{1}] + \sum_{X \in J} n_X([X] - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X]).$$

Ces scalaires sont alors entiers vu la décomposition de $[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*]$ dans $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$. Or $N^{\mathbf{1}}_{X,X^*} = 1$ pour tout objet simple X et $N^{\boldsymbol{\varepsilon}}_{X,X^*} = 0$ puisque la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur l'ensemble des objets simples. On déduit donc que $n_{\mathbf{1}} = 0$ et que $|\bar{\mathbf{1}}|^2 = 1$ de sorte que

$$[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*] = [\mathbf{1}] + \sum_{X \in J \setminus \{\mathbf{1}\}} n_X([X] - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X]),$$

Si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1$ comme $[\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^*]$ est dans le monoïde engendré par $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$, le coefficient devant $X \in J$, $X \neq \mathbf{1}$, donne $n_X \geq 0$ et le coefficient devant $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ donne $n_X \leq 0$. D'où $\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}}^* \simeq \mathbf{1}$ et $\bar{\mathbf{1}}$ est bien inversible.

Si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ l'argument précédent ne permet pas de conclure. La validité de la conjecture 3.3.3 implique alors que $n_X = 0$ pour tout $X \in J$ et donc que $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible. □

Hypothèse. *À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du chapitre, on suppose que l'objet* $\bar{\mathbf{1}}$ *est inversible.*

Extrayons de S^{++} une sous-matrice carrée de rang maximal, à savoir la moitié de celui de S^{++}. On définit $\mathbf{S} = (S^{++}_{X,Y})_{X,Y \in J}$ de sorte que S^{++} s'écrit, en ordonnant convenablement $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}) = J \sqcup \boldsymbol{\varepsilon} \otimes J$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{S} \end{pmatrix},$$

selon si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1$ ou $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$. Un choix différent de J a pour effet de conjuguer la matrice $\mathbf{S}$ par une matrice diagonale avec entrées dans $\{\pm 1\}$.

Comme dans la partie 3.1.4, on définit une matrice carrée $E = (E_{X,Y})_{X,Y \in J}$ par $E_{X,Y} = (\dim(\boldsymbol{\varepsilon}))^{\delta_{X^* \otimes \bar{\mathbf{1}} \notin J}} \delta_{X,\bar{Y}}$. On introduit aussi la super-dimension de la catégorie $\mathscr{C}$ comme

$$\mathrm{sdim}(\mathscr{C}) = \sum_{X \in J} |X|^2 = \frac{1}{2} \dim(\mathscr{C}).$$

Cette dernière ne dépend pas du choix de l'ensemble J puisque $|\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X|^2 = |X|^2$.

Proposition 3.3.5. *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée telle que l'objet simple* $\bar{\mathbf{1}}$ *est inversible. Alors la matrice* $\mathbf{S}$ *vérifie* $\mathbf{S}^2 = \mathrm{sdim}(\mathscr{C}) \dim^+(\bar{\mathbf{1}}) E$*.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ tels que $\chi_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \chi_2(\boldsymbol{\varepsilon})$ alors

$$\sum_{W \in J} \chi_1(W)\chi_2(W^*) = 0.$$

En effet, en utilisant l'orthogonalité des caractères,

$$0=\sum_{W\in J}\chi_1(W)\chi_2(W^*)+\sum_{W\in J}\chi_1(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes W)\chi_2(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes W^*)=2\sum_{W\in J}\chi_1(W)\chi_2(W^*).$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.1.19, en utilisant le fait que pour X et Y dans J, $s_X^+=s_Y^+$ si et seulement si X et Y sont égaux, on montre que $(\mathbf{S}^2)_{X,Y}=0$ si $Y\neq\bar{X}$ et que $(\mathbf{S}^2)_{X,\bar{X}}=\operatorname{sdim}(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})sN^{\bar{\mathbf{1}}}_{X,\bar{X}}$. Or $sN^{\bar{\mathbf{1}}}_{X,\bar{X}}=1$ si $X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}\in J$ et $sN^{\bar{\mathbf{1}}}_{X,\bar{X}}=\dim(\boldsymbol{\varepsilon})$ si $X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}\notin J$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 3.3.6 (Formule de Verlinde)**.** *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée telle que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et $X,Y,Z\in\operatorname{Irr}(\mathscr{C})$. Les constantes de structure de* $\operatorname{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}]-\dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$ *sont données par*

$$sN^Z_{X,Y}=\frac{(\dim(\boldsymbol{\varepsilon}))^{\delta_{Z^*\otimes\bar{\mathbf{1}}\notin J}}}{\operatorname{sdim}(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\sum_{W\in J}\frac{\mathbf{S}_{W,X}\mathbf{S}_{W,Y}\mathbf{S}_{W,\bar{Z}}}{\dim^+(W)}.$$

3.3.3 Twist dans une catégorie légèrement dégénérée

Après l'étude de la S-matrice, on étudie la T-matrice d'une catégorie légèrement dégénérée, que l'on définit comme la matrice diagonale $\mathbf{T}$ avec entrées $(\theta_X^{-1})_{X\in J}$. Ici, on considère le twist θ associé à la structure pivotale de la catégorie $\mathscr{C}$. On va maintenant faire une hypothèse supplémentaire sur la structure pivotale de $\mathscr{C}$, motivée par plusieurs raisons. Tout d'abord on remarque que $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes X}=\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\theta_X$ et donc que si $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}=-1$, le twist dépend du choix de l'ensemble J.

Ensuite on aimerait que la relation pour $X,Y\in\operatorname{Irr}(\mathscr{C})$

$$\theta_X\theta_Y S^{++}_{X,Y}=\sum_{Z\in\operatorname{Irr}(\mathscr{C})}N^Z_{X,Y}\dim^+(Z)\theta_Z \tag{3.7}$$

s'exprime avec les constantes de structure sN de l'anneau quotient $\operatorname{Gr}(\mathscr{C})/([\boldsymbol{\varepsilon}]-\dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\mathbf{1}])$, c'est-à-dire pour $X,Y\in J$

$$\theta_X\theta_Y\mathbf{S}_{X,Y}=\sum_{Z\in J}sN^Z_{X,Y}\dim^+(Z)\theta_Z. \tag{3.8}$$

En écrivant (3.7) pour des éléments X et Y de J, on obtient

$$\begin{aligned}\theta_X\theta_Y\mathbf{S}_{X,Y}&=\sum_{Z\in\operatorname{Irr}(\mathscr{C})}N^Z_{X,Y}\dim^+(Z)\theta_Z\\&=\sum_{Z\in J}(N^Z_{X,Y}+\dim(\boldsymbol{\varepsilon})\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}N^{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z}_{X,Y})\dim^+(Z)\theta_Z\\&=\sum_{Z\in J}(N^Z_{X,Y}-N^{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z}_{X,Y})\dim^+(Z)\theta_Z,\end{aligned}$$

puisque $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\dim(\boldsymbol{\varepsilon})=-1$ pour les deux structures pivotales sur sVect. On obtient donc la formule (3.8) si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon})=-1$.

Enfin, on souhaite obtenir une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$ comme dans le cas non dégénéré. Dans le cas où $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}=-1$, on peut facilement donner un exemple où la S-matrice et la T-matrice ne donnent pas lieu à une représentation de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Exemple 3.3.7. Considérons la catégorie modulaire dite de Verlinde $\mathscr{C}(\mathfrak{sl}_2, q)$ où q est une racine 16-ième de l'unité [EGNO15, Section 8.18.2]. Cette catégorie a 7 classes d'isomorphisme d'objets simples $V_0 = \mathbf{1}, \dots, V_6$. Soit $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}(\mathfrak{sl}_2, q)$ ayant pour objets V_0, V_2, V_4, V_6 ; c'est une sous-catégorie stable pour le produit tensoriel. La S-matrice et la T-matrice de $\mathscr{C}$ sont

$$S = \begin{pmatrix} 1 & [3] & [3] & 1 \\ [3] & -1 & -1 & [3] \\ [3] & -1 & -1 & [3] \\ 1 & [3] & [3] & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où $[3] = q^{-2} + 1 + q^2$ et $i = q^4$. Le centre symétrique de $\mathscr{C}$ est engendré par V_6 en tant que catégorie tensorielle, et c'est un objet de dimension quantique 1 et de twist -1. Le centre symétrique de $\mathscr{C}$ est donc égal à sVect, et les matrices $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ sont

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & [3] \\ [3] & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Conformément à 3.3.5, on a bien $\mathbf{S}^2 = \mathrm{sdim}(\mathscr{C})\mathrm{id}$ mais $(\mathbf{ST})^3$ n'est pas un multiple de l'identité.

Tout ceci motive l'hypothèse suivante.

Hypothèse. *À partir de maintenant, on suppose que la structure pivotale de la catégorie $\mathscr{C}$ est telle que* $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ *et* $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$.

On définit les super-sommes de Gauss de la catégorie $\mathscr{C}$ par

$$s\tau^{\pm}(\mathscr{C}) = \sum_{X \in J} |X|^2 \theta_X^{\pm 1} = \frac{1}{2}\tau^{\pm}(\mathscr{C}).$$

Comme $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$, elles ne dépendent pas du choix de l'ensemble J.

Proposition 3.3.8. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée telle que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible. La S-matrice et le twist vérifient, pour tout $Y \in J$*

$$\sum_{X \in J} \theta_X \dim^-(X) \mathbf{S}_{X,Y} = \theta_Y^{-1} \dim^+(Y) s\tau^+(\mathscr{C}) \tag{3.9}$$

et

$$\sum_{X \in J} \theta_X^{-1} \dim^+(X) \mathbf{S}_{X,Y} = \theta_Y \dim^+(Y) s\tau^-(\mathscr{C}). \tag{3.10}$$

Démonstration. D'après (3.3), on a

$$\sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X \dim^-(X) S^{++}_{X,Y} = \theta_Y^{-1} \dim^+(Y) s\tau^+(\mathscr{C}).$$

Mais $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X} \dim^-(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X) S^{++}_{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X, Y} = \theta_X \dim^-(X) S^{++}_{X,Y}$ et donc

$$\sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \theta_X \dim^-(X) S^{++}_{X,Y} = 2 \sum_{X \in J} \theta_X \dim^-(X) \mathbf{S}_{X,Y}.$$

On conclut par définition de $s\tau^+(\mathscr{C})$. On fait de même pour la seconde assertion en partant de (3.4). □

Exactement comme dans le cas non dégénéré, on montre que (cf. proposition 3.1.23)

$$s\tau^+(\mathscr{C})s\tau^-(\mathscr{C}) = \mathrm{sdim}(\mathscr{C}), \tag{3.11}$$

et on a également (similairement à la proposition 3.1.24) $\theta_{\bar{\mathbf{1}}} = 1$.

Enfin, on termine avec l'analogue du théorème 3.1.25 dans le cas d'une catégorie légèrement dégénérée, qui se montre de la même manière. On note $\sqrt{\mathrm{sdim}(\mathscr{C})}$ la racine carrée positive de $\mathrm{sdim}(\mathscr{C})$ pour un plongement $\Bbbk_{\mathrm{alg}} \to \mathscr{C}$ fixé et on choisit une racine carrée de $\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$ de $\dim^+(\bar{\mathbf{1}})$.

Théorème 3.3.9. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tréssée et légèrement dégénérée telle que $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et telle que $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ et $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$. On a $(\mathbf{ST})^3 = s\tau^-(\mathscr{C})\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^4 = (\mathrm{sdim}(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}}))^2\,\mathrm{id}$. Ainsi*

$$\mathfrak{s} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\sqrt{\mathrm{sdim}(\mathscr{C})}}\mathbf{S} \qquad \textit{and} \qquad \mathfrak{t} \mapsto \mathbf{T}$$

définissent une représentation projective de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Comme dans le cadre non dégénéré, la renormalisation $\tilde{\mathbf{S}}$ de $\mathbf{S}$ est faite pour avoir $\tilde{\mathbf{S}}^4 = 1$. On a également $(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{T})^3 = s\xi(\mathscr{C})^{-1}\tilde{\mathbf{S}}$ et $\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{T}^{-1} = s\xi(\mathscr{C})1$ où $s\xi(\mathscr{C}) = \frac{s\tau^+(\mathscr{C})}{\sqrt{\mathrm{sdim}(\mathscr{C})}}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$ puisque $\tilde{\mathbf{S}}^2$ et $\mathbf{T}$ commutent.

Corollaire 3.3.10. *On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tréssée et légèrement dégénérée telle que $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et telle que $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ et $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$. Le quadruplet $(J, \tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{T}, \mathbf{1})$ est alors une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.*

Démonstration. Il ne reste qu'à montrer que $\tilde{\mathbf{S}}$ est unitaire. Puisque $\tilde{\mathbf{S}}^2$ est une matrice de permutation signée, il suffit de montrer que

$$\overline{\tilde{\mathbf{S}}_{X,Y}} = (-1)^{\delta_{Y^*\otimes\bar{\mathbf{1}}\notin J}}\tilde{\mathbf{S}}_{X,\bar{Y}},$$

pour tous $X, Y \in J$.

Le même raisonnement que la preuve de [ENO05, Proposition 2.12] montre que

$$\overline{\tilde{\mathbf{S}}_{X,Y}} = \frac{\overline{\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{1},Y}}}{\tilde{\mathbf{S}}_{1,Y}}\tilde{\mathbf{S}}_{X^*,Y} = \frac{\overline{\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{1},Y}}}{\tilde{\mathbf{S}}_{1,\bar{Y}}}\tilde{\mathbf{S}}_{X,\bar{Y}}.$$

De là, on déduit que

$$\overline{\tilde{\mathbf{S}}_{X,Y}} = \frac{\dim^+(Y^*\otimes\bar{\mathbf{1}})}{\dim^+(\bar{Y})}\tilde{\mathbf{S}}_{X,\bar{Y}},$$

ce qui fait apparaître le signe escompté. □

On étend la définition 3.1.27 afin de donner un sens à la notion de catégorification de donnée $\mathbb{Z}$-modulaire n'ayant pas de modification $\mathbb{N}$-modulaire.

Définition 3.3.11. On dira qu'une catégorie de fusion pivotale, tréssée et légèrement dégénérée $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{C}$ telle que $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et telle que $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ et $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$ est une catégorification de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(I, \mathbb{S}, \mathbb{T}, i_0)$ s'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}((d_i)_{i\in I})$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$, une bijection $\varphi\colon I \to J$ telle que la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(J, \tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{T}, \mathbf{1})$ et la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire modifiée $(I, D\mathbb{S}D^{-1}, \mathbb{T}, i_0)$ coïncident à une racine quatrième de l'unité λ près, c'est-à-dire :

$$\varphi(i_0) = \mathbf{1},\ \mathbb{S}_{i,j} = \lambda d_i d_j \tilde{\mathbf{S}}_{\varphi(i),\varphi(j)} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_i = \mathbf{T}_{\varphi(i)},$$

pour tous $i, j \in I$.

En particulier, lorsque la catégorie de fusion pivotale, tréssée et légèrement dégénérée $\mathscr{C}$ telle que $\bar{\mathbf{1}}$ est inversible et telle que $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ et $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1$ est une catégorification d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire $(I, \mathbb{S}, \mathbb{T}, i_0)$, on dispose d'un isomorphisme d'anneaux $A_{\mathbb{S}} \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([1] + [\boldsymbol{\varepsilon}])$.

3.4 Super-catégorie associée à une catégorie légèrement dégénérée

3.4.1 Super-catégories monoïdales

Un exemple typique de super-catégorie monoïdale est la catégorie des super-espaces vectoriels avec tous les morphismes, et non seulement les morphismes pairs. Comme remarqué dans la partie 3.3.1, cette catégorie n'est pas monoïdale. Commençons par donner une défnition de super-catégorie. On se réfère à [Ke05, Section 1.2] pour tous compléments sur les catégories enrichies et on reprend les définitions de [BE17].

Définition 3.4.1. Une *super-catégorie* est une catégorie enrichie sur la catégorie monoïdale des super-espaces vectoriels sVect.

De manière plus détaillée une super-catégorie $\mathscr{C}$ est la donnée d'objets, d'un super-espace de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathscr{C}$, d'une loi de composition $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$ pour tout triplet X, Y, Z d'objets de $\mathscr{C}$, qui est un morphisme pair, et du morphisme identité $\mathbf{1} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ pour tout objet X de $\mathscr{C}$ satisfaisant certains axiomes (cf. [Ke05, (1.2), (1.3)]).

Définition 3.4.2. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux super-catégories. Un *super-foncteur* entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est un foncteur encichi sur sVect.

Ainsi un super-foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est la donnée d'un objet $F(X)$ de $\mathscr{D}$ pour tout objet X de $\mathscr{C}$ et pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathscr{C}$ d'une application paire $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ satisfaisant certains axiomes (cf. [Ke05, (1.4), (1.5)]).

Définition 3.4.3. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux super-catégories, F et G deux super-foncteurs. Une *tranformation super-naturelle* φ entre F et G est la donnée pour tout objet X de $\mathscr{C}$ d'un morphisme $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), G(X))$ tel que si $\varphi_{X,0} + \varphi_{X,1}$ est la décomposition de φ_X en sa partie paire et impaire, on a $\varphi_{Y,i} \circ F(f) = (-1)^{i|f|} G(f) \circ \varphi_{X,i}$ pour tout $f\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$ homogène. L'espace des transformations super-naturelles de F vers G est alors muni d'une structure de super-espace.

Pour une super-catégorie $\mathscr{C}$, on définit la catégorie sous-jacente de $\mathscr{C}$ comme la catégorie $\underline{\mathscr{C}}$ ayant les mêmes objets que $\mathscr{C}$, mais ayant seulement les morphismes pairs.

Étant données deux super-catégories $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, on définit la super-catégorie $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ comme la super-catégorie dont les objets sont les paires (X, Y) avec X un objet de $\mathscr{A}$ et Y un objet de $\mathscr{B}$ et ayant pour super-espaces de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\boxtimes\mathscr{B}}((X,Y),(X',Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,X') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(Y,Y')$, la composition se faisant à l'aide du tressage de sVect : pour $f \otimes g : (X,Y) \to (X',Y')$ et $h \otimes k : (X',Y') \to (X'',Y'')$ avec f, g, h et k homogènes, on a

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) = (-1)^{|k||f|}(h \circ f) \otimes (k \circ g). \tag{3.12}$$

On reprend la definition de super-catégorie monoïdale introduite dans [BE17, Definition 1.4].

Définition 3.4.4. Une *super-catégorie monoidale* est un sextuple $(\mathscr{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ où $\mathscr{C}$ est une super-catégorie, $\otimes \colon \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est un super-foncteur, $\mathbf{1}$ est un objet de $\mathscr{C}$, $a \colon (-\otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$, $l \colon \mathbf{1} \otimes - \to -$ et $r \colon - \otimes \mathbf{1} \to -$ sont des isomorphismes super-naturels pairs satisfaisant des axiomes similaires à ceux d'une catégorie monoïdale (pentagone et triangle).

Un *super-foncteur monoïdal* entre deux super-catégories monoïdales $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est une paire (F, J) où F est un super-foncteur de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ et $J \colon F(-) \otimes F(-) \to F(- \otimes -)$ est un isomorphisme super-naturel (entre super-foncteurs de $\mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$) vérifiant des axiomes analogues à ceux pour un foncteur monoïdal et tel qu'il existe un isomorphisme pair entre $F(\mathbf{1}_{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{1}_{\mathscr{D}}$.

Ainsi, si $\mathscr{C}$ est une super-catégorie monoïdale, la catégorie sous-jacente $\underline{\mathscr{C}}$ est une catégorie monoïdale.

Tressage dans les super-catégories monoïdales

Tout comme les catégories monoïdales, les super-catégories monoïdales peuvent être tressées ; l'exemple fondamental est la super-catégorie monoïdale des super-espaces vectoriels, que l'on détaille un peu. Pour V et W deux super-espaces vectoriels, on dispose d'un tressage $c_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V$. Pour $f \colon V \to V'$ et $g \colon W \to W'$ homogènes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & W \otimes V \arrow[d, "g \otimes f"] \\ V' \otimes W' \arrow[r, "c_{V',W'}"] & W' \otimes V' \end{tikzcd}$$

n'est pas nécessairement commutatif. En effet, pour $v \in V$ et $w \in W$ homogènes, on a

$$(g \otimes f) \circ c_{V,W}(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|+|f||w|} g(w) \otimes f(v)$$

et

$$c_{V',W'} \circ (f \otimes g)(v \otimes w) = (-1)^{|f||g|+|v||w|+|f||w|} g(w) \otimes f(v),$$

qui diffèrent d'un signe.

Afin de définir un tressage pour une super-catégorie monoïdale $\mathscr{C}$, introduisons un super-foncteur τ de $\mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ envoyant un objet (X, Y) sur $Y \otimes X$ et un morphisme $f \otimes g$ avec f et g homogènes sur $(-1)^{|f||g|} g \otimes f$. La définition suivante est [BCK17, Section 2.2].

Définition 3.4.5. Soit $\mathscr{C}$ une super-catégorie monoïdale. Un tressage sur $\mathscr{C}$ est un isomorphisme super-naturel $c\colon -\otimes- \to \tau$ de foncteurs de $\mathscr{C}\boxtimes\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ satisfaisant les axiomes usuels de tressage (hexagones).

Dualité, structure pivotale et traces dans les super-catégories monoïdales

En ce qui concerne la dualité, la définition dans une catégorie monoïdale se traduit immédiatement en une définition de dualité dans une super-catégorie monoïdale, en ajoutant que les morphismes d'évaluation et de coévaluation sont des morphismes pairs.

On dispose toujours d'un morphisme dual, et on a pour $f\colon X\to Y$ et $g\colon Y\to Z$ homogènes, $(g\circ f)^* = (-1)^{|f||g|} f^*\circ g^*$. En prenant compte du signe, la dualité définit ainsi un foncteur contravariant d'une super-catégorie monoïdale.

En ce qui concerne la structure pivotale, regardons à nouveau ce qu'il se passe dans le cas des super-espaces vectoriels. Sur sVect, on a deux structures pivotales, qui vont donner deux notions de structure pivotale sur une super-catégorie. Commençons par la structure pivotale dont les traces quantiques donnent la super-trace. On montre facilement que pour tout $f\colon V\to W$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle a_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

est commutatif, quel que soit le degré de f.

Il n'en est pas de même pour l'autre structure pivotale. Pour $f\colon V\to W$ homogène, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle a_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{(-1)^{|f|}f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

est commutatif.

Définissons alors deux foncteurs biduaux pour une super-catégorie. Le premier, que l'on note Bid, envoie un objet X sur son bidual X^{**} et un morphisme f sur son bidual f^{**}. Le second, que l'on note sBid, envoie toujours un objet X sur son bidual X^{**} mais envoie un morphisme f homogène sur $(-1)^{|f|}f^{**}$.

Définition 3.4.6. Une structure *pivotale* sur une super-catégorie monoïdale rigide est une transformation super-naturelle paire $a\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to \mathrm{Bid}$: pour tout $f\colon V\to W$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle a_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array} \tag{3.13}$$

commute.

Une structure *super-pivotale* sur une super-catégorie monoïdale rigide est une transformation super-naturelle paire $a\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{sBid}$: pour $f\colon V \to W$ homogène, le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a_V"'] & W \arrow[d, "a_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "(-1)^{|f|} f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

commute.

Comme dans le cas des catégories monoïdales, une structure pivotale ou super-pivotale permet de définir deux traces quantiques $\mathrm{Tr}^{\pm}$ à valeurs dans $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1})$.

Proposition 3.4.7. *Soient $\mathscr{C}$ une super-catégorie monoïdale rigide, X et Y deux objets de $\mathscr{C}$, $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ deux morphismes homogènes.*

1. *Si $\mathscr{C}$ est munie d'une structure pivotale alors $\mathrm{Tr}^{\pm}_X(g \circ f) = (-1)^{|f||g|}\,\mathrm{Tr}^{\pm}_Y(f \circ g)$.*
2. *Si $\mathscr{C}$ est munie d'une structure super-pivotale alors $\mathrm{Tr}^{\pm}_X(g \circ f) = (-1)^{|f|(|g|+1)}\,\mathrm{Tr}^{\pm}_Y(f \circ g)$.*

Démonstration. Comme dans le cas des catégories monoïdales rigides, pour tous objets X et Y et morphisme $f\colon X \to Y$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\mathrm{coev}_X"] \arrow[d, "\mathrm{coev}_Y"] & X \otimes X^* \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"] \\ Y \otimes Y^* \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f^*"] & Y \otimes X^* \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Y^* \otimes X \arrow[r, "f^* \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes f"] & X^* \otimes X \arrow[d, "\mathrm{ev}_X"] \\ Y^* \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{ev}_Y"] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^{+}_X(g \circ f) &= \mathrm{ev}_{X^*} \circ (a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (g \circ f \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ \mathrm{coev}_X \\ &= \mathrm{ev}_{X^*} \circ (a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (g \otimes f^*) \circ \mathrm{coev}_Y \\ &= \mathrm{ev}_{X^*} \circ (a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ \big((\mathrm{id}_Y \circ g) \otimes (f^* \circ \mathrm{id}_{Y^*})\big) \circ \mathrm{coev}_Y \\ &= (-1)^{|f^*||g|}\,\mathrm{ev}_{X^*} \circ (a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes f^*) \circ (g \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ \mathrm{coev}_Y \\ &= (-1)^{|f||g|}\,\mathrm{ev}_{Y^*} \circ (f^{**} \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ (a_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (g \otimes \mathrm{id}_{Y^*}) \circ \mathrm{coev}_Y\,. \end{aligned}$$

On conclut par définition de la structure pivotale ou super-pivotale. On fait de même pour la trace négative. □

Terminons par un corollaire évident en remarquant que dans la super-catégorie des super-espaces, la super-trace provient d'une structure pivotale tandis que la trace usuelle provient d'une structure super-pivotale.

Corollaire 3.4.8. *Soit $\mathscr{C}$ une super-catégorie monoïdale rigide.*

1. *Si $\mathscr{C}$ est munie d'une structure super-pivotale et f est un endomorphisme impair d'un objet alors les traces quantiques de f sont nulles.*
2. *Si $\mathscr{C}$ est munie d'une structure pivotale et si X est un objet admettant un automorphisme impair alors les dimensions quantiques de X sont nulles. De plus, le carré d'un endomorphisme impair est de traces quantiques nulles.*

On peut relier la deuxième partie à ce qu'il se passe dans la super-catégorie monoïdale des super-espaces vectoriels avec la structure pivotale. En effet, un objet V admettant un automorphisme de degré impair vérifie $\dim(V_0) = \dim(V_1)$ et donc $\mathrm{sdim}(V) = 0$. Un endomorphisme impair de V s'écrit matriciellement, sous la décomposition $V = V_0 \oplus V_1$, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et donc la supertrace de son carré est $\mathrm{tr}_{V_0}(BA) - \mathrm{tr}_{V_1}(AB) = 0$.

Super-catégories de fusion

Terminons cette partie avec la définition d'une super-catégorie de fusion.

Définition 3.4.9. Une super-catégorie de fusion est une super-catégorie abélienne monoïdale, rigide et semi-simple ayant un nombre fini d'objets simples, des espaces de morphismes de dimension finie un un objet unité **1** simple.

3.4.2 Super-anneau de Grothendieck

Soit $\mathbb{Z}_\varepsilon$ l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$. Le *super-groupe de Grothendieck* $\mathrm{sGr}(\mathscr{C})$ d'une super-catégorie abélienne est le $\mathbb{Z}_\varepsilon$-module engendré par les classes d'isomorphies $[X]$ d'objets de $\mathscr{C}$ modulo la relation suivante : si $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ est une suite exacte avec des morphismes homogènes alors $[Y] = \varepsilon^{|f|}[X] + \varepsilon^{|g|}[Z]$.

On dispose d'une application surjective $\mathrm{sGr}(\mathscr{C})/(\varepsilon - 1) \to \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ qui n'est pas nécessairement injective.

Si la super-catégorie $\mathscr{C}$ est monoïdale, le groupe $\mathrm{sGr}(\mathscr{C})$ est alors muni d'une structure d'anneau et on parle alors de *super-anneau de Grothendieck*. Ce dernier est commutatif si de plus $\mathscr{C}$ est tressée.

Contrairement au cas des catégories de fusion, le super-anneau de Grothendieck d'une super-catégorie de fusion n'est pas nécessairement libre comme $\mathbb{Z}_\varepsilon$-algèbre : il peut exister des objets simples avec des automorphismes impairs donnant lieu à de la $(1-\varepsilon)$-torsion. Néanmoins, il est libre comme $\mathbb{Z}$-algèbre.

3.4.3 Super-catégorie associée à une catégorie légèrement dégénérée

Dans [BE17, Section 5], Brundan et Ellis ont expliqué comment construire une super-catégorie à partir d'une catégorie sur sVect, dont la notion de catégorie légèrement dégénérée est un cas particulier. On fixe $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée. On conserve la notation $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour l'objet correspondant à $\Bbbk^{0|1}$ dans le centre symétrique de $\mathscr{C}$. On fixe également un isomorphisme $\xi \colon \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{1}$.

La super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ est la super-catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathscr{C}$ et dont les super-espaces de morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X,Y)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X,Y)_1 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y).$$

La composition $\hat{g} \hat{\circ} \hat{f}$ de $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X,Y)$ et de $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(Y,Z)$ est définie sur les morphismes homogènes, de manière évidente sauf quand $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont tous deux impairs. Dans ce cas, $\hat{g} \hat{\circ} \hat{f}$ est donné par la composition suivante :

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes g} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \xrightarrow{\xi \otimes \mathrm{id}_Y} Z,$$

$\hat{f}$ et $\hat{g}$ étant donnés par les morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z)$.

Lemme 3.4.10. *Cette composition est associative.*

Démonstration. La preve consiste en une vérification fastidieuse des huit cas possibles, en fonction des degrés de trois morphismes. On ne va traiter que le cas le plus compliqué, à savoir quand les trois morphismes sont de degré impair. Soient $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(W, X)$, $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X, Y)$ et $\hat{h} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(Y, Z)$ trois morphismes de degré impair donnés respectivement par $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z)$. Ainsi $\hat{h}\hat{\circ}(\hat{g}\hat{\circ}\hat{f})$ est donné par la composition suivante dans $\mathscr{C}$

$$W \xrightarrow{f} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes g} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \xrightarrow{\xi \otimes \mathrm{id}_Y} Y \xrightarrow{h} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z,$$

tandis que $(\hat{h}\hat{\circ}\hat{g})\hat{\circ}\hat{f}$ est donné par la composition suivante dans $\mathscr{C}$

$$W \xrightarrow{f} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes g} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes h} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \xi \otimes \mathrm{id}_Z} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z.$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "h"] & \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} Y \arrow[ur, "\xi \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes h"'] & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \arrow[r, "\xi \otimes \mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z}"] \arrow[d, "c_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}}"] & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \\
& \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z. \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \xi \otimes \mathrm{id}_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

Le triangle du haut commute clairement, le triangle en bas à droite par naturalité du tressage et le triangle en bas à gauche puisque $c_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}}) \circ (c_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}}$, le tressage $c_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}}$ étant égal à $-\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}}$. On obtient donc l'égalité entre $\hat{h}\hat{\circ}(\hat{g}\hat{\circ}\hat{f})$ et $(\hat{h}\hat{\circ}\hat{g})\hat{\circ}\hat{f}$. □

Le produit tensoriel sur $\mathscr{C}$ munit la catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ d'une structure de super-catégorie monoïdale. Le produit tensoriel de deux objets de $\hat{\mathscr{C}}$ est le même que dans $\mathscr{C}$. Au niveau des morphismes, on le définit pour $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X, Y)$ et $\hat{f'} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X', Y')$ homogènes donnés respectivement par des morphismes f et f' dans $\mathscr{C}$ en fonction des degrés :

— si $\hat{f}$ et $\hat{f'}$ sont les deux pairs, $\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'} = f \otimes f'$,

— si $\hat{f}$ est pair et $\hat{f'}$ impair, $\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'} = (c_{Y,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{Y'}) \circ f \otimes f'$,

— si $\hat{f}$ est impair et $\hat{f'}$ pair, $\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'} = f \otimes f'$,

— si $\hat{f}$ et $\hat{f'}$ sont les deux impairs, $\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'} = (-\xi \otimes \mathrm{id}_{Y\otimes Y'}) \circ (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{Y,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{Y'}) \circ f \otimes f'$.

Lemme 3.4.11. *Ce produit tensoriel munit la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ d'une structure de super-catégorie monoïdale.*

Démonstration. Une vérification des seize cas possibles, en fonction des degrés de $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X, Y)$, $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(Y, Z)$, $\hat{f'} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X', Y')$ et $\hat{g'} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(Y', Z')$, montre que l'on a bien

$$(\hat{g}\hat{\otimes}\hat{g'})\hat{\circ}(\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'}) = (-1)^{|\hat{g'}||\hat{f}|}(\hat{g}\hat{\circ}\hat{f})\hat{\otimes}(\hat{g'}\hat{\circ}\hat{f'}).$$

Afin de bien justifier le signe dans la définition de $\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'}$ quand f et f' sont impairs, traitons le cas où $\hat{f}$ et $\hat{g'}$ sont impairs tandis que $\hat{f'}$ et $\hat{g}$ sont pairs : ce cas fait apparaître un nombre impair de produits tensoriels de deux morphismes de degré impairs, donc un nombre impairs de signes négatifs. Supposons alors que $\hat{f}, \hat{g}, \hat{f'}$ et $\hat{g'}$ sont respectivement égaux à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', Y')$ et $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y', \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z')$. Le morphisme $(\hat{g}\hat{\otimes}\hat{g'})\hat{\circ}(\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'})$ est égal à la composition suivante :

$$X \otimes X' \xrightarrow{f\otimes f'} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \otimes Y' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes g \otimes g'} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{Z,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{Z'}} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \otimes Z' \xrightarrow{\xi \otimes \mathrm{id}_{Z\otimes Z'}} Z \otimes Z',$$

tandis que $(\hat{g}\hat{\circ}\hat{f})\hat{\otimes}(\hat{g'}\hat{\circ}\hat{f'})$ est égal à la composition suivante :

$$X \otimes X' \xrightarrow{f\otimes f'} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \otimes Y' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes g \otimes g'} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{Z,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{Z'}} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Z \otimes Z' \xrightarrow{-\xi \otimes \mathrm{id}_{Z\otimes Z'}} Z \otimes Z',$$

ce qui donne bien $(\hat{g}\hat{\otimes}\hat{g'})\hat{\circ}(\hat{f}\hat{\otimes}\hat{f'}) = -(\hat{g}\hat{\circ}\hat{f})\hat{\otimes}(\hat{g'}\hat{\circ}\hat{f'})$ □

Passons maintenant au tressage : pour tous objets X et Y dans $\mathscr{C}$, on dispose d'un isomorphisme $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, que l'on peut voir comme un morphisme pair dans la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$.

Lemme 3.4.12. *Pour tous objets X, Y, X' et Y' de $\hat{\mathscr{C}}$ et pour tous morphismes homogènes $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X, X')$ et $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(Y, Y')$, on a*

$$(\hat{g}\hat{\otimes}\hat{f})\hat{\circ}c_{X,Y} = (-1)^{|\hat{f}||\hat{g}|} c_{X',Y'}\hat{\circ}(\hat{f}\hat{\otimes}\hat{g}),$$

et la super-catégorie monoïdale $\hat{\mathscr{C}}$ est ainsi munie d'un tressage.

Démonstration. Traitons en premier lieu le cas où $X = X'$ et $\hat{f} = \mathrm{id}_X$. Si $\hat{g}$ est un morphisme pair, le résultat découle de la naturalité du tressage dans $\mathscr{C}$. Si $\hat{g}$ est impair égal à $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y')$, on doit montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "c_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes g"] & Y \otimes X \arrow[dd, "g\otimes \mathrm{id}_X"] \\
X \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y' \arrow[d, "c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}}\otimes \mathrm{id}_{Y'}"] & \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \otimes Y' \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{X,Y'}"] & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y' \otimes X
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\mathscr{C}$. Ceci découle de l'axiome de l'hexagone $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{X,Y'}) \circ (c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{Y'}) = c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Y'}$ et de la naturalité du tressage.

Supposons maintenant $Y = Y'$ et $\hat{g} = \mathrm{id}_Y$. Si $\hat{f}$ est un morphisme pair, le résultat découle de la naturalité du tressage dans $\mathscr{C}$. Si $\hat{f}$ est un morphisme impair égal à f dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X')$, on doit montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "c_{X,Y}"] \arrow[dd, "f\otimes \mathrm{id}_Y"] & Y \otimes X \arrow[d, "\mathrm{id}_Y \otimes f"] \\
& Y \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X' \arrow[d, "c_{Y,\boldsymbol{\varepsilon}}\otimes \mathrm{id}_{X'}"] \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes X' \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes c_{X',Y}"] & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y \otimes X'
\end{tikzcd}$$

commute dans $\mathscr{C}$. Comme $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un objet transparent, $c_{Y,\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathrm{id}_{X'} = c^{-1}_{\boldsymbol{\varepsilon},Y} \otimes \mathrm{id}_{X'}$ et on conclut à nouveau en utilisant un axiome de l'hexagone et la naturalité du tressage dans $\mathscr{C}$.

Enfin, le cas général s'obtient en utilisant (3.12). □

La catégorie $\mathscr{C}$ est rigide et les morphismes d'évaluation et de coévaluation sont vus comme des morphismes pairs dans $\hat{\mathscr{C}}$, ce qui fait de $\hat{\mathscr{C}}$ une super-catégorie monoïdale rigide. De même, la structure pivotale de $\mathscr{C}$ donne lieu à un morphisme pair $\hat{a}_X : X \to X^{**}$ dans $\hat{\mathscr{C}}$, qui donne lieu à une structure pivotale ou super-pivotale.

Lemme 3.4.13. *Si $a_{\boldsymbol{\varepsilon}} = u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans $\mathscr{C}$, c'est-à-dire que le twist associé à la structure pivotale de $\mathscr{C}$ vaut -1 sur l'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$, alors la structure pivotale sur $\mathscr{C}$ donne lieu à une structure super-pivotale sur $\hat{\mathscr{C}}$.*

Si $a_{\boldsymbol{\varepsilon}} = -u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans $\mathscr{C}$, c'est-à-dire que le twist associé à la structure pivotale de $\mathscr{C}$ vaut 1 sur l'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$, alors la structure pivotale sur $\mathscr{C}$ donne lieu à une structure pivotale sur $\hat{\mathscr{C}}$.

Démonstration. Soit $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{C}}}(X, Y)$ de degré impair égal à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y)$. On note θ le twist dans $\mathscr{C}$ associé à la structure pivotale. Par naturalité de ce dernier, on a $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Y} \circ f = f \circ \theta_X$ comme morphismes dans $\mathscr{C}$. L'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant transparent, on a $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Y} = \theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \theta_Y$. Ainsi, dans $\hat{\mathscr{C}}$, on trouve que $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\theta_Y \hat{\circ} \hat{f} = \hat{f} \hat{\circ} \theta_X$, en identifiant θ_X et θ_Y a des morphismes pairs dans $\hat{\mathscr{C}}$ et $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ au scalaire ± 1. Par définition du twist, on a $a_Z = u_Z \circ \theta_Z$ dans $\mathscr{C}$ pour tout objet Z et ainsi, dans $\hat{\mathscr{C}}$, on a

$$\hat{a}_Y \hat{\circ} \hat{f} = \theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} u_Y \hat{\circ} \hat{f} \hat{\circ} \theta_X.$$

Or dans $\hat{\mathscr{C}}$, $u_Y \hat{\circ} \hat{f} = \hat{f}^{**} \hat{\circ} u_X$, la preuve se faisant comme dans une catégorie monoïdale tressée, rigide et pivotale puique seul le morphisme $\hat{f}$ est de degré impair. Finalement, on trouve que

$$\hat{a}_Y \hat{\circ} \hat{f} = \theta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{f}^{**} \hat{\circ} \hat{a}_X,$$

et donc le résultat dépend effectivement de la valeur de $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. □

Théorème 3.4.14. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale, tressée et légèrement dégénérée, avec objet simple transparent $\boldsymbol{\varepsilon} \not\simeq \mathbf{1}$.*

Si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1$ alors il existe une super-catégorie de fusion tressée, super-pivotale sans objet transparent non trivial associée à $\mathscr{C}$ avec deux fois moins de classes d'isomorphie d'objets simples.

Si $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$ alors il existe une super-catégorie de fusion tressée, pivotale sans objet transparent non trivial associée à $\mathscr{C}$ avec deux fois moins de classes d'isomorphie d'objets simples.

Remarquons que la catégorie $\mathscr{C}$ peut être retrouvée à partir de la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$: elle est égale à $\underline{(\hat{\mathscr{C}})}$. Toutes les structures additionnelles sont également retrouvées, puisque ce sont toujours des morphismes pairs.

Terminons par le super-anneau de Grothendieck. L'anneau $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}] - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\boldsymbol{\varepsilon}])$ qui apparaissait dans la partie 3.3.2 peut être vu comme un quotient du super-anneau de Grothendieck de $\hat{\mathscr{C}}$

$$\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}] - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})[\boldsymbol{\varepsilon}]) \simeq \mathrm{sGr}(\hat{\mathscr{C}})/(1 - \dim(\boldsymbol{\varepsilon})\varepsilon).$$

L'anneau quotient $\mathrm{sGr}(\hat{\mathscr{C}})/(1 - \varepsilon)$ est isomorphe à l'anneau de Grothendieck usuel de $\hat{\mathscr{C}}$ et à l'anneau quotient $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}] - [\boldsymbol{\varepsilon}])$. Ainsi, dans le cas où $\dim(\boldsymbol{\varepsilon}) = -1$, on se retrouve avec deux quotients du super-anneau de Grothendieck de $\hat{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{sGr}(\hat{\mathscr{C}}) \arrow[dl, "\varepsilon=1"'] \arrow[dr, "\varepsilon=-1"] & \\ \mathrm{Gr}(\hat{\mathscr{C}}) \simeq \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\boldsymbol{\varepsilon}]) & & \mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]+[\boldsymbol{\varepsilon}]) \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

L'anneau $\mathrm{sGr}(\mathscr{C})$ est libre comme $\mathbb{Z}$-module et de rang $|\mathrm{Irr}(\mathscr{C})|$. Les deux anneaux quotients $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\boldsymbol{\varepsilon}])$ et $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\boldsymbol{\varepsilon}])$ sont également libres comme $\mathbb{Z}$-modules et de rang $\frac{|\mathrm{Irr}(\mathscr{C})|}{2}$. Si l'on fait un choix J des représentants de $\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ sous l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$, on remarque que les constantes de structures de l'anneau $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]-[\boldsymbol{\varepsilon}])$ relativement à la base J sont égales aux valeurs absolues des constantes de structure de l'anneau $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})/([\mathbf{1}]+[\boldsymbol{\varepsilon}])$ relativement à la base J.

3.5 Un premier exemple de catégorie légèrement dégénérée

On termine par des exemples de catégories legèrement dégénérées qui ne sont pas de la forme $\mathscr{D}\boxtimes\mathrm{sVect}$. Pour cela, on réinterprète la construction de Bonnafé-Rouquier [BR17a] dans le cadre des catégories légèrement dégénérées. On se donne un entier $d \geq 2$ et ζ une racine primitive d-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. L'algèbre $D(B)$ la $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire engendrée par les générateurs K, z, E, F vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K^d &= z^d = 1, \\ E^d &= F^d = 0, \\ [z,E] &= [z,F] = [z,K] = 0, \\ KE &= \zeta EK, \\ KF &= \zeta^{-1} FK, \\ [E,F] &= K - zK^{-1}. \end{aligned}$$

Cette algèbre est le double de Drinfeld de l'algèbre de Taft, une version de dimension finie de l'algèbre enveloppante quantique d'un Borel de $\mathfrak{sl}_2$. Elle peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf (*c.f.* [BR17a, 1.A]) et sa catégorie de modules de dimension finie $D(B)$-mod est ainsi monoïdale, abélienne et rigide. Cette catégorie n'est pas semi-simple et admet d^2 modules simples : pour chaque entier $1 \leq l \leq d$, il existe d modules simples de dimension l, que l'on note $M_{l,p}$ pour $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (*c.f.* [BR17a, 2.A]).

L'algèbre $D(B)$ est de plus une algèbre de Hopf tressée, et donc la catégorie $D(B)$-mod est tressée. On dispose également d'une structure pivotale non sphérique donnée par l'élément pivot $z^{-1}K$. On note alors $\mathscr{C}$ la semi-simplification de la catégorie $D(B)$-mod, comme construite dans [EO18] pour les catégories non sphériques. Les objets simples de $\mathscr{C}$ sont les $D(B)$-modules indécomposables de dimensions quantiques (positive et négative) non nulles. En particulier, les modules $M_{l,p}$ pour $1 \leq l < d$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sont des objets simples de $\mathscr{C}$ et les modules $M_{d,p}$ sont isomorphes au module nul. La catégorie $\mathscr{C}$ est néanmoins loin d'être de fusion puisqu'il existe un nombre infini de classes d'isomorphisme de $D(B)$-modules indécomposables.

Proposition 3.5.1. *La sous-catégorie pleine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ additivement engendrée par les objets simples $M_{l,p}$ pour $1 \leq l < d$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est stable par produit tensoriel.*

Démonstration. La catégorie $\mathscr{C}$ étant semi-simple par construction, il suffit de montrer que le produit tensoriel de deux objets $M_{l,p}$ et $M_{l',p'}$ n'a pour facteurs directs que des objets isomorphes à un objet du type $M_{l'',p''}$. Puisque $M_{l,p} \simeq M_{l,0} \otimes M_{1,p}$, on peut se restreindre à l'étude de $M_{l,0} \otimes M_{l',p}$ pour $1 \leq l \leq l' < d$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On procède alors par récurrence sur l, le cas $l = 1$ étant trivial. Pour $l = 2$, cela découle de [BR17a, Theorem 3.3] :

$$M_{2,0} \otimes M_{l',p} \simeq \begin{cases} M_{2,p} & \text{si } l' = 1, \\ M_{l'+1,p} \oplus M_{l'-1,p+1} & \text{si } 1 < l' < d-1, \\ M_{d-2,p+1} & \text{si } l' = d-1. \end{cases}$$

Supposons alors $l \geq 3$ et $l' \geq l$. Le module $M_{l,0} \otimes M_{l',p}$ est facteur direct de $(M_{l,0} \oplus M_{l-2,1}) \otimes M_{l',p} \simeq M_{2,0} \otimes M_{l-1,0} \otimes M_{l',p}$. Par hypothèse de récurrence, les facteurs directs simples de $M_{l-1,0} \otimes M_{l',p}$ sont isomorphes à un objet de la forme $M_{l'',p''}$ et donc il en est de même pour $M_{2,0} \otimes M_{l-1,0} \otimes M_{l',p}$ ainsi que tous ses facteurs directs. □

La catégorie $\mathscr{D}$ est alors une catégorie de fusion avec $d(d-1)$ classes d'isomorphismes d'objets simples. La S-matrice S^{++} a été calculée par Bonnafé-Rouquier [BR17a, Corollary 5.5] :

$$S^{++}_{(l,p),(l',p')} = \frac{\zeta}{1-\zeta} \zeta^{-ll'-lp'-pl'-2pp'}(1-\zeta^{ll'}).$$

On se rend alors compte que $S^{++}_{(l,p),(d-1,1)} = -\dim^+(M_{l,p})$ et, l'objet $M_{d-1,1}$ étant de dimension quantique positive -1, on déduit que $M_{d-1,1}$ est transparent. On le note $\boldsymbol{\varepsilon}$. On peut aussi déduire de [BR17a, Theorem 6.8] que la matrice S^{++} est de rang $\frac{d(d-1)}{2}$.

Proposition 3.5.2. *La catégorie $\mathscr{D}$ est légèrement dégénérée et pour $1 \leq l < d$ et $p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{l,p} \simeq M_{d-1,l+p}$.*

Démonstration. Il ne reste qu'à montrer l'assertion sur la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$, ce que l'on fait par récurrence sur l. Le cas $l = 1$ est évident. Pour $l = 2$, le calcul est fait dans la preuve de la proposition 3.5.1. Supposons alors $l \geq 3$ et plongeons le module $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{l,p}$ dans $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes (M_{l,p} \oplus M_{l-2,p+1}) \simeq \boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{2,0} \otimes M_{l-1,p}$. En utilisant le tressage et l'hypothèse de récurrence, on obtient que $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{2,0} \otimes M_{l-1,p}$ est isomorphe à $M_{2,0} \otimes M_{d-l+1,l-1+p} \simeq M_{d-l+2,l-1+p} \oplus M_{d-l,l+p}$. Comme $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{l-2,p+1}$ est isomorphe à $M_{d-l+2,l-1+p}$ par hypothèse de récurrence, on déduit que $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{l,p}$ est isomorphe à $M_{d-l,l+p}$. □

On vérifie également que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est soit $M_{1,d-1}$, soit $M_{d-1,0}$, en fonction du choix de représentants faits. Ces deux objets sont inversibles et de dimension $\pm\zeta$. Le théorème [BR17a] peut alors se reformuler comme tel :

Théorème 3.5.3. *La catégorie de fusion pivotale tressée et légèrement dégénérée $\mathscr{D}$ est une catégorification de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire associée à la famille non triviale du groupe de réflexion complexes cyclique $G(d,1,1)$.*

Remarque 3.5.4. Le facteur $\sqrt{-\zeta}$ dans [BR17a, (6.7)] est alors expliqué par la présence de l'objet $\bar{\mathbf{1}}$.

Terminons en montrant que la catégorie $\mathscr{D}$ n'est pas de la forme $\mathscr{D}_0 \boxtimes \mathrm{sVect}$ quand d est pair, avec $\mathscr{D}_0$ une catégorie de fusion pivotale tressée et non dégénérée. Supposons le contraire et considérons l'objet $M_{\frac{d}{2},0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{\frac{d}{2},0} \simeq M_{\frac{d}{2},\frac{d}{2}}$. Un de ces deux objets simples se trouve donc dans $\mathscr{D}_0$. Il en est de même pour les deux objets simples $M_{2,0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{2,0}$.

On montre aisément par récurrence que $(M_{2,0})^{\otimes 2k} \otimes M_{\frac{d}{2},l}$ admet $M_{\frac{d}{2},l+k}$ comme facteur direct. Ainsi si $M_{2,0}$ est dans $\mathscr{D}_0$, les deux objets $M_{\frac{d}{2},0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{\frac{d}{2},0}$ sont dans $\mathscr{D}_0$, ce qui est absurde. De même $(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{2,0})^{\otimes 2k} \otimes M_{\frac{d}{2},l}$ admet $M_{\frac{d}{2},l+k}$ comme facteur direct, ce qui aboutit à la même contradiction si $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes M_{2,0}$ est dans $\mathscr{D}_0$.

Chapitre 4

Double de Drinfeld de groupes quantiques et modules basculants

Après le cadre catégorique du chapitre 3, on cherche à produire des catégories de fusion tressées qui ont pour centre symétrique la catégorie des super-espaces vectoriels. Le but est de généraliser l'exemple de [BR17a] à n'importe quelle algèbre de Lie simple complexe, en prenant plutôt le point de vue développé dans la partie 3.5 que celui des catégories triangulées tensorielles. La construction expliquée ici s'inspire fortement de celle des catégories de fusion attachées aux algèbres enveloppantes quantiques $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ où ξ est une racine de l'unité. Ces catégories sont construites en semi-simplifiant la catégorie des modules basculants de cette algèbre.

L'algèbre ici considérée n'est pas l'algèbre enveloppante quantique d'une algèbre de Lie simple complexe, mais une extension centrale $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ de cette dernière, que l'on construit comme un double de Drinfeld. Il faut noter que ce double de Drinfeld a souvent été considéré, mais seulement dans le but d'obtenir le quotient $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ ou $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ selon si l'on se place à un paramètre générique, ou a une racine de l'unité. La même construction à partir de modules basculants ne permet pas d'obtenir une catégorie de fusion tressée avec un nombre fini d'objets simples, mais on détermine un grand nombre d'objets simples transparents, que l'on rend alors isomorphes à l'objet trivial. On obtient comme ceci des catégories non dégénérées. On se restreint également à certaines sous-catégories afin d'obtenir des catégories de fusion tressées avec un centre symétrique non trivial. Selon l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ces centres symétriques peuvent avoir des objets simples de dimension quantique -1 et de twist 1, ce qui rentre dans le cadre catégorique de chapitre 3.

L'organisation de ce chapitre est comme suit. Tout d'abord, dans uns première partie, on construit l'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ ainsi que toutes les structures supplémentaires dont dispose cette dernière : c'est une algèbre de Hopf qui admet une quasi-R-matrice. Ensuite, on étudie la catégorie des représentations à un paramètre générique, et on explique comment tresser cette catégorie de représentations. Dans un troisième temps, la spécialisation à une racine de l'unité est considérée, ainsi que la catégorie des représentations dans ce cadre. Elle est nettement plus complexe, cette catégorie n'est plus semi-simple, mais l'introduction des modules basculants permet d'obtenir néanmoins une catégorie de fusion tressée et pivotale. Enfin, dans les deux dernières parties, on étudie en détail le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ et on relie la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire produite par la catégorie des modules basculants à la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire d'une famille de caractères unipotents décrite au chapitre 2. Ce chapitre est essentiellement tiré de la pré-publication [La18a].

4.1 Double de Drinfeld de Borel d'algèbres enveloppantes quantiques

On commence par fixer les notations avant d'introduire le principal objet d'étude de ce chapitre : le double de Drinfeld de l'algèbre enveloppante quantique du Borel d'une algèbre de Lie simple complexe.

4.1.1 Notations

On fixe $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de rang n, de sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ est noté Φ, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ désignera une base de Φ. On considère alors Φ^+ les racines positives de Φ pour la base Π. Cette base étant fixée, on dispose alors de la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ relativement à Π, et de même de $\mathfrak{b}^-$ relativement à $-\Pi$.

On se donne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}^*$ normalisée de sorte que $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ pour les racines courtes de Φ. On définit la coracine $\alpha^\vee$ associée à $\alpha \in \Phi$ par

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Le réseau des racines sera noté Q, celui des coracines $Q^\vee$, celui des poids P, celui des copoids $P^\vee$ et enfin P^+ désignera le cône des poids dominants :

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \,\middle|\, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Pi \right\}, \\ P^+ &= \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \,\middle|\, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \Pi \right\}, \\ P^\vee &= \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Pi \}. \end{aligned}$$

La base duale de $(\alpha_i^\vee)_{1\leq i\leq n}$ relativement à la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est notée $(\varpi_i)_{1\leq i\leq n}$: ces poids sont dits fondamentaux et sont bien évidemment dominants. La demi-somme des racine positives est notée ρ, c'est également la somme des poids fondamentaux [Bo68, VI.1.10, Proposition 29].

Le cône engendré par Π est noté Q^+ et on munit P de l'ordre suivant : $\lambda \leq \mu$ si et seulement si $\mu - \lambda \in Q^+$.

Associons à chaque racine $\alpha \in \Pi$ la réflexion s_α d'hyperplan orthogonal à α

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha = v - \langle v, \alpha \rangle \alpha^\vee, \quad \forall v \in \mathfrak{h}^*.$$

On notera s_i la réflexion s_{α_i} et W le groupe de Weyl de Φ engendré par les réflexions $(s_i)_{1\leq i\leq n}$. Ce dernier stabilise le système de racines Φ et la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est invariante sous l'action de W. Enfin, la longueur d'un élément $w \in W$ relativement au système générateur $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ sera notée $l(w)$.

Pour une indéterminée q, on définit les éléments suivants de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, n \in \mathbb{Z}, \quad [n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{k} \frac{[n+1-i]_q}{[i]_q}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}.$$

Si ξ est un élément inversible d'un anneau, on note $[n]_\xi$ (resp. $[n]_\xi!$, resp. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\xi$) l'évaluation en ξ de $[n]_q$ (resp. $[n]_q!$, resp. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$). Soit L le plus petit entier positif tel que $L\langle\lambda,\mu\rangle \in \mathbb{Z}$ pour tous $\lambda,\mu \in P$. Enfin, on note $q_i = q^{\frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{2}}$.

4.1.2 Parties positives et négatives de l'algèbre enveloppante quantique

Redéfinissons tout d'abord la partie positive et la partie négative de l'algèbre enveloppante quantique de $\mathfrak{g}$. Ce sont également les algèbres enveloppantes quantiques des sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$.

Définition 4.1.1. L'algèbre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre associative unitaire engendrée par les éléments $K_i^{\pm 1}$, E_i, $1 \leq i \leq n$ avec les relations

$$K_iK_j = K_jK_i, \qquad K_iK_i^{-1} = 1 = K_i^{-1}K_i, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n,$$

$$K_iE_j = q^{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}E_jK_i, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n,$$

$$\sum_{r=0}^{1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle \\ r \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle-r} E_jE_i^r = 0, \qquad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Cette algèbre possède plusieurs structures d'algèbres de Hopf, on choisit la comultiplication Δ, la counité ε et l'antipode S suivants :

$$\begin{aligned} &\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, && \varepsilon(K_i) = 1, && S(K_i) = K_i^{-1}, \\ &\Delta(E_i) = 1 \otimes E_i + E_i \otimes K_i, && \varepsilon(E_i) = 0, && S(E_i) = -E_iK_i^{-1}. \end{aligned}$$

De manière similaire, on a la définition suivante pour la partie négative.

Définition 4.1.2. L'algèbre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre associative unitaire engendrée par les éléments $L_i^{\pm 1}$, F_i, $1 \leq i \leq n$ avec les relations

$$L_iL_j = L_jL_i, \qquad L_iL_i^{-1} = 1 = L_i^{-1}L_i, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n,$$

$$L_iF_j = q^{-\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}F_jL_i, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n,$$

$$\sum_{r=0}^{1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle \\ r \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle-r} F_jF_i^r = 0, \qquad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Tout comme la partie positive, cette algèbre admet plusieurs structures d'algèbre de Hopf. On choisit la comultiplication Δ, la counité ε et l'antipode S suivants :

$$\begin{aligned} &\Delta(L_i) = L_i \otimes L_i, && \varepsilon(L_i) = 1, && S(L_i) = L_i^{-1}, \\ &\Delta(F_i) = L_i^{-1} \otimes F_i + F_i \otimes 1, && \varepsilon(F_i) = 0, && S(F_i) = -L_iF_i. \end{aligned}$$

Si $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i$ est un élément de Q, on note K_λ (resp. L_λ) l'élément $\prod_{i=1}^n K_i^{\lambda_i}$ de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ (resp. $\prod_{i=1}^n L_i^{\lambda_i}$ de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$).

4.1.3 Une forme bilinéaire de Hopf entre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$

Afin de munir le produit tensoriel d'espaces vectoriels $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ d'une structure d'algèbre de Hopf, on construit une forme bilinéaire de Hopf entre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$. Cette construction du double est due à Drinfeld [Dr87, Section 13] et la forme bilinéaire suivante a été étudiée par Tanisaki [Ta92].

Proposition 4.1.3. *Il existe une unique forme bilinéaire* $(\cdot,\cdot)\colon \mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)\times\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\to\mathbb{Q}(q)$ *telle que pour tous* $x,x'\in\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, $y,y'\in\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ *et* $1\le i,j\le n$

1. $(x,yy')=(\Delta(x),y\otimes y')$,
2. $(xx',y)=(x'\otimes x,\Delta(y))$,
3. $(x,1)=\varepsilon(x),(1,y)=\varepsilon(y)$,
4. $(K_i,L_j)=q^{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}$,
5. $(K_i,F_j)=0=(E_i,L_j)$,
6. $(E_i,F_j)=\frac{\delta_{i,j}}{q_i-q_i^{-1}}$.

La structure d'algèbre de Hopf induite sur $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ par cette forme bilinéaire de Hopf est décrite dans [KS97, Section 8.2], on notera $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Hopf ainsi obtenue. En utilisant la notation de Sweedler pour le coproduit, le produit de $y_1\otimes x_1$ et de $y_2\otimes x_2$ dans $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est

$$(y_1\otimes x_1)(y_2\otimes x_2)=\sum_{(x_1)(y_2)}(x_1',y_2')(x_1''',S(y_2'''))y_1y_2''\otimes x_1''x_2.$$

L'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ est munie du coproduit provenant de la structure de coalgèbre sur le produit tensoriel : pour $y\otimes x\in\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$,

$$\Delta(y\otimes x)=\sum_{(x)(y)}(y'\otimes x')\otimes(y''\otimes x'').$$

Il est alors facile de vérifier que ce coproduit est effectivement un morphisme d'algèbres. De même, on dispose de la counité provenant de la structure de coalgèbre sur le produit tensoriel : pour $y\otimes x\in\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$,

$$\varepsilon(y\otimes x)=\varepsilon(y)\varepsilon(x).$$

On dispose également d'un antipode sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ qui est donnée par

$$S(y\otimes x)=(1\otimes S(x))(S(y)\otimes 1)$$

pour $y\otimes x\in\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Les propriétés de l'antipode sont facilement vérifiées.

À la fois $1\otimes\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)\otimes 1$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ et on identifiera ainsi $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ à leurs images dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. L'élément $y\otimes x$ sera simplement noté yx. En calculant les relations entre générateurs de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^-)$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.1.4. *L'algèbre* $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ *est la* $\mathbb{Q}(q)$*-algèbre associative unitaire engendrée par les éléments* $K_i^{\pm1}$, $L_i^{\pm1}$, E_i *et* F_i, $1\le i\le n$ *avec les relations pour tous* $1\le i,j\le n$

$$K_iK_j=K_jK_i,\qquad K_iK_i^{-1}=1=K_i^{-1}K_i,$$
$$L_iL_j=L_jL_i,\qquad L_iL_i^{-1}=1=L_i^{-1}L_i,$$

$$K_i L_j = L_j K_i,$$

$$K_i E_j = q^{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} E_j K_i, \qquad K_i F_j = q^{-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} F_j K_i,$$
$$L_i E_j = q^{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} E_j L_i, \qquad L_i F_j = q^{-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} F_j L_i,$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{i,j} \frac{K_i - L_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\sum_{r=0}^{1-\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \\ r \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle - r} E_j E_i^r = 0, \qquad 1 \le i \ne j \le n,$$
$$\sum_{r=0}^{1-\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \\ r \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle - r} F_j F_i^r = 0, \qquad 1 \le i \ne j \le n.$$

On note $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ (resp. $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0$, resp. $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$) la sous-algèbre de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par $(E_i)_{1\le i\le n}$ (resp. $(K_i, L_i)_{1\le i\le n}$, resp. $(F_i)_{1\le i\le n}$). Remarquons que ni le coproduit, ni l'antipode ne se restreignent à un coproduit et un antipode sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ et $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$. La multiplication induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0 \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0} \simeq \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.

Cette algèbre a un centre non trivial : les éléments $z_i = K_i L_i^{-1}$ sont clairement centraux. De plus, le quotient de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ par l'idéal de Hopf engendré par $(z_i - 1)_{1\le i\le n}$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante quantique usuelle $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$. Pour $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \in Q$, l'élément $\prod_{i=1}^n z_i^{\lambda_i}$ sera simplement noté z_λ. Terminons par un lemme évident, mais néanmoins utile pour construire des structures pivotales sur les diverses catégories que l'on considérera.

Lemme 4.1.5. *Le carré de l'antipode de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ est donné par la conjugaison par $K_{2\rho} z_\lambda$ pour n'importe quel $\lambda \in Q$.*

4.1.4 Graduation de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$

L'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ est munie d'une graduation par Q. Les générateurs K_i et L_i sont de degré nul tandis que les générateurs E_i et F_i sont respectivement de degrés α_i et $-\alpha_i$. Les relations données dans la proposition 4.1.4 sont toutes homogènes. Pour $\lambda \in Q$, le sous-espace des éléments de degré λ est noté $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})_\lambda$. On a de plus

$$\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})_\lambda = \left\{ v \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \;\middle|\; K_i v = q^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle} v K_i, \forall 1 \le i \le n \right\}.$$

Le coproduit, la counité ainsi que l'antipode respectent cette graduation. Pour une suite finie $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ d'entiers compris entre 1 et n, on pose

$$E_I = E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_r} \quad \text{et} \quad F_I = F_{i_1} F_{i_2} \cdots F_{i_r}.$$

Ces éléments sont de degrés respectifs $\mathrm{pds}(I)$ et $-\mathrm{pds}(I)$ où $\mathrm{pds}(I) = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_r}$. De manière similaire à [Ja96, lemma 4.12], on a le lemme suivant.

Lemme 4.1.6. *Soit $I = (i_1, i_2, \dots i_r)$ une suite d'entiers compris entre 1 et n. Il existe des éléments $c^I_{A,B} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, où A et B sont des suites extraites de I avec $\mathrm{pds}(A)+\mathrm{pds}(B) = \mathrm{pds}(I)$, tels que dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ le coproduit de E_I et F_I soient donnés par*

$$\Delta(E_I) = \sum_{A,B} c^I_{A,B}(q) E_A \otimes K_{\mathrm{pds}(A)} E_B \quad et \quad \Delta(F_I) = \sum_{A,B} c^I_{A,B}(q^{-1}) L^{-1}_{\mathrm{pds}(A)} F_B \otimes F_A,$$

les sommes étant sur les paires (A, B) de suites extraites de I.

Ceci implique alors, que pour $\mu \in Q$, $\mu \geq 0$, on a le résultat plus précis au niveau du lien entre le coproduit et la graduation

$$\Delta\left(\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu\right) \subseteq \bigoplus_{0\le\nu\le\mu} \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\nu \otimes K_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu-\nu} \quad \text{et} \quad \Delta\left(\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}\right) \subseteq \bigoplus_{0\le\nu\le\mu} L^{-1}_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-(\mu-\nu)} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\nu}. \tag{4.1}$$

Définissons alors, pour $x \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et $1 \leq i \leq n$ les éléments $r_i(x)$ et $r'_i(x)$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu-\alpha_i}$ comme suit :

$$\Delta(x) \in 1 \otimes x + \sum_{i=1}^n E_i \otimes K_i r_i(x) + \sum_{\substack{0<\nu\le\mu \\ \nu\notin\Pi}} \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\nu \otimes K_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu-\nu}, \tag{4.2}$$

et

$$\Delta(x) \in x \otimes K_\mu + \sum_{i=1}^n r'_i(x) \otimes K_{\mu-\alpha_i} E_i + \sum_{\substack{0<\nu\le\mu \\ \mu-\nu\notin\Pi}} \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\nu \otimes K_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu-\nu}. \tag{4.3}$$

D'une manière similaire, pour $y \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$ et $1 \leq i \leq n$, on définit les éléments $\rho_i(y)$ et $\rho'_i(y)$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{-\mu+\alpha_i}$ par

$$\Delta(y) \in L^{-1}_\mu \otimes y + \sum_{i=1}^n L^{-1}_{\mu-\alpha_i} F_i \otimes \rho_i(y) + \sum_{\substack{0<\nu\le\mu \\ \mu-\nu\notin\Pi}} L^{-1}_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-(\mu-\nu)} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\nu},$$

et

$$\Delta(y) \in y \otimes 1 + \sum_{i=1}^n L^{-1}_{\alpha_i} \rho'_i(y) \otimes F_i + \sum_{\substack{0<\nu\le\mu \\ \nu\notin\Pi}} L^{-1}_\nu \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-(\mu-\nu)} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\nu}.$$

On obtient une formule de récurrence pour les valeurs de r_i, r'_i, ρ_i et ρ'_i analogue à celles dans $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ (cf. [Ja96, 6.14, 6.15]).

Lemme 4.1.7. *Soient $\mu, \mu' \in Q$, $\mu \geq 0$ et $\mu' \geq 0$.*

1. *Pour tous $x \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et $x' \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu'}$,*

$$r_i(xx') = q^{-\langle\alpha_i,\mu\rangle} x r_i(x') + r_i(x)x' \quad et \quad r'_i(xx') = x r'_i(x') + q^{-\langle\alpha_i,\mu'\rangle} r'_i(x)x'.$$

2. *Pour tous $y \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$ et $y' \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu'}$,*

$$\rho_i(yy') = y\rho_i(y') + q^{-\langle\alpha_i,\mu'\rangle} \rho_i(y)y' \quad et \quad \rho'_i(yy') = q^{-\langle\alpha_i,\mu\rangle} y\rho'_i(y') + \rho'_i(y)y'.$$

L'introduction de ces éléments est justifiée par la formule suivante donnant les commutateurs d'éléments homogènes de degré positif (resp. négatif) avec un générateur de la forme F_i (resp. E_i). On retrouve bien entendu la formule [Ja96, Lemma 6.17] en identifiant K_i et L_i pour tout $1 \le i \le n$.

Lemme 4.1.8. *Soient $\mu \in Q$, $\mu \ge 0$, $x \in \mathcal{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu}$ et $y \in \mathcal{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$. Alors*

$$xF_i - F_i x = \frac{K_i r_i(x) - r_i'(x)L_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \text{et} \quad E_i y - yE_i = \frac{\rho_i(y)K_i - L_i^{-1}\rho_i'(y)}{q_i - q_i^{-1}}.$$

Démonstration. On ne s'occupe que de la première formule. Si $x = 1$ ou $x = E_i$, le résultat est trivial. Supposons le résultat vérifié pour x et x' et montrons le pour xx' :

$$\begin{aligned} xx'F_i - F_i xx' &= x(x'F_i - F_i x') + (xF_i - F_i x)x' \\ &= (q_i - q_i^{-1})^{-1}(x(K_i r_i(x') - r_i'(x')L_i^{-1}) + (K_i r_i(x) - r_i'(x)L_i^{-1})x') \\ &= (q_i - q_i^{-1})^{-1}(K_i(q^{-\langle\alpha_i,\mu\rangle} x r_i(x') + r_i(x)x') - (x r_i'(x') + q^{-\langle\alpha_i,\mu'\rangle} r_i'(x)x')) \\ &= (q_i - q_i^{-1})^{-1}(K_i r_i(xx') - r_i'(xx')L_i^{-1}), \end{aligned}$$

le lemme 4.1.7 justifiant la dernière égalité. □

4.1.5 Quelques propriétés de la forme bilinéaire

On passe en revue quelques propriétés de la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ que l'on utilisera par la suite.

Proposition 4.1.9. *Soient $x \in \mathcal{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$, $y \in \mathcal{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$ et $\lambda, \mu \in Q$. Alors*

1. *$(K_\lambda x, L_\mu y) = (K_\lambda, L_\mu)(x, y)$.*
2. *Supposons $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$, x de poids λ et y de poids $-\mu$. Si $\lambda \ne \mu$ alors $(x, y) = 0$.*

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer x homogène de degré γ. Son coproduit peut, en vertu de (4.1), s'écrire sous la forme

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \sum_{0<\nu\le\gamma} x_\nu \otimes K_\nu x'_{\gamma-\nu},$$

avec x_ν et $x'_{\gamma-\nu}$ éléments de $\mathcal{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ de degrés respectifs ν et $\gamma - \nu$. Ainsi

$$\begin{aligned} (K_\lambda x, L_\mu y) &= (K_\lambda, L_\mu)(K_\lambda x, y) + \sum_{0<\nu\le\gamma} (K_\lambda x_\nu, L_\mu)(K_\lambda K_\nu x'_{\gamma-\nu}, y) \\ &= (K_\lambda, L_\mu)(K_\lambda x, y) + \sum_{0<\nu\le\gamma} (K_\lambda, L_\mu)(x_\nu, L_\mu)(K_\lambda K_\nu x'_{\gamma-\nu}, y), \end{aligned}$$

l'élément L_μ étant de type groupe. Mais pour $\nu > 0$, on a $(x_\nu, L_\mu) = 0$. On obtient ainsi $(K_\lambda x, L_\mu y) = (K_\lambda, L_\mu)(K_\lambda x, y)$. De manière similaire, on montre que $(K_\lambda x, y) = (x, y)$ ce qui termine la première partie du lemme.

Pour la seconde affirmation, on procède par récurrence sur $\mathrm{ht}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, où $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \in Q^+$. Par linéarité, on suppose que x est un produit de générateurs de la forme

E_I. Le cas où $\mathrm{ht}(\lambda)=1$, c'est-à-dire $\lambda\in\Pi$, se montre par une récurrence sur $\mathrm{ht}(\mu)$. En écrivant $x=E_i x'$, et

$$\Delta(y)=\sum_{0\leq\nu\leq\mu} L_\nu^{-1}y'_{-(\mu-\nu)}\otimes y''_{-\nu},\ \ y'_{-\nu},y''_{-\nu}\in\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\nu},$$

on obtient

$$(E_ix',y)=\sum_{0\leq\nu\leq\mu}(x',L_\nu^{-1}y'_{-(\mu-\nu)})(E_i,y''_{-\nu})=(x',y'_{-(\mu-\alpha_i)})(E_i,y''_{-\alpha_i}).$$

Mais $\lambda\neq\mu$ et les deux termes ne peuvent pas être simultanément non nuls. □

On peut aisément montrer que pour $1\leq i\leq n$ et $r\in\mathbb{N}$ on a

$$(E_i^r,F_i^r)=\frac{q_i^{-\frac{r(r-1)}{2}}[r]_{q_i}!}{(q_i-q_i^{-1})^r}.$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la proposition 4.1.9.

Lemme 4.1.10. *Soient $x\in\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et $y\in\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$. La forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ satisfait*

$$(x,F_iy)=(E_i,F_i)(r_i(x),y),\qquad (x,yF_i)=(E_i,F_i)(r'_i(x),y),$$
$$(E_ix,y)=(E_i,F_i)(x,\rho'_i(y)),\qquad (xE_i,y)=(E_i,F_i)(x,\rho_i(y)).$$

Terminons par une propriété importante de la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ (cf. [Ta92, Proposition 2.1.4]).

Proposition 4.1.11. *La restriction de la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ à $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}\times\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$ est non dégénérée.*

4.1.6 Puissances divisées et base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$

Introduisons les puissances divisées $E_i^{(r)}$ et $F_i^{(r)}$ des éléments E_i et F_i :

$$E_i^{(r)}=\frac{E_i^r}{[r]_{q_i}}\quad\text{et}\quad F_i^{(r)}=\frac{F_i^r}{[r]_{q_i}}.$$

On dispose également d'une action du groupe de tresses de W sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$, comme dans le cas des algèbres enveloppantes quantiques. Commençons pas définir les endomorphismes T_i comme dans [Lu90b, Theorem 3.1] pour $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.1.12. *Pour $1\leq i\leq n$, il existe un unique automorphisme T_i de $\mathbb{Q}(q)$-algèbre de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ tel que*

$$T_i(K_\lambda)=K_{s_i(\lambda)}\quad T_i(L_\lambda)=L_{s_i(\lambda)},\ \forall\lambda\in Q,$$

et, pour $1\leq j\leq n$, en posant $r=-\langle\alpha_j,\alpha_i^\vee\rangle$,

$$T_i(E_j)=\begin{cases}-F_iL_i & \text{si } i=j,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^r(-1)^kq_i^{-k}E_i^{(r-k)}E_jE_i^{(k)} & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$T_i(F_j)=\begin{cases}-K_i^{-1}E_i & \text{si } i=j,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^r(-1)^kq_i^{k}F_i^{(k)}F_jF_i^{(r-k)} & \text{sinon,}\end{cases}$$

Les relations de tresse sont vérifiées comme dans [Lu90b, Theorem 3.2].

Proposition 4.1.13. *Les automorphismes $(T_i)_{1\leq i\leq n}$ satisfont les relations de tresse et définissent ainsi un morphisme de groupes du groupe de tresses associé à W vers le groupe d'automorphismes de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.*

Fixons à présent une décomposition réduite $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ du plus long élément w_0 de W. Les racines positives de Φ sont alors

$$\Phi^+ = \left\{ s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}(\alpha_{i_{k+1}}) \,\middle|\, 0 \leq k \leq r-1 \right\}.$$

Pour $\alpha = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}(\alpha_{i_{k+1}}) \in \Phi^+$ on définit les éléments suivants de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$:

$$E_\alpha = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(E_{i_{k+1}}) \quad \text{et} \quad F_\alpha = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}(F_{i_{k+1}})$$

Remarquons que E_α (resp. F_α) est homogène de degré α (resp. $-\alpha$). De plus, le choix d'une décomposition réduite de w_0 munit Φ^+ d'un ordre : $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}(\alpha_{i_{k+1}}) \preccurlyeq s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k+1}}(\alpha_{i_{k+2}})$ pour tout k. Les produits d'éléments E_α (resp. F_α) seront ordonnés selon cet ordre.

Proposition 4.1.14 ([Lu90b, Theorem 6.7])**.** *Les éléments*

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha^{(n_\alpha)},\ n_\alpha \in \mathbb{N}$$

forment une $\mathbb{Q}(q)$-base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$.

Les éléments

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} F_\alpha^{(n_\alpha)},\ n_\alpha \in \mathbb{N}$$

forment une $\mathbb{Q}(q)$-base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$.

Les éléments

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} F_\alpha^{(n_\alpha)} L_\lambda K_\mu \prod_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha^{(m_\alpha)},\ n_\alpha \in \mathbb{N}, m_\alpha \in \mathbb{N}, \lambda, \mu \in Q$$

forment une $\mathbb{Q}(q)$-base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.

On s'intéresse maintenant à la base duale relativement à la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ de la base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ donnée à la proposition 4.1.14. La proposition suivante est [Ja96, 8.29].

Proposition 4.1.15. *Pour tout $\alpha \in \Phi^+$, soient $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{N}$. On a*

$$\left(\prod_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha^{a_\alpha}, \prod_{\alpha\in\Phi^+} F_\alpha^{b_\alpha} \right) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \delta_{a_\alpha, b_\alpha} \frac{q_\alpha^{-\frac{a_\alpha(a_\alpha-1)}{2}} [a_\alpha]_{q_\alpha}!}{(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{a_\alpha}}.$$

La base duale de $\left(\prod_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha^{(n_\alpha)}\right)_{(n_\alpha)\in\mathbb{N}^{\Phi^+}}$ est ainsi

$$\left(\prod_{\alpha\in\Phi^+} q_\alpha^{\frac{n_\alpha(n_\alpha-1)}{2}} [n_\alpha]_{q_\alpha}! (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{n_\alpha} F_\alpha^{(n_\alpha)} \right)_{(n_\alpha)\in\mathbb{N}^{\Phi^+}}.$$

4.1.7 Quasi-R-matrice

L'algèbre de Hopf $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ n'est pas tressée, pour la même raison que $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ ne l'est pas (cf. [CP95, 9.1.B]). Néanmoins, on dispose d'une quasi-R-matrice qui nous permettra de munir la catégorie de modules d'un tressage après ajout d'une racine L-ième de q. On adapte les arguments de [Ja96, Chapter 7] à l'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.

Pour $\mu \in Q^+$, on se donne une base $(u_i^\mu)_{i\in I_\mu}$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et on note $(v_i^\mu)_{i\in I_\mu}$ la base duale de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$ pour la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$. On pose alors

$$\Theta_\mu = \sum_{i\in I_\mu} u_i^\mu \otimes v_i^\mu \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}).$$

Cet élément ne dépend pas de la base choisie, il correspond à l'identité sous l'identification $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu, \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu) \simeq \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$. Similairement à [Ro90, A.1], on définit un automorphisme d'algèbre Ψ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ sur les générateurs :

$$\begin{aligned}
\Psi(K_i\otimes 1) &= K_i \otimes 1, & \Psi(1\otimes K_i) &= 1\otimes K_i,\\
\Psi(L_i\otimes 1) &= L_i \otimes 1, & \Psi(1\otimes L_i) &= 1\otimes L_i,\\
\Psi(E_i\otimes 1) &= E_i \otimes L_i^{-1}, & \Psi(1\otimes E_i) &= K_i^{-1}\otimes E_i,\\
\Psi(F_i\otimes 1) &= F_i \otimes L_i, & \Psi(1\otimes F_i) &= K_i\otimes F_i.
\end{aligned}$$

Cet automorphisme remplacera la conjugaison par un élément qui existerait dans une version h-adique de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ (cf. [CP95, 9.1.B]). On montre aisément que les relations définissant $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ sont vérifiées et donc que Ψ est bien défini.

Proposition 4.1.16. *Soit $\mu \in Q$, $\mu \geq 0$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\begin{aligned}
\Theta_\mu(K_i\otimes K_i) &= \Psi(K_i\otimes K_i)\Theta_\mu,\\
\Theta_\mu(L_i\otimes L_i) &= \Psi(L_i\otimes L_i)\Theta_\mu,\\
\Theta_\mu(1\otimes E_i) + \Theta_{\mu-\alpha_i}(E_i\otimes K_i) &= \Psi(E_i\otimes 1)\Theta_{\mu-\alpha_i} + \Psi(K_i\otimes E_i)\Theta_\mu,\\
\Theta_\mu(F_i\otimes 1) + \Theta_{\mu-\alpha_i}(L_i^{-1}\otimes F_i) &= \Psi(1\otimes F_i)\Theta_{\mu-\alpha_i} + \Psi(F_i\otimes L_i^{-1})\Theta_\mu.
\end{aligned}$$

Démonstration. On suit la preuve de [Ja96, Lemma 7.1]. Les deux premières équations sont claires : K_i agit par $q^{\langle\alpha_i,\mu\rangle}$ sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et par $q^{-\langle\alpha_i,\mu\rangle}$ sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$, et de même pour L_i.

Le fait que les bases $(u_i^\mu)_{i\in I_\mu}$ et $(v_i^\mu)_{\in\in I_\mu}$ soient duales l'une de l'autre pour $(\cdot,\cdot)$ implique que pour tous $x \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et $y \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$

$$x = \sum_{i\in I_\mu} (x, v_i^\mu) u_i^\mu \quad \text{et} \quad y = \sum_{i\in I_\mu} (u_i^\mu, y) v_i^\mu.$$

Afin d'alléger un peu les notations, posons $c_i = (q_i - q_i^{-1})^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
(1\otimes E_i)\Theta_\mu - \Theta_\mu(1\otimes E_i) &= \sum_j u_j^\mu \otimes \left(E_i v_j^\mu - v_j^\mu E_i\right)\\
&= c_i \sum_j u_j^\mu \otimes \left(\rho_i\left(v_j^\mu\right) K_i - L_i^{-1}\rho_i'\left(v_j^\mu\right)\right) \quad \text{par le lemme 4.1.8}\\
&= c_i \sum_{j,k} u_j^\mu \otimes \left[\left(u_k^{\mu-\alpha_i}, \rho_i\left(v_j^\mu\right)\right) v_k^{\mu-\alpha_i} K_i - \left(u_k^{\mu-\alpha_i}, \rho_i'\left(v_j^\mu\right)\right) L_i^{-1} v_k^{\mu-\alpha_i}\right]\\
&= c_i \sum_{j,k} u_j^\mu \otimes \left[\left(u_k^{\mu-\alpha_i} E_i, v_j^\mu\right) v_k^{\mu-\alpha_i} K_i - \left(E_i u_k^{\mu-\alpha_i}, v_j^\mu\right) L_i^{-1} v_k^{\mu-\alpha_i}\right] \quad \text{par le lemme 4.1.10}\\
&= \sum_k \left(u_k^{\mu-\alpha_i} E_i \otimes v_k^{\mu-\alpha_i} K_i - E_i u_k^{\mu-\alpha_i} \otimes L_i^{-1} v_k^{\mu-\alpha_i}\right)\\
&= \Theta_{\mu-\alpha_i}(E_i\otimes K_i) - \left(E_i \otimes L_i^{-1}\right)\Theta_{\mu-\alpha_i},
\end{aligned}$$

comme souhaité puisque $\Psi(E_i\otimes 1) = E_i \otimes L_i^{-1}$ et $\Psi(K_i\otimes E_i) = 1\otimes E_i$. La dernière formule se montre de la même manière. □

Plaçons nous dans un cadre similaire à [Lu10, Chapter 4] : on travaille dans la complétion $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\otimes\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ pour la suite décroissante de sous-espaces

$$(\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\otimes\mathscr{D}_q(\mathfrak{g}))_N = \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \sum_{\mathrm{ht}(\mu)\geq N} \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu} + \sum_{\mathrm{ht}(\mu)\geq N} \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_{\mu} \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}).$$

La multiplication se prolonge alors par continuité, tout comme le morphisme d'algèbres Ψ. On peut alors sommer tous les Θ_μ dans cette complétion, et on définit Θ comme tel

$$\Theta = \sum_{\substack{\mu\in Q\\ \mu\geq 0}} \Theta_\mu.$$

La proposition 4.1.16 devient alors

$$\Theta\Delta(u) = (\Psi\circ\Delta^{\mathrm{op}})(u)\Theta,$$

pour tout $u\in\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$, Δ^{op} désignant le coproduit opposé.

On souhaite à présent calculer $(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Theta)$ et $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Theta)$ puisque notre élément Θ servira à définir un tressage. Des bases duales l'une de l'autre de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ et de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$ pour la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ ayant été fixées, on peut écrire le coproduit d'un élément x de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$ de manière plus précise :

$$\Delta(x) = \sum_{\substack{0\leq\nu\leq\mu\\ i,j}} \left(x, v_i^\nu v_j^{\mu-\nu}\right) u_i^\nu \otimes K_\nu u_j^{\mu-\nu}. \tag{4.4}$$

Et de même, pour $y\in\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$,

$$\Delta(y) = \sum_{\substack{0\leq\nu\leq\mu\\ i,j}} \left(u_i^\nu u_j^{\mu-\nu}, y\right) L_\nu^{-1} v_j^{\mu-\nu} \otimes v_i^\nu. \tag{4.5}$$

Lemme 4.1.17. *Soit $\mu \in Q$, $\mu \geq 0$. On a*

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Theta_\mu) = \sum_{0 \leq \nu \leq \mu} (\Theta_\nu)_{13}(1 \otimes K_\nu \otimes 1)(\Theta_{\mu-\nu})_{23},$$

et

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Theta_\mu) = \sum_{0 \leq \nu \leq \mu} (\Theta_\nu)_{13}(1 \otimes L_\nu^{-1} \otimes 1)(\Theta_{\mu-\nu})_{12}.$$

Démonstration. On calcule grâce à (4.5)

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id})\big(\Theta_\mu\big) &= \sum_k \Delta\big(u_k^\mu\big) \otimes v_k^\mu \\
&= \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq \mu \\ i,j,k}} \big(u_k^\mu, v_i^\nu v_j^{\mu-\nu}\big)\, u_i^\nu \otimes K_\nu u_j^{\mu-\nu} \otimes v_k^\mu \\
&= \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq \mu \\ i,j}} u_i^\nu \otimes K_\nu u_j^{\mu-\nu} \otimes v_i^\nu v_j^{\mu-\nu} \\
&= \sum_{0 \leq \nu \leq \mu} (\Theta_\nu)_{13}(1 \otimes K_\nu \otimes 1)(\Theta_{\mu-\nu})_{23}.
\end{aligned}$$

Un calcul similaire avec (4.4) donne l'autre moitié du lemme. □

Traduisons maintenant ce lemme en égalités dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. Commençons par remarquer que pour $x \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})_\mu^{>0}$ et $y \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})_{-\mu}^{<0}$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(x \otimes 1) &= x \otimes L_\mu^{-1}, & \Psi(1 \otimes x) &= K_\mu^{-1} \otimes x, \\
\Psi(y \otimes 1) &= y \otimes L_\mu, & \Psi(1 \otimes y) &= K_\mu \otimes y.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Theta) &= \sum_{\mu \geq 0} \sum_{\nu+\eta=\mu} \big(\Theta_\eta\big)_{13}\big(1 \otimes K_\eta \otimes 1\big)(\Theta_\nu)_{23} \\
&= \sum_{\mu \geq 0} \sum_{\nu+\eta=\mu} \Psi_{23}\big(\big(\Theta_\eta\big)_{13}\big)(\Theta_\nu)_{23} \\
&= \Psi_{23}\big(\Theta_{13}\big)\Theta_{23}.
\end{aligned}$$

Et de même,

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Theta) = \Psi_{12}\big(\Theta_{13}\big)\Theta_{12}.$$

Le dernier lemme de cette partie concerne l'inversibilité de Θ. On pose

$$\Gamma_\mu = (S \otimes \mathrm{id})(\Theta_\mu)(K_\mu \otimes 1) \quad \text{et} \quad \Gamma = \sum_{\mu \geq 0} \Gamma_\mu.$$

Lemme 4.1.18. *L'élément Γ est l'inverse de Θ dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Dire que Γ est l'inverse de Θ dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ est équivalent à

$$\sum_{\lambda+\nu=\mu} \Gamma_\lambda \Theta_\nu = \delta_{\mu,0}, \tag{4.6}$$

et

$$\sum_{\lambda+\nu=\mu} \Theta_\lambda \Gamma_\nu = \delta_{\mu,0}, \tag{4.7}$$

pour tout $\mu \in Q^+$.

Commençons par (4.6). Si $\mu = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons alors $\mu > 0$. Comme

$$\sum_{\lambda+\nu=\mu} \Gamma_\lambda \Theta_\nu = \sum_{\substack{\lambda+\nu=\mu \\ i,j}} S(u_i^\lambda) K_\lambda u_j^\nu \otimes v_i^\lambda v_j^\nu$$

est dans $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$, il suffit de montrer qu'appliquer $\mathrm{id}\otimes(x,\cdot)$ donne zéro, pour tout $x \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu$, la forme $(\cdot,\cdot)$ étant non dégénérée sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}_\mu \times \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}_{-\mu}$. Or

$$\Delta(x) = \sum_{\substack{\lambda+\nu=\mu \\ i,j}} \left(x, v_i^\lambda v_j^\nu\right) u_i^\lambda \otimes K_\lambda u_j^\nu,$$

et l'axiome de l'antipode donne

$$0 = \varepsilon(x) = \sum_{\substack{\lambda+\nu=\mu \\ i,j}} \left(x, v_i^\lambda v_j^\nu\right) S(u_i^\lambda) K_\lambda u_j^\nu,$$

comme voulu.

En ce qui concerne (4.7), on applique à nouveau $\mathrm{id}\otimes(x,\cdot)$ pour montrer que

$$\sum_{\lambda+\nu=\mu} \Theta_\lambda \Gamma_\nu = \sum_{\substack{\lambda+\nu=\mu \\ i,j}} u_i^\lambda S(u_j^\nu) K_\nu \otimes v_i^\lambda v_j^\nu = 0.$$

On utilise à nouveau l'axiome de l'antipode pour avoir

$$0 = \varepsilon(x) = \sum_{\substack{\lambda+\nu=\mu \\ i,j}} \left(x, v_i^\lambda v_j^\nu\right) u_i^\lambda S(u_j^\nu) K_{-\lambda},$$

ce qui, après multiplication par K_μ, est le résultat attendu. □

Résumons les propriétés de la quasi-R-matrice Θ.

Proposition 4.1.19. *L'élément $\Theta \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ est inversible et*

— *pour tout $u \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ on a $\Theta\Delta(u) = (\Psi \circ \Delta^{\mathrm{op}})(u)\Theta$,*

— $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Theta) = \Psi_{23}(\Theta_{13})\Theta_{23}$,

— $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Theta) = \Psi_{12}(\Theta_{13})\Theta_{12}$.

Terminons par une forme explicite de Θ en utilisant la base de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ de la proposition 4.1.14 ainsi que sa duale

$$\Theta = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} [n]_{q_\alpha}! (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^n E_\alpha^{(n)} \otimes F_\alpha^{(n)} \right). \tag{4.8}$$

4.2 Représentations à q générique

On s'intéresse désormais à la théorie des représentations de l'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ introduite dans la partie précédente.

4.2.1 Représentations de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$

On étudie la catégorie $\mathscr{C}_q$ dont les objets sont les représentations M de dimension finie de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ telles que

$$M = \bigoplus_{(\lambda,\mu)\in P\times P} M_{(\lambda,\mu)},$$

où $M_{\lambda,\mu}$ désigne le sous-espace des vecteurs de poids $(\lambda,\mu)\in P\times P$ de M :

$$M_{\lambda,\mu} = \left\{ m\in M \;\middle|\; K_i\cdot m = q_i^{\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle} m,\ L_i\cdot m = q_i^{\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle} m,\ \forall 1\leq i\leq n \right\}.$$

Les morphismes de la catégorie $\mathscr{C}_q$ sont bien évidemment les applications $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-linéaires entre représentations.

L'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ étant de Hopf, la catégorie $\mathscr{C}_q$ est une catégorie monoïdale abélienne et rigide. On munit $P\times P$ d'un ordre partiel : $(\lambda,\mu)\leq(\lambda',\mu')$ si et seulement $(\lambda'-\lambda,\mu'-\mu) = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(\alpha,\alpha)$ avec $n_\alpha\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire $(\lambda'-\lambda,\mu'-\mu)$ est dans la diagonale de Q dans $P\times P$.

Proposition 4.2.1. *Un module simple de $\mathscr{C}_q$ est un module de plus haut poids.*

Démonstration. Soit M un module simple de $\mathscr{C}_q$. Étant de dimension finie, M admet un nombre fini de poids. Par conséquent, il existe un poids $(\lambda,\mu)\in P\times P$ de M tel que pour tous les autres poids (λ',μ') de M on ait $(\lambda,\mu)\not\leq(\lambda',\mu')$. Choisissons $m\in M_{(\lambda,\mu)}$ non nul. Comme pour tout $1\leq i\leq n$ le vecteur $E_i\cdot m$ est de poids $(\lambda+\alpha_i,\mu+\alpha_i)$, il est nécessairement nul par choix de (λ,μ). Ainsi m est un vecteur de plus haut poids. Le sous-$\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-module de M engendré par m est alors égal à M puisque ce dernier est simple. □

Proposition 4.2.2. *Un plus haut poids (λ,μ) d'un module de $\mathscr{C}_q$ vérifie $\lambda+\mu\in 2P^+$.*

Démonstration. Soit M un module dans $\mathscr{C}_q$ et considérons $m\in M$ un vecteur de plus haut poids (λ,μ). Fixons $1\leq i\leq n$ et considérons la famille $(F_i^{(k)}\cdot m)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de M. L'élément $F_i^{(k)}\cdot m$ est de poids $(\lambda-k\alpha_i,\mu-k\alpha_i)$ et le module M n'ayant qu'un nombre fini de poids, il existe un entier k_i tel que $F_i^{(k_i)}\cdot m\neq 0$ et $F_i^{(k_i+1)}\cdot m = 0$. Comme

$$[E_i, F_i^{(k_i+1)}] = F_i^{(k_i)} \frac{q_i^{-k_i}K_i - q_i^{k_i}L_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}},$$

on a $0 = [E_i, F_i^{(k_i+1)}]m = \frac{q_i^{-k_i+\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle} - q_i^{k_i-\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle}}{q_i-q_i^{-1}} F_i^{(k_i)} m$ et ainsi $\langle\lambda+\mu,\alpha_i^\vee\rangle = 2k_i$. Ceci étant vérifié pour tout i, on a bien $\lambda+\mu = 2\sum_{i=1}^n k_i\varpi_i\in 2P^+$. □

Un poids (λ,μ) d'un module dans $\mathscr{C}_q$ vérifie nécessairement $\lambda+\mu\in 2P$. On notera $\tilde{P}$ l'ensemble de tels poids. On note $\tilde{P}^+$ le sous-ensemble des $(\lambda,\mu)\in P\times P$ tels que $\lambda+\mu\in 2P^+$.

Une différence majeure de la théorie des représentations de l'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ comparativement à celle de l'algèbre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ est l'existence de nombreux modules inversibles. Pour

$\lambda \in P$, il existe un $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-module de dimension 1 avec pour unique poids $(\lambda, -\lambda)$. Il provient du morphisme d'algèbre $\varphi_\lambda \colon \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(q)$ définit par $K_i \mapsto q^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$, $L_i \mapsto q^{-\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$, $E_i \mapsto 0$ et $F_i \mapsto 0$. On note $L(\lambda, -\lambda)$ le module ainsi obtenu.

Proposition 4.2.3. *Pour tout $(\lambda, \mu) \in \tilde{P}^+$, il existe un module simple de plus haut poids (λ, μ). Ce dernier est de plus unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \tilde{P}^+$. La classification des $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules assure qu'il existe un $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-module simple M de plus haut poids $\frac{\lambda+\mu}{2}$ qui est somme directe de ses espaces de poids. Utilisant le morphisme surjectif $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$, on considère M comme un élément de $\mathscr{C}_q$. On tensorise maintenant M par le module inversible $L\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$ et on obtient un module simple de plus haut poids (λ, μ).

En ce qui concerne l'unicité à isomorphisme près, si M_1 et M_2 sont deux tels modules, $M_1 \otimes L\left(\frac{\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu-\lambda}{2}\right)$ et $M_1 \otimes L\left(\frac{\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu-\lambda}{2}\right)$ sont deux modules simples de même plus haut poids $\left(\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}\right)$. Par conséquent, ces modules sont des $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules simples de même plus haut poids, puisque tous les éléments centraux z_i agissent trivialement. Ils sont donc isomorphes et il en est alors de même pour M_1 et M_2. □

Les modules simples de $\mathscr{C}_q$ sont donc classifiés par leur plus haut poids $(\lambda, \mu) \in \tilde{P}^+$. En plus de la construction provenant de la preuve de la proposition 4.2.3, on pourrait tout aussi bien faire une construction "à la Verma". On note $L(\lambda, \mu)$ le module simple de plus haut poids (λ, μ).

Proposition 4.2.4. *La catégorie $\mathscr{C}_q$ est semi-simple.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'extension $0 \to L \to M \to N \to 0$ non scindée d'objets de $\mathscr{C}_q$, avec M indécomposable et L, N simples. Supposons qu'une telle extension existe. Les éléments centraux z_i agissant de manière semi-simple par définition de $\mathscr{C}_q$ et M étant indécomposable, chaque z_i agit par un scalaire non nul. Ainsi si (λ, μ) est n'importe quel poids de M, z_i agit par $q^{\langle \alpha_i, \lambda-\mu \rangle}$ et la valeur de $\lambda-\mu$ ne dépend pas du poids choisi et est dans $2P$. On tensorise alors la suite exacte par l'objet inversible $L\left(-\frac{\lambda-\mu}{2}, \frac{\lambda-\mu}{2}\right)$, (λ, μ) étant un poids de M, pour obtenir une suite exacte de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie. Cette suite est alors scindée [CP95, Theorem 10.1.7] ce qui contredit notre hypothèse. □

La catégorie $\mathscr{C}_q$ dispose d'une graduation fidèle par P donnée par l'action des éléments centraux $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$\mathscr{C}_q = \bigoplus_{\nu \in P} \mathscr{C}_{q,\nu},$$

où $\mathscr{C}_{q,\nu}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_q$ constituée des modules sur lesquels les $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ agissent par $(q^{\langle \alpha_i, 2\nu \rangle})_{1 \leq i \leq n}$. Chaque $\mathscr{C}_{q,\nu}$ est équivalente à la catégorie des $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie : c'est clair pour $\mathscr{C}_{q,0}$ et tensoriser par $L(\nu, -\nu)$ donne une équivalence entre $\mathscr{C}_{q,0}$ et $\mathscr{C}_{q,\nu}$.

4.2.2 Une formule de caractère

On cherche à obtenir une formule pour le caractère des modules simples de $\mathscr{C}_q$. On utilise une notation exponentielle pour désigner les éléments de l'algèbre de groupe de

$P \times P$. Le caractère d'un module M dans $\mathscr{C}_q$ est par définition

$$\chi_M = \sum_{(\lambda,\mu)\in P\times P} \dim(M_{(\lambda,\mu)}) e^{(\lambda,\mu)}.$$

Comme un module de $\mathscr{C}_q$ n'a qu'un nombre fini de poids, presque tous les termes de la somme définissant son caractère sont nuls. De plus, le support de χ_M est contenu dans $\tilde{P}$.

La formule de caractère de Weyl pour les $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules simples fait apparaître l'action du groupe de Weyl sur le réseau des poids P. Ici, on va avoir également une action du groupe de Weyl sur $\tilde{P}$ mais qui est différente de l'action diagonale. Pour $w \in W$ et $(\lambda,\mu) \in \tilde{P}$, on définit

$$w(\lambda,\mu) = \left(w\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \frac{\lambda-\mu}{2}, w\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) - \frac{\lambda-\mu}{2}\right).$$

En particulier, si s est la réflexion d'hyperplan orthogonal à α on obtient

$$s(\lambda,\mu) = (\lambda,\mu) - \frac{1}{2}\langle \lambda+\mu, \alpha^\vee\rangle(\alpha,\alpha).$$

La formule de caractère de Weyl donne les caractères de tous les modules simples de $\mathscr{C}_{q,0}$, c'est-à-dire ceux de la forme $L(\lambda,\lambda)$ avec $\lambda \in P^+$:

$$\chi_{(\lambda,\lambda)} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{(w(\lambda+\rho),w(\lambda+\rho))}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{(w(\rho),w(\rho))}}.$$

Mais pour $(\lambda,\mu)\in\tilde{P}$, on a un isomorphisme

$$L(\lambda,\mu) \simeq L\left(\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) \otimes L\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right),$$

dans $\mathscr{C}_q$ et par conséquent le caractère de $L(\lambda,\mu)$ est

$$\chi_{(\lambda,\mu)} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{\left(w\left(\frac{\lambda+\mu}{2}+\rho\right), w\left(\frac{\lambda+\mu}{2}+\rho\right)\right)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{(w(\rho),w(\rho))}} e^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)},$$

ce qui est égal à

$$\chi_{(\lambda,\mu)} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{w(\lambda+\rho,\mu+\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{w(\rho,\rho)}}.$$

On peut également réécrire cette formule en introduisant l'action translatée par ρ de W, $w\bullet(\lambda,\mu) = w(\lambda+\rho,\mu+\rho) - (\rho,\rho)$ qui stabilise bien évidemment $P\times P$:

$$\chi_{(\lambda,\mu)} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{w\bullet(\lambda,\mu)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)} e^{w\bullet(0,0)}}. \tag{4.9}$$

4.2.3 Tressage de la catégorie $\mathscr{C}_q$

Comme annoncé dans la partie 4.1.7, l'élément Θ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ nous permet de munir la catégorie $\mathscr{C}_q$ d'un tressage (cf. [CP95, 10.1.D]). On étend ici le corps des scalaires à $\mathbb{Q}(s)$ où s vérifie $s^L = q$. Rappelons que L est le plus petit entier positif tel que $L\langle\lambda,\mu\rangle \in \mathbb{Z}$ pour tous $\lambda,\mu \in P$.

Commençons par remarquer que les modules dans $\mathscr{C}_q$ ayant un nombre fini de poids, l'élément Θ_μ agit par zéro sur un produit tensoriel de deux modules de $\mathscr{C}_q$ pour $\mathrm{ht}(\mu)$ suffisamment grand : seul un nombre fini de Θ_μ n'agit pas par zéro et l'action de Θ est bien définie sur les produits tensoriels d'objets de $\mathscr{C}_q$. Ainsi, pour M et M' dans $\mathscr{C}_q$, l'action de Θ définit une application linéaire $\Theta_{M,M'} \colon M \otimes M' \to M \otimes M'$. Cette application ne respecte par la structure de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-module mais vérifie tout de même, grâce à la Proposition 4.1.16, que pour tout $u \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$

$$\Theta_{M,M'} \circ \Delta(u)_{|_{M\otimes M'}} = (\Psi \circ \Delta^{\mathrm{op}})(u)_{|_{M\otimes M'}} \circ \Theta_{M,M'},$$

égalité en tant qu'endomorphisme de $M \otimes M'$.

Afin de construire le tressage, il nous faut un autre ingrédient, qui, composé avec l'action de Θ, donnera un morphisme $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-linéaire. Pour M et M' deux modules dans $\mathscr{C}_q$, on introduit une application linéaire $f_{M,M'} \colon M \otimes M' \to M \otimes M'$ agissant par un scalaire sur chaque espace de poids. Pour $m \in M_{\lambda,\mu}$ et $m' \in M'_{\lambda',\mu'}$ on pose

$$f_{M,M'}(m \otimes m') = q^{\langle \lambda,\mu' \rangle} m \otimes m',$$

où on note $q^r = s^{Lr}$ pour $r \in \frac{1}{L}\mathbb{Z}$.

Lemme 4.2.5. *Pour tout $u \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$, on a l'égalité suivante d'endomorphismes linéaires de $M \otimes M'$*

$$u_{|_{M\otimes M'}} \circ f_{M,M'} = f_{M,M'} \circ \Psi(u)_{|_{M\otimes M'}}.$$

Démonstration. Il suffit de le vérifier sur les générateurs de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. C'est immédiat pour $K_i \otimes 1$, $L_i \otimes 1$, $1 \otimes K_i$ et $1 \otimes L_i$. Traitons désormais du cas de $E_i \otimes 1$. D'une part,

$$\left(f_{M,M'} \circ (E_i \otimes L_i^{-1})\right)_{|_{M_{\lambda,\mu}\otimes M'_{\lambda',\mu'}}} = q^{\langle \lambda+\alpha_i,\mu' \rangle - \langle \alpha_i,\mu' \rangle} (E_i \otimes 1)_{|_{M_{\lambda,\mu}\otimes M'_{\lambda',\mu'}}},$$

et d'autre part

$$\left((E_i \otimes 1) \circ f_{M,M'}\right)_{|_{M_{\lambda,\mu}\otimes M'_{\lambda',\mu'}}} = q^{\langle \lambda,\mu' \rangle} (E_i \otimes 1)_{|_{M_{\lambda,\mu}\otimes M'_{\lambda',\mu'}}},$$

ce qui permet de conclure quant au cas de $E_i \otimes 1$. La preuve pour les autres générateurs est similaire. □

On note τ la volte dans les espaces vectoriels, à savoir $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ pour tous $v \in V$ et $w \in W$, et on pose

$$c_{M,M'} = \tau \circ f_{M,M'} \circ \Theta_{M,M'}.$$

C'est alors un morphisme dans la catégorie $\mathscr{C}_q$ entre $M \otimes M'$ et $M' \otimes M$. En effet, pour $u \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ on a

$$\begin{aligned}
c_{M,M'} \circ u_{|_{M\otimes M'}} &= \tau \circ f_{M,M'} \circ \Theta_{M,M'} \circ \Delta(u)_{|_{M\otimes M'}} \\
&= \tau \circ f_{M,M'} \circ (\Psi \circ \Delta^{\mathrm{op}})(u)_{|_{M\otimes M'}} \circ \Theta_{M,M'} \\
&= \tau \circ \Delta^{\mathrm{op}}(u)_{|_{M\otimes M'}} \circ f_{M,M'} \circ \Theta_{M,M'} \\
&= \Delta(u)_{|_{M'\otimes M}} \circ c_{M,M'} \\
&= u|_{M'\otimes M} \circ c_{M,M'}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.2.6. *Le morphisme c défini ci-dessus munit la catégorie $\mathscr{C}_q$ d'un tressage : les axiomes de l'hexagone sont vérifiés.*

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que $c_{M,M'\otimes M''} = (\mathrm{id}_{M'} \otimes c_{M,M''}) \circ (c_{M,M'} \otimes \mathrm{id}_{M''})$. Ceci découle des égalités suivantes, où on note $\tau_{1,23} \colon M \otimes (M' \otimes M'') \to (M' \otimes M'') \otimes M$ la volte, qui est égale à $\tau_{23} \circ \tau_{12}$:

$$\begin{aligned}
c_{M,M'\otimes M''} &= \tau_{1,23} \circ f_{M,M'\otimes M''} \circ \Theta_{M,M'\otimes M''} \\
&= \tau_{23} \circ \tau_{12} \circ (f_{M,M''})_{13} \circ (f_{M,M'})_{12} \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Theta)_{|M\otimes M'\otimes M''} \\
&= \tau_{23} \circ \tau_{12} \circ (f_{M,M''})_{13} \circ (f_{M,M'})_{12} \circ \Psi_{12}(\Theta_{13})_{|M\otimes M'\otimes M''} \circ (\Theta_{12})_{|M\otimes M'\otimes M''} \\
&= \tau_{23} \circ \tau_{12} \circ (f_{M,M''})_{13} \circ (\Theta_{13})_{|M\otimes M'\otimes M''} \circ (f_{M,M'})_{12} (\Theta_{M,M'} \otimes \mathrm{id}_{M''}) \\
&= \tau_{23} \circ (f_{M,M''})_{23} \circ (\mathrm{id}_{M'} \otimes \Theta_{M,M''}) \circ \tau_{12} \circ (f_{M,M'})_{12} (\Theta_{M,M'} \otimes \mathrm{id}_{M''}) \\
&= (\mathrm{id}_{M'} \otimes c_{M,M''}) \circ (c_{M,M'} \otimes \mathrm{id}_{M''}).
\end{aligned}$$

L'autre axiome de l'hexagone est montrée de manière similaire. □

4.2.4 Dualité et structure pivotale

L'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ disposant d'un antipode inversible, tout module M admet à la fois un dual à gauche et un dual à droite. En tant qu'espace vectoriel, ces duaux sont tous deux isomorphes à l'espace des formes linéaires sur M. La structure de module sur le dual à gauche M^* (resp. à droite ${}^*M$) est donnée par

$$(u \cdot \varphi)(m) = \varphi(S(u) \cdot m) \quad \text{(resp. } (u \cdot \varphi)(m) = \varphi(S^{-1}(u) \cdot m)),$$

pour φ une forme linéaire sur M et $u \in \mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$.

Pour $(\lambda, \mu) \in \tilde{P}^+$ le module simple $L(\lambda, \mu)$ est isomorphe à $L\left(\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) \otimes L\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$ et ainsi

$$L(\lambda,\mu)^* \simeq L\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^* \otimes L\left(\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}\right)^*.$$

Mais le dual à gauche d'un $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-module simple $L(\kappa,\kappa)$ est isomorphe à $L(-w_0(\kappa), -w_0(\kappa))$ (cf. [Ja96, 5.16]) et le dual à gauche du module inversible $L(\kappa, -\kappa)$ est isomorphe à $L(-\kappa, \kappa)$. Par conséquent,

$$L(\lambda,\mu)^* \simeq L\left(\frac{\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu-\lambda}{2}\right) \otimes L\left(-w_0\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right), -w_0\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\right) \simeq L(-w_0(\lambda,\mu)).$$

De même ${}^*L(\lambda,\mu) \simeq L(-w_0(\lambda,\mu))$, ce qui découle aussi de la structure pivotale que l'on va a présent décrire.

On a vu au lemme 4.1.5 que la conjugaison par $K_{2\rho}$ est égale au carré de l'antipode. On dispose alors, pour tout $\lambda \in Q$, d'une structure pivotale donnée par

$$a_{\lambda,M} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M^{**} \\ m & \longmapsto & \varphi \mapsto \varphi((K_{2\rho} z_\lambda) \cdot m) \end{array} \right. .$$

On travaillera principalement avec la structure pivotale donnée par $\lambda = -2\rho$, *i.e.* on choisit $L_{2\rho}$ comme élément pivot dans notre algèbre de Hopf $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. Cette structure pivotale définit alors des traces quantiques ainsi que des dimensions quantiques. La formule de caractère donnée dans la partie 4.2.2 donne les dimensions quantiques :

$$\dim^+(L(\lambda,\mu)) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}q^{\langle 2\rho,(w\bullet(\lambda,\mu))_2\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}q^{\langle 2\rho,w\bullet(0)\rangle}}$$

et

$$\dim^-(L(\lambda,\mu)) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}q^{-\langle 2\rho,(w\bullet(\lambda,\mu))_2\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}q^{-\langle 2\rho,w\bullet(0)\rangle}},$$

où $(w\bullet(\lambda,\mu))_j$ désigne la j-ème composante de $w\bullet(\lambda,\mu)$, $j\in\{1,2\}$.

On notera que cette structure pivotale n'est pas sphérique et donc les traces à gauche et à droite ne coïncident pas, et de même pour les deux dimensions quantiques. On remarquera également que comme les actions de $K_{2\rho}$ et $L_{2\rho}$ coïncident sur les $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-modules, la dimension quantique de $L(\kappa,\kappa)$ est la même si on le considère comme un $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-module ou un $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$-module et les deux dimensions coïncident dans ce cas particulier.

4.3 Spécialisation à une racine de l'unité et modules basculants

Maintenant, nous allons construire une catégorie de fusion à partir de la catégorie de modules de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. La catégorie $\mathscr{C}_q$ étudiée précédemment a une infinité d'objets simples, et n'est donc pas de fusion. On adapte alors la construction des catégories de fusion associées aux groupes quantiques $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ avec ξ une racine de l'unité dans $\mathbb{C}$. Notons $\mathscr{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$.

4.3.1 Forme intégrale de Lusztig

Afin de pouvoir spécialiser l'algèbre $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ à une racine de l'unité, on introduit une sous-$\mathscr{A}$-algèbre de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$. On considère les éléments suivants de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$:

$$\begin{bmatrix} K_i;c \\ t\end{bmatrix} = \prod_{r=1}^{t}\frac{q_i^{c-r+1}K_i - q_i^{-c+r-1}K_i^{-1}}{q_i^r - q_i^{-r}}, \quad \begin{bmatrix} L_i;c \\ t\end{bmatrix} = \prod_{r=1}^{t}\frac{q_i^{c-r+1}L_i - q_i^{-c+r-1}L_i^{-1}}{q_i^r - q_i^{-r}},$$

$$\begin{bmatrix} K_i;c;L_i \\ t\end{bmatrix} = \prod_{r=1}^{t}\frac{q_i^{c-r+1}K_i - q_i^{-c+r-1}L_i^{-1}}{q_i^r - q_i^{-r}}, \quad \begin{bmatrix} z_i;c \\ t\end{bmatrix} = \prod_{r=1}^{t}\frac{q_i^{c-r+1}z_i - q_i^{-c+r-1}z_i^{-1}}{q_i^r - q_i^{-r}}$$

pour $1\le i\le n$, $c\in\mathbb{Z}$ et $t\in\mathbb{N}$.

On définit $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ comme la sous-$\mathscr{A}$-algèbre engendrée par $E_i^{(r)}$, $F_i^{(r)}$, K_i, L_i, $\begin{bmatrix} K_i;c \\ t\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} L_i;c \\ t\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} z_i;c \\ t\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} K_i;c;L_i \\ t\end{bmatrix}$, avec $1\le i\le n$, $c\in\mathbb{Z}$ et $t\in\mathbb{N}$. Le coproduit, la counité ainsi que l'antipode définis sur $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ se restreignent à $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ et munissent $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

Le quotient de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ par l'idéal de Hopf engendré par $z_i - 1$, $\begin{bmatrix} z_i; c \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}_{q_i}$, $\begin{bmatrix} K_i; c; L_i \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_i; c \\ t \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} K_i; c; L_i \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_i; c \\ t \end{bmatrix}$, pour $1 \leq i \leq n$ est la forme intégrale de Lusztig de l'algèbre $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ [CP95, Section 9.3].

L'introduction des éléments $\begin{bmatrix} K_i; c; L_i \\ t \end{bmatrix}$ est justifiée par leurs apparitions dans certains commutateurs :

$$E_i^{(p)} F_i^{(r)} = \sum_{t=0}^{\min(p,r)} F_i^{(r-t)} \begin{bmatrix} K_i; 2t - r - p; L_i \\ t \end{bmatrix} E_i^{(p-t)},$$

avec $1 \leq i \leq n$, $r, s \in \mathbb{N}$. On sera amené à utiliser les formules suivantes pour le coproduit.

Proposition 4.3.1. *Soient* $1 \leq i \leq n$ *et* $t \in \mathbb{N}$. *Alors*

1. $\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t \end{bmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r},$
2. $\Delta\left(\begin{bmatrix} L_i; 0 \\ t \end{bmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t} \begin{bmatrix} L_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} L_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} L_i; 0 \\ r \end{bmatrix} L_i^{t-r},$
3. $\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i; 0; L_i \\ t \end{bmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t} \begin{bmatrix} K_i; 0; L_i \\ t-r \end{bmatrix} L_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0; L_i \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r},$
4. $\Delta\left(\begin{bmatrix} z_i; 0 \\ t \end{bmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t} \begin{bmatrix} z_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} z_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} z_i; 0 \\ r \end{bmatrix} z_i^{t-r}.$

Démonstration. On ne montre que la première égalité, les autres se font de même. On procède par récurrence sur t. Pour $t = 0$ il n'y a rien à faire et pour $t = 1$, on obtient

$$\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \otimes K_i + K_i^{-1} \otimes \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} = \frac{K_i \otimes K_i - K_i^{-1} \otimes K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

comme attendu. Supposons le résultat vérifié pour un certain $t \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t+1 \end{bmatrix}\right) &= \Delta\left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t \end{bmatrix}\right) \frac{q_i^{-t} K_i \otimes K_i - q_i^{t} K_i^{-1} \otimes K_i^{-1}}{q_i^{t+1} - q_i^{-t-1}} \\
&= \sum_{r=0}^{t} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r} \frac{q_i^{-r}(q_i^{-t+r} K_i - q_i^{t-r} K_i^{-1}) \otimes K_i}{q_i^{t+1} - q_i^{-t-1}} \right) \\
&+ \sum_{r=0}^{t} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r} \frac{q_i^{t-r} K_i^{-1} \otimes (q_i^{-r} K_i - q_i^{r} K_i^{-1})}{q_i^{t+1} - q_i^{-t-1}} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{t} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t-r+1 \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r+1} \frac{q_i^{-r}(q_i^{t-r+1} - q_i^{-t+r-1})}{q_i^{t+1} - q_i^{-t-1}} \right) \\
&+ \sum_{r=0}^{t} \left(\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t-r \end{bmatrix} K_i^{-r-1} \otimes \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ r+1 \end{bmatrix} K_i^{t-r} \frac{q_i^{t-r}(q_i^{r+1} - q_i^{-r-1})}{q_i^{t+1} - q_i^{-t-1}} \right).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à changer d'indice dans la seconde somme

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ t+1 \end{bmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ t-r+1 \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r+1} \frac{q_i^{-r}(q_i^{t-r+1}-q_i^{-t+r-1})}{q_i^{t+1}-q_i^{-t-1}}\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{t+1}\left(\begin{bmatrix} K_i;0 \\ t-r+1 \end{bmatrix} K_i^{-r} \otimes \begin{bmatrix} K_i;0 \\ r \end{bmatrix} K_i^{t-r+1} \frac{q_i^{t+1-r}(q_i^{r}-q_i^{-r})}{q_i^{t+1}-q_i^{-t-1}}\right),$$

et à remarquer que

$$\frac{q_i^{-r}(q_i^{t-r+1}-q_i^{-t+r-1})}{q_i^{t+1}-q_i^{-t-1}} + \frac{q_i^{t+1-r}(q_i^{r}-q_i^{-r})}{q_i^{t+1}-q_i^{-t-1}} = \frac{q_i^{t-2r+1}-q_i^{-t-1}+q_i^{t+1}-q_i^{t-2r+1}}{q_i^{t+1}-q_i^{-t-1}} = 1.$$

□

L'intersection de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ avec $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0}$ (resp. $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0$, resp. $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$) sera notée $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})^{>0}$ (resp. $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})^0$, resp. $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})^{<0}$). Il n'est pas difficile de montrer que pour $1 \le i \le n$, l'automorphisme T_i défini dans la Proposition 4.1.12 se restreint en un automorphisme de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$. Comme dans la partie 4.1.6, on a :

Proposition 4.3.2 ([Lu90b, Theorem 6.7]). *Les éléments*

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha^{(n_\alpha)},\ n_\alpha \in \mathbb{N}$$

forment une $\mathscr{A}$ *-base de* $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})^{>0}$.

Les éléments

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} F_\alpha^{(n_\alpha)},\ n_\alpha \in \mathbb{N}$$

forment une $\mathscr{A}$ *-base de* $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})^{<0}$.

La quasi-R-matrice Θ étudiée dans la partie 4.1.7 est un élément d'une complétion de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})\otimes\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$: ceci découle de la formule explicite (4.8). Il en est de même pour son inverse grâce au lemme 4.1.18. On note toujours cet élément Θ. L'automorphisme Ψ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})\otimes\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ se restreint lui aussi à un automorphisme de $\mathscr{A}$ -algèbres de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})\otimes\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$, que l'on notera encore Ψ. La proposition 4.1.19 reste valable dans la forme intégrale $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$:

$$\Theta\Delta(u) = (\Psi\circ\Delta^{\mathrm{op}})(u)\Theta, \quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Theta) = \Psi_{12}(\Theta_{13})\Theta_{12}, \quad \text{et} \quad (\Delta\otimes\mathrm{id})(\Theta) = \Psi_{23}(\Theta_{13})\Theta_{23},$$

pour tout $u \in \mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$

4.3.2 Spécialisation à une racine de l'unité

On se fixe désormais ξ une racine de l'unité dans $\mathbb{C}$ d'ordre l. On note $l' = l$ si l est impair et $l' = \frac{l}{2}$ si l est pair, de sorte que l' est l'ordre de ξ^2 dans $\mathbb{C}^*$. On considère le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & \xi \end{array},$$

qui nous permet de voir $\mathbb{C}$ comme une $\mathscr{A}$ -algèbre.

Définition 4.3.3. La spécialisation $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ de $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ en ξ est l'algèbre $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$.

Introduisons pour $1 \le i \le n$ les entiers l_i comme les ordres de $\xi_i = \xi^{\frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2}}$ et posons $l_i' = l_i$ si l_i est impair $l_i' = \frac{l_i}{2}$ si l_i est pair de sorte que l_i' est l'ordre de ξ_i^2.

Au vu des générateurs de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$, l'algèbre spécialisée $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ est engendrée par les éléments

$$E_i^{(r)}, F_i^{(r)}, K_i^{\pm 1}, L_i^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K_i; c \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L_i; c \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_i; c; L_i \\ t \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} z_i; c \\ t \end{bmatrix},$$

avec $1 \le i \le n$, $r, t \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Z}$ qui ne sont autres que les images dans $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ des éléments correspondants de $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$. Il existe des relations supplémentaires dans $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ liées aux ordres des racines de l'unité ξ_i, comme par exemple

$$E_i^{l_i'} = 0, F_i^{l_i'} = 0, K_i^{2l_i'} = 1, L_i^{2l_i'} = 1, K_i^{l_i'} = L_i^{l_i'}.$$

L'image de Θ dans $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ sera notée Θ_ξ. C'est un élément inversible d'une certaine complétion de $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$. L'automorphisme d'algèbre Ψ se spécialise également en un automorphisme Ψ_ξ de l'algèbre $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$. Les relations de la proposition 4.1.19 sont encore vérifiées dans la spécialisation :

$$\Theta_\xi \Delta(u) = \left(\Psi_\xi \circ \Delta^{\mathrm{op}}\right)(u) \Theta_\xi, \quad (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Theta_\xi) = (\Psi_\xi)_{12}((\Theta_\xi)_{13})(\Theta_\xi)_{12},$$
$$\text{et} \quad (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Theta_\xi) = (\Psi_\xi)_{23}((\Theta_\xi)_{13})(\Theta_\xi)_{23},$$

pour tout $u \in \mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$.

4.3.3 Représentations de l'algèbre spécialisée

La théorie des représentations de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$, tout comme celle de $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$, est bien plus complexe que celle de $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$. Comme expliqué dans [CP95, 11.2.A], conserver la définition

$$\left\{ m \in M \;\middle|\; K_i m = \xi^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle} m, L_i m = \xi^{\langle \mu, \alpha_i \rangle} m, \ \forall 1 \le i \le n \right\}$$

des espaces de poids d'un $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-module M n'est pas adapté : on n'arrive pas à distinguer les poids (λ, μ) de $(\lambda + l_i \varpi_i, \mu)$ par exemple.

Définissons l'espace de poids (λ, μ) d'un $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-module M comme

$$M_{\lambda,\mu} = \left\{ m \in M \;\middle|\; K_i \cdot m = \xi_i^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} m, L_i \cdot m = \xi_i^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} m, \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ l_i' \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \\ l_i' \end{bmatrix}_{\xi_i}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} L_i; 0 \\ l_i' \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \\ l_i' \end{bmatrix}_{\xi_i}, \ \forall 1 \le i \le n \right\}.$$

L'apparition des éléments $\begin{bmatrix} K_i; 0 \\ l_i' \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} L_i; 0 \\ l_i' \end{bmatrix}$ n'est pas surprenante : la formule définissant ces éléments dans $\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ n'est plus valide dans $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ puisqu'on devrait diviser par 0. On a de plus une identité reliant les coefficients binomiaux quantiques en une racine de l'unité d'ordre d à la division euclidienne par d ou $\frac{d}{2}$.

Lemme 4.3.4. *Soient d un entier, ζ une racine de l'unité d'ordre d et d' l'ordre de ζ^2. Soient a et b des entiers positifs avec $a \geq b$ dont la division euclidienne par d' est $a = a_1 d' + a_0$ et $b = b_1 d' + b_0$, avec $0 \leq a_0, b_0 < d'$. On a alors*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_\zeta = (-1)^{(d'+1)(a_1+1)b_1} \left(\zeta^{d'}\right)^{(a_1+1)b_1+a_1 b_0+a_0 b_1} \binom{a_1}{b_1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_\zeta .$$

Remarque 4.3.5. Si d est impair, on a $d' = d$ et le lemme 4.3.4 se réécrit

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_\zeta = \binom{a_1}{b_1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_\zeta ,$$

ce qui est exactement [CP95, Lemma 9.3.6].

Démonstration. Rappelons tout d'abord une version quantique de la formule du binôme de Newton. Pour $m \in \mathbb{N}$ et X une indéterminée on a

$$\prod_{k=0}^{m-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) = \sum_{k=0}^{m} \zeta^{k(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_\zeta X^k.$$

Comme $\{\zeta^{-2k} \mid 0 \leq k < d'\}$ est l'ensemble des racine d'-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et que

$$\prod_{k=0}^{d'-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) = \zeta^{d'(d'-1)} \prod_{k=0}^{d'-1} \left(X+\zeta^{-2k}\right)$$

on obtient

$$\prod_{k=0}^{d'-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) = \zeta^{d'(d'-1)} (X^{d'} - (-1)^{d'}) = \zeta^{d'(d'+1)} (X^{d'} + (-1)^{d'+1}).$$

D'une part on a

$$\prod_{k=0}^{a-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) = \sum_{k=0}^{a} \zeta^{k(r-1)} \begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix}_\zeta X^k,$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{a-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) &= \left(\zeta^{d'(d'+1)} \left(X^{d'} + (-1)^{d'+1}\right)\right)^{a_1} \left(\prod_{k=0}^{a_0-1} \left(1+\zeta^{2k} X\right) \right) \\ &= \zeta^{d'(d'+1)a_1} \left(\sum_{k=0}^{a_1} \binom{a_1}{k} (-1)^{(d'+1)(a_1-k)} X^{kd'} \right) \left(\sum_{k=0}^{a_0} \zeta^{k(a_0-1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ k \end{bmatrix}_\zeta X^k \right). \end{aligned}$$

Si l'on compare le coefficient de X^b, on trouve

$$\zeta^{b(a-1)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_\zeta = \zeta^{d'(d'+1)a_1+b_0(a_0-1)} (-1)^{(d'+1)(a_1-b_1)} \binom{a_1}{b_1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}_\zeta ,$$

ce qui, combiné avec le fait que $\zeta^{d'(d'+1)} = (-1)^{d'+1}$, donne le résultat annoncé. $\square$

Avec cette définition des espaces de poids, on sépare les poids comme attendu :

Proposition 4.3.6. *Soient (λ,μ) et (λ',μ') deux poids d'un module M. Alors $M_{\lambda,\mu} = M_{\lambda',\mu'}$ si et seulement si $(\lambda,\mu)=(\lambda',\mu')$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si pour tout $1 \le i \le n$, $\xi_i^{\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle} = \xi_i^{\langle\lambda',\alpha_i^\vee\rangle}$ et $\begin{bmatrix}\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle \\ l_i'\end{bmatrix}_{\xi_i} = \begin{bmatrix}\langle\lambda',\alpha_i^\vee\rangle \\ l_i'\end{bmatrix}_{\xi_i}$ alors $\lambda=\lambda'$, et de même avec μ et μ'. Pour cela, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.7. *Soit ζ une racine de l'unité d'ordre d et d' l'ordre de ζ^2. Soient r et s deux entiers tels que $\zeta^r=\zeta^s$ et $\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = \begin{bmatrix} s \\ d'\end{bmatrix}_\zeta$. Alors $r=s$.*

Démonstration. Il découle du lemme 4.3.4 que si $r \ge 0$

$$\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = \begin{cases} r_1 & \text{si } d'=d, \\ (-1)^{r_0+r_1+1} r_1 & \text{si } d' = \frac{d}{2} \text{ et } d' \text{ impair}, \\ (-1)^{r_0} r_1 & \text{si } d'=\frac{d}{2} \text{ et } d' \text{ pair.}\end{cases} \tag{4.10}$$

Comme $\begin{bmatrix} -r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = (-1)^{d'}\begin{bmatrix} r+d'-1 \\ d'\end{bmatrix}_\zeta$, les formules ci-dessus restent valides pour $r\in\mathbb{Z}$.

Écrivons maintenant la division euclidienne de r par d' : $r = r_1 d' + r_0$ avec $0 \le r_0 < d'$. Soit $0 \le r' < d$ l'unique entier tel que $\zeta^r = \zeta^{r'}$.

Supposons d'abord $d'=d$, et donc nécessairement d' est impair. Il découle de (4.10) que $\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = r_1$ et ainsi $r = \begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta d' + r'$.

Supposons maintenant que d est pair. Soit $r''=r'$ si $0 \le r' < d'$ et $r''=r'-d'$ sinon. Si $d'=\frac{d}{2}$ est impair, il résulte de (4.10) que $\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = (-1)^{r_0+r_1+1} r_1$. Si $r''=r'$ alors $r = (-1)^{r''+1}\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta + r''$, et si $r'' \neq r'$ alors $r = (-1)^{r''}\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta + r''$.

Enfin, si $d'=\frac{d}{2}$ est pair, il découle de (4.10) que $\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta = (-1)^{r_0} r_1$ et $r = (-1)^{r''}\begin{bmatrix} r \\ d'\end{bmatrix}_\zeta + r''$. □

□

Terminons par une dernière propriété que l'on souhaite sur les espaces de poids, en ce qui concerne le produit tensoriel de deux espaces de poids.

Proposition 4.3.8. *Soient M et M' deux $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-modules, (λ,μ) un poids de M et (λ',μ') un poids de M'. Alors $(\lambda+\lambda',\mu+\mu')$ est un poids de $M\otimes M'$ et $M_{\lambda,\mu}\otimes M_{\lambda',\mu'} \subseteq (M\otimes M')_{\lambda+\lambda',\mu+\mu'}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $M_{\lambda,\mu}\otimes M_{\lambda',\mu'}\subseteq (M\otimes M')_{\lambda+\lambda',\mu+\mu'}$. Soient $m\in M$ non nul de poids (λ,μ) et $m'\in M'$ non nul de poids (λ',μ'). Comme K_i et L_i sont de type groupe, il est clair que $K_i\cdot m\otimes m'=\xi_i^{\langle\lambda+\lambda',\alpha_i^\vee\rangle}m\otimes m'$ et que $L_i\cdot m\otimes m'=\xi_i^{\langle\mu+\mu'',\alpha_i^\vee\rangle}m\otimes m'$. Il reste à comprendre l'action de $\begin{bmatrix}K_i;0\\ l_i'\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}L_i;0\\ l_i'\end{bmatrix}$ sur $m\otimes m'$. D'après la proposition 4.3.1, on a

$$\begin{bmatrix}K_i;0\\ l_i'\end{bmatrix}\cdot m\otimes m'=\sum_{r=0}^{l_i'}\begin{bmatrix}\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\\ l_i'-r\end{bmatrix}_{\xi_i}\begin{bmatrix}\langle\lambda',\alpha_i^\vee\rangle\\ r\end{bmatrix}_{\xi_i}\xi_i^{(l_i'-r)\langle\lambda',\alpha_i^\vee\rangle-r\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle}m\otimes m'.$$

La q-formule de Vandermonde [Lu10, 1.3.1 (e)] permet alors de conclure. On fait de même pour l'action de $\begin{bmatrix}L_i;0\\ l_i'\end{bmatrix}$. □

On s'intéresse à la catégorie $\mathscr{C}_\xi$ dont les objets sont les $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-modules M de dimension finie tel que

$$M=\bigoplus_{(\lambda,\mu)\in P\times P}M_{\lambda,\mu}.$$

Comme dans le cas générique, on a $E_i^{(r)}\cdot M_{\lambda,\mu}\subseteq M_{\lambda+r\alpha_i,\mu+r\alpha_i}$ et $F_i^{(r)}\cdot M_{\lambda,\mu}\subseteq M_{\lambda-r\alpha_i,\mu-r\alpha_i}$.

Une manière de construire des $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-modules est par spécialisation. Soit $(\lambda,\mu)\in\tilde{P}^+$. Dans la partie 4.2.1, on a construit un $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$-module simple de plus haut poids $L(\lambda,\mu)$. Considérons le sous-$\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$-module $L^{\mathrm{res}}(\lambda,\mu)$ engendré par un vecteur de plus haut poids choisi au préalable. Le *module de Weyl* est la spécialisation de $L^{\mathrm{res}}(\lambda,\mu)$

$$W_\xi(\lambda,\mu)=L^{\mathrm{res}}(\lambda,\mu)\otimes_{\mathscr{A}}\mathbb{C}.$$

C'est un $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-module de plus haut poids (λ,μ) mais il n'est pas nécessairement simple. C'est un quotient du module de Verma et il a une tête simple que l'on note $L_\xi(\lambda,\mu)$. La spécialisation n'affectant pas les espaces de poids, le caractère du module de Weyl est toujours donné par la formule de caractère (4.9).

Grâce à la quasi-R-matrice Θ_ξ et au choix d'une racine L-ième $\xi^{1/L}$ de ξ, on tresse la catégorie $\mathscr{C}_\xi$ comme dans la partie 4.2.3, tout se traduisant *mutatis mutandis*. On dispose également de dualité et de structures pivotales comme dans la partie 4.2.4.

4.3.4 Modules basculants

Une dernière classe de modules est considérée, les modules basculants. Ces derniers ont été étudiés par Andersen [An92] dans le cas de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$.

Définition 4.3.9. Un $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$-module M est dit *basculant* si à la fois M et M^* ont une filtration avec quotients successifs des modules de Weyl.

Pour plus de détails concernant le cas de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$, on se réfère à [Sa06]. Les modules de Weyl étant des spécialisations des modules simples pour $\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$, les poids des modules basculants sont contenus dans $\tilde{P}$.

Proposition 4.3.10. *Pour n'importe quel $(\lambda,\mu)\in\tilde{P}^+$, il existe un module basculant indécomposable $T(\lambda,\mu)$ tel que $T(\lambda,\mu)_{\lambda',\mu'}=0$ sauf si $(\lambda',\mu')\leq(\lambda,\mu)$ et tel que $T(\lambda,\mu)_{\lambda,\mu}$ est de dimension* 1.

De plus, tout module basculant indécomposable est de la forme $T(\lambda,\mu)$ pour un poids $(\lambda,\mu)\in\tilde{P}^+$.

Démonstration. L'existence provient de celle de tels modules basculants indécomposables pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$. En effet, le poids $(\lambda,\mu) \in \tilde{P}^+$ étant fixé, il existe un module basculant indécomposable pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ avec un vecteur maximal de poids $\frac{\lambda+\mu}{2}$. On tensorise alors ce module avec $L_\xi\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$ pour obtenir un module basculant indécomposable pour $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ satisfaisant les conditions de la proposition.

Soit T un module basculant indécomposable. En utilisant l'action des éléments centraux z_i, $\begin{bmatrix} z_i;0 \\ l'_i \end{bmatrix}$ pour $1 \leq i \leq n$, on peut montrer que $\lambda - \mu$ ne dépend pas du poids (λ,μ) de T. Ainsi, en tensorisant T par $L_\xi\left(\frac{\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu-\lambda}{2}\right)$, on obtient un module basculant indécomposable pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ qui est alors isomorphe à $T(\kappa,\kappa)$ pour un certain $\kappa \in P^+$ □

Comme un facteur direct d'un module basculant est encore un module basculant, tout module basculant est somme directe de modules basculants indécomposables. De plus, le produit tensoriel de deux modules basculants pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ étant toujours un module basculant, il en est de même pour les modules basculants pour $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$.

La sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_\xi$ des modules basculants est loin d'être une catégorie de fusion : elle n'est ni abélienne, ni semi-simple. On va alors semi-simplifier cette dernière, et pour cela, il nous faut comprendre les modules basculants indécomposables de dimension quantique non nulle. Comme tout module basculant indécomposable est isomorphe à un module de la forme $T(\lambda,\mu) \simeq T\left(\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) \otimes L_\xi\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$, on peut utiliser les résultats bien connus pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$. Le théorème qui suit est une conséquence directe de [Sa06, Theorem 2].

Notons $D = \max_{\alpha,\beta\in\Phi} \frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$. Cet entier vaut 1 si $\mathfrak{g}$ est de type A, D, E, vaut 2 si $\mathfrak{g}$ est de type B, C, F_4 et vaut 3 si $\mathfrak{g}$ est de type G_2. On note θ_0 la plus grande racine de Φ si $D \mid l'$, la plus grande racine courte de Φ sinon. Enfin, on note h le nombre de Coxeter de $\mathfrak{g}$ et $h^\vee$ le nombre de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$. Soit C l'ensemble de poids dominants suivants

$$C = \{\lambda \in P^+ \mid \langle \lambda+\rho, \theta_0\rangle < l'\}.$$

Théorème 4.3.11. *On suppose que $l' \geq Dh^\vee$ si $D \mid l'$ et $l' > h$ sinon. Alors $T(\lambda,\mu)$ est de dimension quantique (positive ou négative) non nulle si et seulement si $\frac{\lambda+\mu}{2} \in C$. De plus, sous la condition $\frac{\lambda+\mu}{2} \in C$, on a des isomorphismes $T(\lambda,\mu) \simeq W_\xi(\lambda,\mu) \simeq L_\xi(\lambda,\mu)$.*

Similairement à la notation $\tilde{P}$, on note $\tilde{C}$ l'ensemble des paires $(\lambda,\mu) \in P \times P$ telles que $\lambda + \mu \in 2C$.

4.3.5 Semi-simplification de la catégorie des modules basculants

À partir de maintenant, on garde les hypothèses sur l du théorème 4.3.11. On construit une catégorie de fusion en utilisant un procédé de semi-simplification pour les catégories pivotales. Comme la catégorie des modules basculants n'est pas abélienne, on utilise une version pour les catégories karoubiennes [EO18, Section 2.3]. Les hypothèses de [EO18, Theorem 2.6] sont vérifiées puisque

1. la catégorie des modules basculants pour $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ est une sous-catégorie d'une catégorie abélienne,

2. à un élément inversible près, les dimensions quantiques positives et négatives sont égales.

On note alors par $\mathscr{T}_\xi$ la catégorie semi-simple obtenue à partir de la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_\xi$ constituée des modules basculants. Le tressage ainsi que la structure pivotales sont transmis à la catégorie $\mathscr{T}_\xi$ et les objets simples sont les modules basculants indécomposables de dimension quantique non nulle, à savoir les $L_\xi(\lambda,\mu)$ avec $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$. Il existe toujours une graduation fidèle par le groupe P

$$\mathscr{T}_\xi=\bigoplus_{\nu\in P}\mathscr{T}_{\xi,\nu}$$

où $\mathscr{T}_{\xi,\nu}$ est engendrée additivement par les objets simples $L_\xi(\lambda,\mu)$ avec $\lambda-\mu=2\nu$, ce qui peut également s'interpréter en terme d'action des éléments centraux z_i et $\begin{bmatrix} z_i;0 \\ l_i' \end{bmatrix}$. Exactement comme dans le cas générique, chaque $\mathscr{T}_{\xi,\nu}$ est équivalent à la catégorie de fusion des modules basculants pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$.

On calcule a présent la S-matrice et le twist de la catégorie $\mathscr{T}_\xi$. Par définition, la S-matrice est la matrice $(S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')})_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')\in\tilde{C}}$ définie par

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')}=\mathrm{Tr}^+_{L_\xi(\lambda,\mu)\otimes L_\xi(\lambda',\mu')}(c_{L_\xi(\lambda',\mu'),L_\xi(\lambda,\mu)}\circ c_{L_\xi(\lambda,\mu),L_\xi(\lambda',\mu')}),$$

le morphisme c étant le tressage. On choisit le twist θ relié à la structure pivotale a via le morphisme de Drinfeld comme expliqué dans la partie 3.1.1. Rappelons que le morphisme de Drinfeld u est le morphisme obtenu par la composition

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes \mathrm{coev}_{X^*}} X\otimes X^*\otimes X^{**} \xrightarrow{c_{X,X^*}\otimes \mathrm{id}_{X^{**}}} X^*\otimes X\otimes X^{**} \xrightarrow{\mathrm{ev}_X\otimes \mathrm{id}_{X^{**}}} X^{**}.$$

Rappelons également la formule de la quasi-R-matrice Θ_ξ de $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$

$$\Theta_\xi=\prod_{\alpha\in\Phi^+}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q_\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}[n]_{q_\alpha}!(q_\alpha-q_\alpha^{-1})^n E_\alpha^{(n)}\otimes F_\alpha^{(n)}\right),$$

ainsi que le choix de l'élément pivot $L_{2\rho}$. Ainsi les traces quantiques positives et négatives d'un endomorphisme f d'un objet M sont données par

$$\mathrm{Tr}^+_M(f)=\mathrm{Tr}(L_{2\rho}f\mid M)\quad\text{et}\quad \mathrm{Tr}^-_M(f)=\mathrm{Tr}(f L_{2\rho}^{-1}\mid M).$$

Proposition 4.3.12. *On conserve toujours les hypothèses sur l du théorème 4.3.11. Soient (λ,μ) et (λ',μ') dans $\tilde{C}^+$. La S-matrice est explicitement donnée par*

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')}=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho+\lambda,(w\bullet(\lambda',\mu'))_2\rangle+\langle\mu,(w\bullet(\lambda',\mu'))_1+2\rho\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}},$$

et le twist est

$$\theta_{L_\xi(\lambda,\mu)}=\xi^{\langle\lambda+2\rho,\mu\rangle}\,\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)}.$$

Démonstration. Commençons par le twist θ. Fixons $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$. Comme l'objet $L_\xi(\lambda,\mu)$ est simple, le twist est la multiplication par un scalaire, que l'on peut calculer directement dans la catégorie $\mathscr{C}_\xi$. On note $v_{\lambda,\mu}$ un vecteur de plus haut poids de $L_\xi(\lambda,\mu)$. En reprenant la définition du morphisme de Drinfeld, on trouve que $u_{L_\xi(\lambda,\mu)}(v_{\lambda,\mu})$ est l'élément suivant de $L_\xi(\lambda,\mu)^{**}$:

$$\varphi \in L_\xi(\lambda,\mu)^* \mapsto \xi^{-\langle\lambda,\mu\rangle}\varphi(v_{\lambda,\mu}),$$

tandis que par choix de la structure pivotale $a_{L_\xi(\lambda,\mu)}(v_{\lambda,\mu})$ est l'élément

$$\varphi \in L_\xi(\lambda,\mu)^* \mapsto \xi^{\langle 2\rho,\mu\rangle}\varphi(v_{\lambda,\mu})$$

de $L_\xi(\lambda,\mu)^{**}$. Ainsi on trouve bien $\theta_{L_\xi(\lambda,\mu)} = \xi^{\langle\lambda+2\rho,\mu\rangle}\,\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)}$.

Intéressons nous désormais au calcul de la S-matrice. Comme pour le twist, on peut calculer la S-matrice dans $\mathscr{C}_\xi$. Pour tout objet M de $\mathscr{C}_\xi$, l'application

$$\left(\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)} \otimes \mathrm{Tr}^+_M\right)\left(c_{M,L_\xi(\lambda,\mu)} \circ c_{L_\xi(\lambda,\mu),M}\right)$$

est un endomorphisme de l'objet $L_\xi(\lambda,\mu)$ qui est simple car $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$. Cet endomorphisme est alors un scalaire que l'on calcule sur un vecteur de plus haut poids $v_{\lambda,\mu}$ de $L_\xi(\lambda,\mu)$. Soit m un vecteur de poids (λ',μ') de M. Comme $v_{\lambda,\mu}$ est de plus haut poids, il est annihilé par les $E_\alpha^{(r)}$ et ainsi

$$c_{M,L_\xi(\lambda,\mu)} \circ c_{L_\xi(\lambda,\mu),M}(v_{\lambda,\mu}\otimes m) = \xi^{\langle\lambda,\mu'\rangle} c_{M,L_\xi(\lambda,\mu)}(m\otimes v_{\lambda,\mu}).$$

On prend maintenant la trace partielle $\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)}\otimes\mathrm{Tr}^+_M$ de cette expression et on ne s'intéresse qu'à la composante sur le vecteur de poids $v_{\lambda,\mu}$. Comme $F_\alpha^{(n)}\cdot v_{\lambda,\mu}$ n'est pas de poids (λ,μ), seul le terme $1\otimes 1$ de Θ_ξ contribue à cette trace partielle. Ainsi

$$\left(\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)} \otimes \mathrm{Tr}^+_M\right)\left(c_{M,L_\xi(\lambda,\mu)} \circ c_{L_\xi(\lambda,\mu),M}\right) = \mathrm{Tr}^+_M\left(\varphi^M_{\lambda,\mu}\right)\mathrm{id}_{L_\xi(\lambda,\mu)}$$

où $\varphi^M_{\lambda,\mu}(m) = \xi^{\langle\lambda,\mu'\rangle+\langle\lambda',\mu\rangle} m$ pour m un vecteur de poids (λ',μ') de M.

Maintenant, fixons $(\lambda',\mu')\in\tilde{C}$. Par ce qui précède, on a montré que

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')} = \dim^+(L_\xi(\lambda,\mu))\,\mathrm{Tr}^+\left(\varphi^{L_\xi(\lambda',\mu')}_{\lambda,\mu}\right).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la formule de caractère (4.9) pour conclure que

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,(w\bullet(\lambda,\mu))_2\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}}\,\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho+\lambda,(w\bullet(\lambda',\mu'))_2\rangle+\langle\mu,(w\bullet(\lambda',\mu'))_1\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho+\lambda+\mu,w\bullet 0\rangle}},$$

les dénominateurs apparaissant étant non nuls grâce à l'hypothèse faite sur l. Comme $\langle 2\rho+\lambda+\mu, w\bullet 0\rangle = \langle 2\rho,(w^{-1}\bullet(\lambda,\mu))_2\rangle - \langle\mu,2\rho\rangle$ ceci se simplifie en

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho+\lambda,(w\bullet(\lambda',\mu'))_2\rangle+\langle\mu,(w\bullet(\lambda',\mu'))_1+2\rho\rangle}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}}.$$

□

4.3.6 Une modularisation partielle : les premiers objets transparents

Contrairement à la catégorie de fusion construite à partie des modules basculants de $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{g})$, il existe une infinité d'objets simples non isomorphes dans $\mathcal{T}_\xi$. Pour remédier à cela, on trouve des objets transparents simples inversibles dans $\mathcal{T}_\xi$ et on ajoute des isomorphismes entre ces objets et l'objet unité $\mathbf{1}$. Nous suivrons la construction de Müger [Mü00]. Il existe une construction équivalente, du à Bruguières [Br00].

Proposition 4.3.13. *Soit $\nu \in (l'Q^\vee) \cap P$. L'objet inversible $L_\xi(\nu, -\nu)$ est un objet transparent de $\mathcal{T}_\xi$. Ses dimensions quantiques positive et négative sont égales à* 1 *et il est de twist* 1 *ou* -1.

Démonstration. L'objet $L_\xi(\nu, -\nu)$ étant inversible, il est plus simple de calculer directement le double tressage que d'utiliser le critère de Bruguières [Br00, Proposition 1.1]. En effet, le double tressage $c_{L_\xi(\lambda,\mu),L_\xi(\nu,-\nu)} \circ c_{L_\xi(\nu,-\nu),L_\xi(\lambda,\mu)}$ est un scalaire, quel que soit l'objet simple $L_\xi(\lambda, \mu)$. Par un calcul sur un vecteur de plus haut poids, ce tressage est la multiplication par $\xi^{\langle \nu, \mu-\lambda \rangle}$. Comme ν est dans $l'Q^\vee$ et que $\mu - \lambda$ est dans $2P$, on a $\langle \nu, \mu - \lambda \rangle \in 2l'\mathbb{Z}$ et donc le double tressage est l'identité : l'objet $L_\xi(\nu, -\nu)$ est transparent.

La dimension quantique positive de $L_\xi(\nu, -\nu)$ est donnée par l'action de $L_{2\rho}$, et vaut ainsi $\xi^{-\langle 2\rho, \nu \rangle}$. Comme $\nu \in l'Q^\vee$ et $2\rho \in 2P$, la dimension quantique positive est égale à 1. De même pour la dimension quantique négative.

Enfin, le twist de l'objet $L_\xi(\nu, -\nu)$ est donné par $\xi^{\langle \nu+2\rho, -\nu \rangle}$ qui vaut manifestement ± 1 en fonction de la valeur de $\langle \nu, \nu \rangle$. □

Remarque 4.3.14. Le cas d'un objet inversible $L_\xi(\nu, -\nu)$ de twist -1 avec $\nu \in (l'Q^\vee) \cap P$ peut se produire. Supposons $\mathfrak{g}$ de type B_2 et $l = 2l'$ avec l' impair. On a $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ avec α_1 courte et α_2 longue, de sorte que $\alpha_1^\vee = \alpha_1$ et $\alpha_2^\vee = \frac{\alpha_2}{2}$. On considère $\nu = l'\alpha_2^\vee$. Cet élément est bien dans $(l'Q^\vee) \cap P$ car $\alpha_2^\vee \in P$. De plus $\langle \nu, \nu \rangle = l'^2$ et donc $\theta_{L_\xi(\nu,-\nu)} = \xi^{-\langle \nu, \nu \rangle} = (-1)^{l'} = -1$.

On considère $\mathcal{S}$ la sous-catégorie tensorielle pleine de $\mathcal{T}_\xi$ engendrée par les $L_\xi(\nu, -\nu)$ de twist 1 avec $\nu \in (l'Q^\vee) \cap P$. Dans un souci de simplification de notations, on notera $I(\nu)$ l'objet $L_\xi(\nu, -\nu)$. On rappelle la construction de la catégorie $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ de [Mü00, Definition 3.12], qui sera plus simple dans notre cas puisque tous les objets de $\mathcal{S}$ sont de dimension 1. Pour tout $\nu, \nu' \in (l'Q^\vee) \cap P$, on choisit un isomorphisme $\varphi_{\nu,\nu'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(I(\nu) \otimes I(\nu'), I(\nu + \nu'))$ tel que pour tout triplet $\nu, \nu', \nu'' \in (l'Q^\vee) \cap P$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I(\nu) \otimes I(\nu') \otimes I(\nu'') & \xrightarrow{\varphi_{\nu,\nu'} \otimes \mathrm{id}} & I(\nu + \nu') \otimes I(\nu'') \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \varphi_{\nu',\nu''}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{\nu+\nu',\nu''}} \\ I(\nu) \otimes I(\nu' + \nu'') & \xrightarrow{\varphi_{\nu,\nu'+\nu''}} & I(\nu + \nu' + \nu'') \end{array} \tag{4.11}$$

commute. De tels isomorphismes sont construits en choisissant un vecteur non nul v_ν dans chaque $I(\nu)$, qui sont, dans $\mathcal{C}_\xi$, des modules de dimension 1 (dimension en tant qu'espace vectoriel et non dimension quantique) ; l'isomorphisme $\varphi_{\nu,\nu'}$ envoie alors simplement $v_\nu \otimes v_{\nu'}$ sur $v_{\nu+\nu'}$.

Considérons en premier lieu la catégorie $\mathcal{T}_\xi \rtimes_0 \mathcal{S}$ avec les même objets que $\mathcal{T}_\xi$ et comme espace de morphismes entre X et Y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_\xi \rtimes_0 \mathcal{S}}(X, Y) = \bigoplus_{\substack{\nu \in (l'Q^\vee) \cap P \\ \theta_{I(\nu)} = 1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_\xi}(X, I(\nu) \otimes Y).$$

On a simplement rajouté des isomorphismes entre X et $I(\nu)\otimes X$ pour tout objet X et $I(\nu)$ simple dans $\mathscr{S}$. La composition de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_\xi}(X, I(\nu)\otimes Y)$ et de $g \in \mathrm{Hom}(Y, I(\nu')\otimes Z)$ dans $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ est donnée par

$$X \xrightarrow{f} I(\nu)\otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} I(\nu)\otimes I(\nu')\otimes Z \xrightarrow{\varphi_{\nu,\nu'}\otimes \mathrm{id}} I(\nu+\nu')\otimes Z \ .$$

La compatibilité de la famille de morphismes $(\varphi_{\nu,\nu'})_{\nu,\nu'\in(l'Q^\vee)\cap P}$ donnée par le diagramme (4.11) assure que la composition est bien associative.

Cette catégorie est également munie d'un produit tensoriel, qui provient de celui de $\mathscr{T}_\xi$: c'est le même au niveau des objets, et le produit tensoriel de deux morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_\xi}(X, I(\nu)\otimes Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_\xi}(X', I(\nu')\otimes Y')$ est défini comme la composition

$$X\otimes X' \xrightarrow{f\otimes g} I(\nu)\otimes Y\otimes I(\nu')\otimes Y' \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c_{Y,I(\nu')}\otimes \mathrm{id}} I(\nu)\otimes I(\nu')\otimes Y\otimes Y'$$

$$\xrightarrow{\varphi_{\nu,\nu'}\otimes \mathrm{id}} I(\nu+\nu')\otimes Y\otimes Y'.$$

La compatibilité de la famille de morphismes $(\varphi_{\nu,\nu'})_{\nu,\nu'\in(l'Q^\vee)\cap P}$ donnée par le diagramme (4.11) assure à nouveau que ce produit tensoriel munit $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$ d'une structure de catégorie tensorielle semi-simple, voir [Mü00, Section 3.2] pour plus de détails.

La dualité sur $\mathscr{T}_\xi$ s'étend immédiatement en une dualité sur $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$. En ce qui concerne la structure pivotale, il est crucial que les objets de $\mathscr{S}$ soient de twist 1, exactement comme dans la preuve du lemme 3.4.13. Ainsi la structure pivotale de $\mathscr{T}_\xi$ munit $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$ d'une structure pivotale.

Enfin, l'existence d'un tressage sur $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$ est assuré par le fait que les objets de $\mathscr{S}$ sont transparents (voir [Mü00, Lemma 3.10]).

Maintenant, dans le cas général, la catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ est définie comme la complétion idempotente de $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$. En effet, il se peut que des objets simples dans $\mathscr{T}_\xi$ aient un anneau d'endomorphismes de dimension plus grande que 1. Ce n'est pas le cas ici puisque l'objet $I(\nu)$ est dans la composante $\mathscr{T}_{\xi,\nu}$ de la P-graduation de $\mathscr{T}_\xi$. Ainsi, si $\nu \neq 0$, un objet simple X et son tensorisé par $I(\nu)$ ne peuvent être isomorphes puisqu'ils sont de degrés différents. La complétion idempotente $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ de $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$ n'est autre que la catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes_0 \mathscr{S}$ elle-même. Le but de cette construction était d'aboutir à une catégorie avec un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets simples.

Proposition 4.3.15. *La catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ admet un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets simples.*

Démonstration. Soit G le quotient de P par $\{\nu \in (l'Q^\vee)\cap P \mid \theta_{I(\nu)} = 1\}$. La catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ est G-graduée et chaque composante à un nombre fini d'objets simples, à savoir $|C|$, puisqu'équivalente à la catégorie de fusion des basculants pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$. On conclut en remarquant que G est fini, car $P/((l'Q^\vee)\cap P)$ se surjecte sur G. □

4.3.7 Une sous-catégorie entière

La catégorie $\mathscr{T}_\xi$, tout comme son homologue pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$ possède une sous-catégorie intéressante. On note $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{T}_\xi$ engendrée additivement pas les objets $L_\xi(\lambda,\mu)$ avec $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$ et $\mu\in Q$. Cette catégorie est stable par produit tensoriel, comme on le voit déjà au niveau de $\mathscr{C}_\xi$. Dans le cas de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{sl}_{n+1})$, Masbaum et Wenzl ont montré qu'un analogue de cette sous-catégorie est modulaire, sous l'hypothèse l pair et $\mathrm{pgcd}(l',n+1)=1$.

Exactement comme pour $\mathscr{T}_\xi$, il existe un nombre infini de classes d'isomorphie d'objets simples dans $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)$. On dispose toujours des objets transparents $I(\nu)$, mais cette fois pour $\nu\in(l'Q^\vee)\cap Q$.

Lemme 4.3.16. *Supposons $\nu\in(l'Q^\vee)\cap Q$. Le twist de $I(\nu)$ est égal à 1.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $\nu\in(l'Q^\vee)\cap Q$, on a $\langle\nu,\nu\rangle\equiv 0 \mod l$. Quelle que soit la valeur de l, on a $\langle\nu,\nu\rangle\in l'^2\mathbb{Z}$, donc il ne reste qu'à considérer le cas où $l=2l'$ avec l' impair.

Supposons que $\mathfrak{g}$ n'est pas de type G_2. Dans ce cas, $(l'Q^\vee)\cap Q=l'Q$ et on conclut facilement en remarquant que pour $\lambda\in Q$, $\langle\lambda,\lambda\rangle$ est pair (rappelons que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est normalisé de sorte que $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ pour les racines simples courtes).

Traitons à part le cas de $\mathfrak{g}$ de type G_2. Si de plus l' n'est pas divisible par 3, on a $(l'Q^\vee)\cap Q=l'Q$ et on conclut comme précédemment. On suppose ainsi $l=2l'$ avec l' divisible par 3. On note α la racine simple courte et β la racine simple longue, de sorte que $\alpha^\vee=\alpha$ et $\beta^\vee=\frac{\beta}{3}$. On a alors $(l'Q^\vee)\cap Q=l'Q^\vee$ et pour $\nu=l'\nu_\alpha\alpha+\frac{l'\nu_\beta}{3}\beta\in l'Q^\vee$, on a

$$\langle\nu,\nu\rangle=l'^2\left(2\nu_\alpha^2-2\nu_\alpha\nu_\beta+\frac{2}{3}\nu_\beta^2\right)=2l'\frac{l'}{3}(3\nu_\alpha^2-3\nu_\alpha\nu_\beta+\nu_\beta^2),$$

ce qui assure que $\langle\nu,\nu\rangle\equiv 0\mod l$ puisque 3 divise l'. □

On peut à nouveau construire la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est cette fois-ci la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)$ avec objets les $I(\nu)$, pour $\nu\in(l'Q^\vee)\cap Q$. Comme tous les objets de $\mathscr{S}$ sont transparents, de dimension 1 et de twist 1, la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ est une catégorie tensorielle semi-simple, pivotale et tressée qui est de plus graduée par le groupe $P/((l'Q^\vee)\cap Q)$

$$\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}=\bigoplus_{\nu\in P/((l'Q^\vee)\cap Q)}\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_\nu.$$

Néanmoins, il n'y a pas d'équivalence entre $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_\nu$ et $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_0$ si $\nu\notin Q$. Il existe tout de même une équivalence entre $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_\nu$ et $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_{\nu'}$ si les images de ν et ν' coïncident dans P/Q.

Proposition 4.3.17. *La catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ est finie et a $|C||Q/((l'Q^\vee)\cap Q)|$ classes d'isomorphie d'objets simples.*

Démonstration. Si l'on choisit des représentants $\nu_1,\dots,\nu_k$ de P/Q dans $P/((l'Q^\vee)\cap Q)$, il y a $|C|$ classes d'isomorphie d'objets simples dans $\bigoplus_{i=1}^k\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_{\nu_i}$. Ainsi la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ a $|C||Q/((l'Q^\vee)\cap Q)|$ classes d'isomorphie d'objets simples. □

4.3.8 Non dégénérescence de $\mathscr{T}_\xi\rtimes\mathscr{S}$ et transparents de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$

Dans cette partie, on suppose que $l=2Dd$ pour $d\geq h^\vee$ et ainsi $l'=Dd$. De plus $DdQ^\vee\subseteq Q$ et le lemme 4.3.16 assure que $I(\nu)$ est de twist 1 pour n'importe quel $\nu\in DdQ^\vee$.

Proposition 4.3.18. *Supposons de plus que $\xi=\exp\left(\frac{i\pi}{Dd}\right)$. La catégorie $\mathscr{T}_\xi\rtimes\mathscr{S}$ est non dégénérée.*

Démonstration. On s'inspire de la preuve de [BK01, Theorem 3.3.20], pour montrer que le carré de la S-matrice de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ est inversible. Comme pour tout $w \in W$ et $(\lambda,\mu) \in \tilde{P}$ on a

$$w \bullet (\lambda,\mu) = \left(w \bullet \frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2}, w \bullet \frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{\lambda-\mu}{2} \right),$$

on peut réécrire la S-matrice de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ sous la forme

$$S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')} = \xi^{\langle 2\rho,\mu-\eta+\mu'-\eta'\rangle - 2\langle \mu-\eta,\mu'-\eta'\rangle}\, \tilde{s}_{\eta,\eta'}$$

où $\lambda+\mu = 2\eta$, $\lambda'+\mu' = 2\eta'$ et $\tilde{s}$ est la S-matrice de la catégorie modulaire des modules basculants pour $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{g})$ (voir la preuve de [BK01, Theorem 3.3.20]). Les objets simples de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ sont indexés par $\{(\lambda,\mu) \in P \times P \mid \lambda+\mu \in 2C\}/DdQ^\vee$ ensemble qui est en bijection avec $C \times P/DdQ^\vee$ en envoyant (λ,μ) sur (η,μ). Ainsi

$$\begin{aligned}
(S^2)_{(\lambda,\mu),(\lambda'',\mu'')} &= \xi^{\langle 2\rho,\mu-\eta+\mu''-\eta''\rangle} \sum_{\eta'\in C} \tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',\eta''}\xi^{-2\langle \eta',2\rho+\eta-\mu+\eta''-\mu''\rangle} \underbrace{\sum_{\mu'\in P/DdQ^\vee} \xi^{2\langle \mu',2\rho+\eta-\mu+\eta''-\mu''\rangle}}_{=|P/DdQ^\vee|\delta_{2\rho+\eta-\mu+\eta''-\mu''\in DdQ^\vee}} \\
&= |P/DdQ^\vee|\delta_{2\rho+\eta-\mu+\eta''-\mu''\in DdQ^\vee}\xi^{\langle 2\rho,2\rho\rangle}\sum_{\eta'\in C}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',\eta''} \\
&= \delta_{2\rho+\eta-\mu+\eta''-\mu''\in DdQ^\vee}\delta_{\eta'',-w_0(\eta)} \\
&= \delta_{\eta'',-w_0(\eta)}\delta_{\mu''\in 2\pi+\eta-\mu-w_0(\eta)+DdQ^\vee}\kappa,
\end{aligned}$$

où κ est une constante non nulle. Comme μ est un élément de $P/DdQ^\vee$, la matrice S^2 est, à une constante non nulle près, la matrice de permutation $(\delta_{(\lambda'',\mu''),(-2\rho,2\rho)-w_0(\lambda,\mu)})_{(\lambda,\mu),(\lambda'',\mu'')}$. □

Le carré de la S-matrice de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ n'est pas donné par la dualité, ce qui correspond au fait que la catégorie $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ n'est pas sphérique. L'objet $\bar{\mathbf{1}}$ introduit dans 3.1.4 n'est autre que $L_\xi(-2\rho,2\rho)$.

Maintenant, passons au cas plus intéressant de la catégorie $\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi \rtimes \mathcal{S}$, qui contiendra encore des objets transparents dans le cas général. On ne suppose rien de supplémentaire quant à ξ.

Théorème 4.3.19. *La catégorie $\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi \rtimes \mathcal{S}$ a $|P/Q|$ classes d'isomorphie d'objets transparents. Ainsi $\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi \rtimes \mathcal{S}$ est non dégénérée si et seulement si $\mathfrak{g}$ est de type E_8, F_4 ou G_2.*

Démonstration. D'après [EGNO15, Lemma 8.20.9], l'objet simple $L_\xi(\lambda,\mu)$ est transparent si et seulement si

$$(h_{\lambda,\mu},h_{0,0})_{\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi\rtimes\mathcal{S}} = \sum_{(\lambda',\mu')\in\overline{C}} \frac{\dim^-(L_\xi(\lambda',\mu'))}{\dim^+(L_\xi(\lambda',\mu'))} S_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')}S_{(\lambda',\mu'),(0,0)} \neq 0.$$

Tout comme dans la preuve de la proposition 4.3.18, on pose $2\eta = \lambda+\mu$ et $2\eta' = \lambda+\mu'$, et η,η' dont des éléments de C. Ainsi

$$\begin{aligned}
(h_{\lambda,\mu},h_{0,0})_{\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi\rtimes\mathcal{S}} &= \sum_{\eta'\in C}\sum_{\mu'\in Q/DdQ^\vee} \xi^{2\langle 2\rho,\eta'-\mu'\rangle}\xi^{\langle 2\rho,\mu-\eta+\mu'-\eta'\rangle-2\langle\mu-\eta,\mu'-\eta'\rangle}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\xi^{\langle 2\rho,\mu'-\eta'\rangle}\tilde{s}_{\eta',0} \\
&= \xi^{\langle 2\rho,\mu-\eta\rangle}\sum_{\eta'\in C}\xi^{-2\langle\eta',\eta-\mu\rangle}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',0}\underbrace{\sum_{\mu'\in Q/DdQ^\vee}\xi^{2\langle\mu',\eta-\mu\rangle}}_{|Q/DdQ^\vee|\delta_{\mu-\eta\in DdP^\vee}} \\
&= |Q/DdQ^\vee|\delta_{\mu-\eta\in DdP^\vee}\sum_{\eta'\in C}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',0}\xi^{2\langle\rho+\eta',\mu-\eta\rangle}.
\end{aligned}$$

Lemme 4.3.20. *Soit $\gamma \in DdP^\vee$. Pour tout $w \in W$, la différence $\gamma - w(\gamma)$ est dans $DdQ^\vee$.*

Démonstration. Voir [Bo68, VI.1.10, Proposition 27]. □

Maintenant, fixons $\gamma \in DdP^\vee$. Similairement à [BK01, Section 3.3], on dispose d'une action du groupe de Weyl affine $W^a = W \ltimes DdQ^\vee$ sur P telle que C contient exactement un élément pour chaque orbite de stabilisateur trivial sous l'action translatée de W^a (dans [BK01, Section 3.3], le sous-groupe des translations de W^a est engendré par $dQ^\vee$, mais $Q^\vee$ est plongé dans P en utilisant la forme bilinéaire $D^{-1}\langle\cdot,\cdot\rangle$). Comme $\tilde{s}_{\eta,w\bullet\eta'} = (-1)^{l(w)}\tilde{s}_{\eta,\eta'}$ et grâce au lemme 4.3.20, on trouve que $\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',0}\xi^{2\langle\rho+\eta',\mu-\eta\rangle}$ est invariant sous l'action translatée de W^a. La sommation sur C est donc remplacée par une sommation sur $P/DdQ^\vee$ et en utilisant la formule de $\tilde{s}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\eta'\in C}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',0}\xi^{2\langle\rho+\eta',\gamma\rangle} &= \frac{1}{|W|\kappa}\sum_{w,w'\in W}(-1)^{l(w)+l(w')}\sum_{\eta'\in P/DdQ^\vee}\xi^{2\langle\eta'+\rho,w(\eta+\rho)+w'(\rho)+\gamma\rangle}\\ &= \frac{|P/DdQ^\vee|}{|W|\kappa}\sum_{w,w'\in W}(-1)^{l(w)+l(w')}\delta_{w(\eta+\rho)+w'(\rho)+\gamma\in DdQ^\vee},\end{aligned}$$

avec κ une constante non nulle.

Comme $\gamma \in DdP^\vee$, le stabilisateur de γ pour l'action translatée est triviale, et il existe un unique élément $\tilde{\gamma} \in C$ dans l'orbite de γ sous l'action de W^a : on se donne alors $\tilde{w} \in W$ tel que $\gamma+\rho \in \tilde{w}(\tilde{\gamma}+\rho)+DdQ^\vee$. Ensuite $w(\eta+\rho)+w'(\rho)+\gamma \in DdQ^\vee$ si et seulement si $w(\eta+\rho) \in -\gamma - w'(\rho)+DdQ^\vee$. Mais $w'(\rho) \in -w'(\gamma)+w'\tilde{w}(\tilde{\gamma}+\rho)+DdQ^\vee$ et ainsi, grâce au lemme 4.3.20, $w(\eta+\rho)+w'(\rho)+\gamma \in DdQ^\vee$ si et seulement si $\eta+\rho \in w^{-1}w'\tilde{w}w_0(-w_0(\tilde{\gamma})+\rho)+DdQ^\vee$. Mais ceci est possible si et seulement si $\eta = -w_0(\tilde{\gamma})$ et $w = w'\tilde{w}w_0$ et enfin

$$\sum_{\eta'\in C}\tilde{s}_{\eta,\eta'}\tilde{s}_{\eta',0}\xi^{2\langle\rho+\eta',\gamma\rangle} = \kappa(-1)^{l(\tilde{w})+l(w_0)}\delta_{\eta,-w_0(\tilde{\gamma})}.$$

On peut donc conclure que les objets simples transparents de $\mathbb{Z}(\mathcal{T})_\xi \rtimes \mathcal{S}$ sont indexés par (λ,μ) avec $\frac{\mu-\lambda}{2} = \gamma \in DdP^\vee/DdQ^\vee$ et $\frac{\mu+\lambda}{2} = -w_0(\tilde{\gamma})$, $\tilde{\gamma}$ étant l'unique élément de C dans l'orbite de γ pour l'action translatée du groupe de Weyl affine W^a. □

Remarque 4.3.21. Le fait que l'on ne suppose rien de plus sur ξ provient du fait que la S-matrice de $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi)\rtimes\mathcal{S}$ prend ses valeurs dans le corps $\mathbb{Q}(\xi)$ tandis que celle de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ prend ses valeurs dans le corps $\mathbb{Q}(\xi^{1/L})$. Ainsi un argument galoisien permet de montrer la modularité de $\mathcal{T}_\xi \rtimes \mathcal{S}$ pour $\xi^{1/L} = \exp\left(\frac{ki\pi}{DdL}\right)$ avec k premier à DdL, mais pas pour n'importe quelle valeur de ξ. Ceci se produit déjà dans le cas de la catégorie des modules basculants pour $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{g})$, cf. [Ro06, Section 4] pour plus de détails.

4.4 Le type A

Dans cette partie, on étudie en détail la catégorie $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi)\rtimes\mathcal{S}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ à une racine paire de l'unité.

Notations. *Dans cette partie, et uniquement cette partie, on suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ et que ξ est une racine primitive $2d$-ième de l'unité avec $d \geq n+1$. Pour être cohérent avec les notations de la partie 4.3 on pose $l = 2d$ et $l' = d$. Les conventions de [Bo68, Planche I] seront utilisées pour la numérotation des racines.*

4.4.1 La catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$

Les racines ayant toutes la même longueur en type A, le réseau des poids Q est égal au réseau des copoids $Q^\vee$ et ainsi la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ admet $|C||Q/dQ|$ classes d'isomorphie d'objets simples. De la description de C dans la partie 4.3.4, on obtient

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i \varpi_i \in P^+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \eta_i \leq d-(n+1) \right\}$$

de sorte que $|C| = \binom{d-1}{n}$ et donc que $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ a $d^n\binom{d-1}{n}$ objets simples à isomorphisme près. D'après le théorème 4.3.19, il y a exactement $n+1$ objets simples transparents, que l'on obtient en suivant la preuve du théorème 4.3.19. Le groupe dP/dQ étant engendré par $d\varpi_n$, on cherche un représentant de $d\varpi_n$ dans C sous l'action translatée du groupe de Weyl affine :

$$s_n s_{n-1} \cdots s_1(d\varpi_n + \rho) - \rho \equiv d\varpi_n - \sum_{i=1}^{n} s_n s_{n-1} \cdots s_{n+2-i}(\alpha_{n+1-i}) \mod dQ^\vee.$$

Mais $s_n s_{n-1} \cdots s_{n+2-i}(\alpha_{n+1-i}) = \sum_{j=n+1-i}^{n} \alpha_j$ et donc

$$s_n s_{n-1} \cdots s_1 \bullet (d\varpi_n) \equiv d\varpi_n - (n+1)\varpi_n \mod dQ^\vee,$$

et l'on obtient le représentant voulu dans C. Ainsi, l'objet simple

$$L_\xi((d-(n+1))\varpi_1 - d\varpi_n, (d-(n+1))\varpi_1 + d\varpi_n)$$

est transparent. Comme $\varpi_1 + \varpi_n \in Q$, il existe un isomorphisme dans $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ entre cet objet et $I = L_\xi((2d-(n+1))\varpi_1, -(n+1)\varpi_1)$.

Proposition 4.4.1. *La sous-catégorie des objets transparents de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ est engendrée par I en tant que catégorie tensorielle. Cet objet est de dimensions quantiques positive et négative $(-1)^n$ et est de twist 1. De plus, la tensorisation par I n'a pas de point fixe sur l'ensemble des objets simples de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$.*

Démonstration. L'objet I est inversible puisque $L_\xi((d-(n+1))\varpi_1, (d-(n+1))\varpi_1)$ l'est dans $\mathscr{T}_\xi$ et le produit tensoriel $L_\xi((d-(n+1))\varpi_1, (d-(n+1))\varpi_1) \otimes L_\xi(\eta, \eta)$, pour $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \varpi_i \in C$ est donné par

$$L_\xi((d-(n+1))\varpi_1, (d-(n+1))\varpi_1) \otimes L_\xi(\eta, \eta) \simeq L_\xi\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_{i-1}\varpi_i, \sum_{i=1}^{n} \eta_{i-1}\varpi_i\right),$$

où l'on a posé $\eta_0 = d-(n+1)-\sum_{i=1}^{n}\eta_i \geq 0$ (voir la preuve de [Br00, Lemme 5.1]). Soit $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$. Écrivons ce poids comme

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i \quad \text{et} \quad \lambda=-\mu+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\varpi_i$$

avec $\mu_i\in\mathbb{Z}$, $\eta_i\in\mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^{n}\eta_i\leq d-(n+1)$. En utilisant le tressage, on obtient donc un isomorphisme

$$I\otimes L_\xi(\lambda,\mu)\simeq L_\xi\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}(\eta_{i-1}-\eta_i)\varpi_i+d\varpi_1,\mu+\sum_{i=1}^{n}(\eta_{i-1}-\eta_i)\varpi_i-d\varpi_1\right).$$

De cet isomorphisme, on se rend aisément compte que les objets $I^{\otimes k}$ sont deux à deux non isomorphes pour $0\leq k\leq n$ et que $I^{\otimes(n+1)}\simeq\mathbf{1}$. On a ainsi trouvé $n+1$ objets simples transparents non isomorphes, ce qui permet de conclure quant à l'engendrement du centre symétrique par I.

La dimension quantique peut se calculer directement dans $\mathscr{C}_\xi$. En tant que $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module, la dimension quantique de $L_\xi((d-(n+1))\varpi_1,(d-(n+1))\varpi_1)$ est 1 : cet objet est inversible et sa dimension quantique positive est réelle positive si $\xi=\exp(\frac{i\pi}{d})$ [BK01, Theorem 3.3.9] donc égal à 1 dans ce cas puisque I est inversible, un argument galoisien permettant alors de le montrer pour toute racine primitive $2d$-ième ξ. Ainsi la dimension quantique positive de I est celle de $L_\xi(d\varpi_1,-d\varpi_1)$ qui est $\xi^{-d\langle 2\rho,\varpi_1\rangle}=(-1)^n$. On fait de même pour la dimension quantique négative, ou bien on utilise le fait que $\dim^+(I)\dim^-(I)=|I|^2=1$ puisque I est inversible.

Le twist est quant à lui donné par $\xi^{\langle(2d-(n+1))\varpi_1+2\rho,-(n+1)\varpi_1\rangle}=\xi^{-2dn}=1$. La dernière affirmation provient du fait que I est un objet de degré $d\varpi_1\notin dQ$. □

4.4.2 Dimension de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ et renormalisation

Pour calculer la dimension de la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$, il nous est nécessaire de connaître les dimensions quantiques des objets simples. Mais grâce à la décomposition $L_\xi(\lambda,\mu)\simeq L_\xi\left(\frac{\lambda+\mu}{2},\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\otimes L_\xi\left(\frac{\lambda-\mu}{2},-\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$ la norme carrée de $L_\xi(\lambda,\mu)$ est égale à celle de $L_\xi\left(\frac{\lambda+\mu}{2},\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$, ce qui nous permet d'affirmer que

$$\dim(\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S})=d^nN,$$

où N est la dimension de la catégorie de fusion des modules basculants pour $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{sl}_{n+1})$, qui est bien connue [BK01, Theorem 3.3.20] :

$$N=(n+1)d^n(-1)^{|\Phi^+|}\prod_{\alpha\in\Phi^+}\frac{1}{(\xi^{\langle\alpha,\rho\rangle}-\xi^{-\langle\alpha,\rho\rangle})^2}.$$

La formule de caractère de Weyl nous permet d'écrire le produit comme une somme

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+}\left(\xi^{\langle\alpha,\rho\rangle}-\xi^{-\langle\alpha,\rho\rangle}\right)=\xi^{-2\langle\rho,\rho\rangle}\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}.$$

On va maintenant distinguer deux cas en fonction de la parité de n. Si n est pair, tous les objets simples transparents de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ sont de dimension 1 et de twist 1. La modularisation $\mathscr{C}$ de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ est obtenue en ajoutant des isomorphismes entre $I^{\otimes k}$ et $\mathbf{1}$ exactement comme dans les parties 4.3.6 et 4.3.7. La catégorie non dégénérée obtenue est de dimension

$$\frac{\dim(\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S})}{n+1} = d^{2n}(-1)^{|\Phi^+|}\xi^{-\langle 2\rho,2\rho\rangle}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}\right)^{-2}.$$

Si n est impair, la moitié des objets simples transparents sont de dimensions quantiques 1 et l'autre moitié de dimensions quantiques -1 et tous sont de twist 1. Commençons par ajouter des isomorphismes entre $I^{\otimes 2k}$ et $\mathbf{1}$ afin d'obtenir une catégorie légèrement dégénérée $\mathscr{C}$ de super-dimension

$$\frac{\dim(\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S})}{n+1} = d^{2n}(-1)^{|\Phi^+|}\xi^{-\langle 2\rho,2\rho\rangle}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}\right)^{-2}.$$

Dans les deux cas, il existe un objet $\bar{\mathbf{1}}$ défini dans la partie 3.1.4 dans le cas des catégories non-dégénérées, dans la partie 3.3.2 pour les catégories légèrement dégénérées. Dans le second cas, il faut néanmoins faire un choix de représentants sous l'action par tensorisation du centre symétrique. La catégorie $\mathscr{C}$ désignera, en fonction de la parité de n, une catégorie non-dégénérée ou une catégorie légèrement dégénérée.

Proposition 4.4.2. *L'objet $\bar{\mathbf{1}}$ de $\mathscr{C}$ est isomorphe à $I\otimes L_\xi(-2\rho,2\rho)$.*

Le choix de $I\otimes L_\xi(-2\rho,2\rho)$ au lieu du choix peut-être plus simple $L_\xi(-2\rho,2\rho)$ sera expliqué dans la partie 4.5.

Démonstration. Il suffit de montrer que le caractère de $\mathrm{Gr}(\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S})$ induit par $L_\xi(-2\rho,2\rho)$ est la dimension quantique négative. Notons χ ce caractère qui est défini par

$$\chi(X) = \frac{S_{L_\xi(-2\rho,2\rho),X}}{\dim^+(L_\xi(-2\rho,2\rho))},$$

pour X un objet simple. La formule de la S-matrice donnée à la proposition 4.3.12 ainsi que $\dim^+(L_\xi(-2\rho,2\rho)) = \xi^{\langle 2\rho,2\rho\rangle}$ impliquent que

$$\chi(L_\xi(\lambda,\mu)) = \frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle\lambda+2\rho,(w\bullet(-2\rho,2\rho))_2\rangle+\langle(w\bullet(-2\rho,2\rho))_1+2\rho,\mu\rangle}}{\xi^{\langle 2\rho,2\rho\rangle}\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}}.$$

Or $w\bullet(-2\rho,2\rho) = w\bullet(0,0)+(-2\rho,2\rho)$ et ainsi

$$\begin{aligned}\langle\lambda+2\rho,(w\bullet(-2\rho,2\rho))_2\rangle + \langle(w\bullet(-2\rho,2\rho))_1+2\rho,\mu\rangle - \langle 2\rho,2\rho\rangle \\ = \langle\lambda+\mu+2\rho,w(\rho)\rangle + \left\langle\frac{\lambda-\mu}{2}-\rho,2\rho\right\rangle \\ = \left\langle w^{-1}\bullet\frac{\lambda+\mu}{2},2\rho\right\rangle + \left\langle\frac{\lambda-\mu}{2},2\rho\right\rangle.\end{aligned}$$

La valeur de χ en l'objet simple $L_\xi(\lambda,\mu)$ vaut alors

$$\begin{aligned}\chi(L_\xi(\lambda,\mu)) &= \xi^{\left\langle\frac{\lambda-\mu}{2},2\rho\right\rangle}\frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\left\langle w\bullet\frac{\lambda+\mu}{2},2\rho\right\rangle}}{\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}}\\ &= \dim^-\left(L_\xi\left(\frac{\lambda-\mu}{2},-\frac{\lambda-\mu}{2}\right)\right)\dim^\pm\left(L_\xi\left(\frac{\lambda+\mu}{2},\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\right)\\ &= \dim^-(L_\xi(\lambda,\mu)),\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Enfin, conformément aux théorèmes 3.1.25 et 3.3.9, on renormalise la S-matrice par une racine carrée de

$$\frac{\dim(\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S})}{n+1}\dim^+(\bar{\mathbf{1}}) = d^{2n}(-1)^{|\Phi^+|+n}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}\right)^{-2},$$

qui est

$$d^n i^{|\Phi^+|+n}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}\right)^{-1}$$

au choix d'un signe près.

Théorème 4.4.3. *Si n est pair, la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ donne lieu, par modularisation, à une catégorie de fusion tressée non-dégénérée et pivotale. Si n est impair, la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ donne lieu à une catégorie de fusion tressée légèrement dégénérée et pivotale. Dans les deux cas, la S-matrice renormalisée est donnée par*

$$\tilde{S}_{(\lambda,\mu),(\lambda',\mu')} = i^{-n-|\Phi^+|}\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho+\lambda,(w\bullet(\lambda',\mu'))_2\rangle+\langle\mu,(w\bullet(\lambda',\mu'))_1+2\rho\rangle}}{d^n}$$

et le twist sur l'objet simple $L_\xi(\lambda,\mu)$ par

$$\theta_{\lambda,\mu} = \xi^{\langle\lambda+2\rho,\mu\rangle}.$$

Remarque 4.4.4. Si n est pair, on obtient une donnée $\mathbb{N}$-modulaire, et si n est impair on obtient une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

4.5 Une famille particulière de caractères de $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$ et sa catégorification

On relie maintenant les données $\mathbb{Z}$-modulaires construites dans la partie 4.4 aux données $\mathbb{Z}$-modulaires du la partie 2.2 associée à une famille de $G(d,1,n)$. Les notations de la partie 2.2 seront utilisées tout au long de cette partie.

4.5.1 La famille catégorifiée et sa matrice de Fourier

On considère la famille $\mathscr{F}$ de caractères unipotents de $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$ de d-symboles de contenu le multiensemble

$$\{0^{d-1},1^{d-1},\ldots,(n-1)^{d-1},n^{n+1}\}.$$

Afin de coïncider avec les notations de la partie 2.2, on pose $Y=\{0,1,\ldots,nd\}$ et on définit $\pi\colon Y\to\mathbb{N}$ par

$$\pi(k)=\begin{cases} n & \text{si } 0\leq k\leq n \\ \left\lfloor \frac{k-n-1}{d-1}\right\rfloor & \text{si } n+1\leq k\leq nd \end{cases}.$$

Comme dans la partie 3.2.4, on introduit pour $f\in\Psi(Y,\pi)$ et $0\leq i\leq n-1$ l'entier $k_i(f)$ vérifiant $f(\pi^{-1}(i))\cup\{k_i(f)\}=\{0,\ldots,d-1\}$. On a alors $f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$ si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)\equiv\sum_{i=0}^{n-1}k_i(f) \mod d.$$

La matrice de Fourier de la définition 2.2.5 s'écrit pour cette famille particulière

$$\mathbf{S}_{f,g}=(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)+k_i(g))}\frac{(-1)^{nd(d-1)/2}\tau(d)^n}{d^n}\prod_{i=0}^{n-1}\zeta^{-k_i(f)k_i(g)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(\sigma)}\prod_{i=0}^{n}\zeta^{f(i)g(\sigma(i))},$$

pour $f,g\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$. Comme on travaille avec des fonctions dans $\Psi^{\#}(Y,\pi)$, on va se débarrasser de l'occurrence de $f(n)$ dans toutes les formules. On fait agir $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur l'ensemble des fonctions $Y\to\{0,\ldots,d-1\}$ par

$$(\sigma\cdot f)(k)=\begin{cases} f(k) & \text{si } k>n, \\ f(\sigma(k+1)-1) & \text{si } 0\leq k\leq n. \end{cases}$$

Proposition 4.5.1. *Pour $f,g\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$ on a*

$$\mathrm{Fr}(f)=\zeta^{\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1}(f)-f(i))\left(\sum_{j=1}^{i}f(j)-\sum_{j=1}^{i-1}k_{j-1}(f)\right)}$$

et

$$\mathbb{S}_{f,g}=\frac{1}{d^n}\varepsilon(f)\varepsilon(g)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)+k_i(g))}$$
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(\sigma)}\zeta^{\sum_{i=0}^{n-1}\left[(k_i(f)-f(i))\left(\sum_{j=0}^{i}(\sigma\cdot g)(j)-\sum_{j=0}^{i-1}k_j(\sigma\cdot g)\right)+(k_i(\sigma\cdot g)-(\sigma\cdot g)(i))\left(\sum_{j=0}^{i}f(j)-\sum_{j=0}^{i-1}k_j(f)\right)\right]}$$

Démonstration. Commençons par la valeur propre du Frobenius $\mathrm{Fr}(f)$. Rappelons que l'on a choisi ζ_* une racine primitive $12d$-ième de l'unité telle que $\zeta_*^{12}=\zeta$. Par définition, $\mathrm{Fr}(f)=\zeta_*^{\alpha}$ où

$$\alpha=nd(1-d^2)-6\sum_{y\in Y}(f(y)^2+df(y)).$$

que l'on va considérer comme un élément de $\mathbb{Z}/12d\mathbb{Z}$. Tout d'abord, comme $\{0,\ldots,d-1\}=f(\pi^{-1}(i))\cup\{k_i(f)\}$ pour $0\leq i\leq n-1$, on a

$$\sum_{y\in Y}(f(y)^2+df(y))=\sum_{i=0}^{n}(f(i)^2+df(i))+n\sum_{i=0}^{d-1}(i^2+di)-\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1}(f)^2+dk_{i-1}(f)).$$

Mais $6\sum_{i=0}^{d-1}(i^2+di)=(d-1)d(2d-1)+3d^2(d-1)=d(d-1)(5d-1)$ et donc

$$d(1-d^2)-6\sum_{i=0}^{d-1}(i^2+di)=6d^2(1-d)\equiv 0 \mod 12d,$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\alpha=-6\left(\sum_{i=0}^{n}(f(i)^2+df(i))-\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)^2+dk_i(f))\right).$$

Fixons $\eta\in\mathbb{Z}$ tel que $f(n)=\sum_{i=0}^{n}(k_i(f)-f(i))+\eta d$, de telle sorte que

$$\begin{aligned}f(n)^2+df(n)&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))\right)^2+d\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))+2d\eta\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))+d^2(\eta+\eta^2)\\&\equiv\left(\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))\right)^2+d\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i)) \mod 2d,\end{aligned}$$

puisque $\eta^2+\eta$ est pair. Enfin,

$$\begin{aligned}\alpha&=-6\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))\right)^2+\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)^2-f(i)^2)\right)\\&=12\left(\sum_{i=0}^{n-1}f(i)(k_i(f)-f(i))-2\sum_{0\le j<i<n}(k_i(f)-f(i))(k_j(f)-f(j))\right)\\&=12\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))\left(\sum_{j=0}^{i}f(j)-\sum_{j=0}^{i-1}k_j(f)\right)\end{aligned}$$

ce qui donne la formule voulue pour $\mathrm{Fr}(f)$.

Passons maintenant au calcul de $\mathbb{S}$. Comme $\overline{\tau(d)}=(-1)^{(d-1)(d-2)/2}\tau(d)$ on a

$$\mathbb{S}_{f,g}=\frac{(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)+k_i(g))}}{d^n}\prod_{i=0}^{n-1}\zeta^{k_i(f)k_i(\sigma\cdot g)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=0}^{n}\zeta^{-f(i)(\sigma\cdot g)(i)}.$$

Fixons $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ et posons $h=\sigma\cdot g$. Alors

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}k_i(f)k_i(h)-\sum_{i=0}^{n}f(i)h(i)\\&\quad=\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)k_i(h)-f(i)h(i))-\sum_{0\le i,j<n}(k_i(f)-f(i))(k_j(h)-h(j))\\&\quad=\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)-f(i))h(i)+\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(h)-h(i))f(i)-\sum_{0\le i\neq j<n}(k_i(f)-f(i))(k_j(h)-h(j))\\&\quad=\sum_{i=0}^{n-1}\left[(k_i(f)-f(i))\left(\sum_{j=0}^{i}h(j)-\sum_{j=0}^{i-1}k_j(h)\right)+(k_i(h)-h(i))\left(\sum_{j=0}^{i}f(j)-\sum_{j=0}^{i-1}k_j(f)\right)\right].\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant sur $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$, on obtient la formule attendue pour la matrice de Fourier. □

On donne également les symboles spécial et cospécial de cette famille. Le symbole spécial f_{sp} est donné par la fonction

$$f_{\mathrm{sp}}(i)=i,\ 0\leq i\leq n \quad \text{et} \quad k_i(f_{\mathrm{sp}})=i+1,\ 0\leq i<n,$$

tandis que le symbole cospécial f_{cosp} est donné par la fonction

$$f_{\mathrm{cosp}}(i)=\begin{cases}0 & \text{si } i=0\\ d-n+i-1 & \text{si } 1\leq i\leq n\end{cases} \quad \text{et} \quad k_i(f_{\mathrm{cosp}})=d-i-1.$$

Enfin, terminons par la d-alité d'Ennola [Ma95, Folgerung 3.11]. Pour $f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$ sa transformée d'Ennola $\mathscr{E}(f)$ est l'unique fonction g telle que

$$k_i(g)=\left(k_i(f)+i-\frac{n(n+3)}{2}\right)^{\mathrm{res}} \quad \text{et} \quad \{g(i)\mid 0\leq i\leq n\}=\left\{\left(f(i)-\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\mathrm{res}}\ \middle|\ 0\leq i\leq n\right\},$$

$(k)^{\mathrm{res}}$ désignant le reste de la division euclidienne de k par d.

4.5.2 Comparaison avec la donnée modulaire de la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ en type A

Comparons maintenant la matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius de la famille $\mathscr{F}$ à la S-matrice et aux valeurs du twist de la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ pour $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{n+1}$ et ξ une racine primitive $2d$-ième de l'unité. À une fonction $f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$, on associe $\mu=\sum_{i=1}^n\mu_i\alpha_i\in Q$ et $\lambda=-\mu+2\sum_{i=1}^n\eta_i\varpi_i\in P$ où

$$\mu_i=\sum_{j=0}^{i-2}k_j(f)-\sum_{j=0}^{i-1}f(j) \quad \text{et} \quad \eta_i=f(i)-f(i-1)-1,\ 1\leq i\leq n.$$

Comme f prend ses valeurs dans $\{0,\dots,d-1\}$ et est strictement croissante sur $\{1,\dots,n+1\}$ on a $\sum_{i=1}^n\eta_i\leq d-1-n$ et donc $\lambda+\mu\in 2C$. Ceci fournit alors une application

$$\iota:\begin{cases}\Psi^{\#}(Y.\pi) & \longrightarrow & \tilde{C}\\ f & \longmapsto & (\lambda_f,\mu_f)\end{cases}.$$

Remarquons que le symbole spécial f_{sp} a pour image $(0,0)$ et que le symbole cospécial f_{cosp} est envoyé sur $(-2\rho+(2d-(n+1))\varpi_1,2\rho-(n+1)\varpi_1$. On définit un inverse à gauche à ι comme suit. Pour $(\lambda,\mu)\in\tilde{C}$, on définit $f_{\lambda,\mu}$ comme l'unique fonction $f\in\Psi(Y,\pi)$ telle que

$$\{f(0),\dots,f(n)\}=\left\{\left(-\langle\mu,\varpi_1\rangle+\sum_{j=1}^{i}\left\langle\frac{\lambda+\mu}{2}+\rho,\alpha_j\right\rangle\right)^{\mathrm{res}}\ \middle|\ 0\leq i\leq n\right\}$$

et

$$k_i(f)=\left(\sum_{j=1}^{i+1}\left\langle\frac{\lambda-\mu}{2}+\rho,\alpha_j\right\rangle\right)^{\mathrm{res}}.$$

On vérifie alors que $f_{\lambda,\mu}$ est dans $\Psi^{\#}(Y,\pi)$, et on a modulo d :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} f_{\lambda,\mu}(i)-\sum_{i=0}^{n-1} k_i(f_{\lambda,\mu}) &= -(n+1)\langle\mu,\varpi_1\rangle+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left\langle\frac{\lambda+\mu}{2}+\rho,\alpha_j\right\rangle-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i+1}\left\langle\frac{\lambda-\mu}{2}+\rho,\alpha_j\right\rangle\\ &= -(n+1)\langle\mu,\varpi_1\rangle+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\langle\mu,\alpha_j\rangle\\ &= -(n+1)\langle\mu,\varpi_1\rangle+\langle\mu,\sum_{j=1}^{n}(n+j-1)\alpha_j\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque $(n+1)\varpi_1=\sum_{j=1}^{n}(n+j-1)\alpha_j$ (cf. [Bo68, Planche I]). Ceci donne un inverse à gauche de l'application ι, qui est alors injective : pour $f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$, on a

$$-\langle\mu_f,\varpi_1\rangle+\sum_{j=1}^{i}\left\langle\frac{\lambda_f+\mu_f}{2}+\pi,\alpha_j\right\rangle=f(0)+\sum_{j=1}^{i}(f(j)-f(j-1))=f(i)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i+1}\left\langle\frac{\lambda_f-\mu_f}{2}+\rho,\alpha_j\right\rangle &= -\sum_{j=1}^{i+1}\langle\mu_f,\alpha_j\rangle+f(i+1)-f(0)\\ &= -\mu_{f,1}-\mu_{f,i+1}+\mu_{f,i+2}+f(i+1)-f(0)=k_i(f).\end{aligned}$$

Un calcul direct montre le lemme suivant.

Lemme 4.5.2. *Soient $f,g\in\Psi^{\#}(Y,\pi)$. En utilisant les notations précédentes, on a :*

$$\begin{aligned}\langle\lambda_f+2\rho,\mu_g\rangle+\langle\lambda_g+2\rho,\mu_f\rangle = &-\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1}(f)-f(i))\left(\sum_{j=1}^{i}g(j)-\sum_{j=1}^{i-1}k_{j-1}(g)\right)\\ &-\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1}(g)-g(i))\left(\sum_{j=1}^{i}f(j)-\sum_{j=1}^{i-1}k_{j-1}(f)\right)\end{aligned}$$

Maintenant, on suppose que $\zeta=\xi^{-2}$. Du lemme précédent, on déduit immédiatement que

$$\mathrm{Fr}(f)=\theta_{L_\xi(\iota(f))},$$

et également que

$$\mathbb{S}_{f,g}=\frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}}(-1)^{l(w)}\xi^{\langle 2\rho,w\bullet 0\rangle}}{d^n}\varepsilon(f)\varepsilon(g)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(k_i(f)+k_i(g))}S_{\iota(f),\iota(g)}.$$

Soit P la matrice diagonale avec entrées $(\varepsilon(f)(-1)^{\sum_{i=1}^{n}k_{i-1}(f)})_{f\in\Psi^{\#}(Y,\pi)}$.

Théorème 4.5.3. *Si n est pair (resp. impair) la catégorie de fusion pivotale, tressée et non dégénérée (resp. la super-catégorie de fusion pivotale, tressée) du Théorème 4.4.3 est une catégorification de la donnée modulaire de la famille de caractères unipotents $\mathscr{F}$ de $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$:*

$$\mathbb{S}_{f,g}=i^{-|\Phi^+|-n}PS_{\iota(f),\iota(g)}P^{-1}\quad et\quad \mathbb{T}_f=\theta_{L_\xi(\iota(f))}.$$

Remarque 4.5.4. L'image de ι contient alors exactement un représentant de chaque orbite d'objets simples de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ de l'action par tensorisation du centre symétrique de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$. Comme $I\otimes L_\xi(-2\rho,2\rho)$ est dans l'image de ι, ceci justifie notre choix de l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ fait dans la proposition 4.4.2.

Corollaire 4.5.5. *La conjecture 2.2.8 est vérifiée pour l'anneau associé à la matrice de Fourier de la famille $\mathscr{F}$.*

Sauf si n est impair et d est pair, Cuntz a de plus conjecturé qu'en changeant certains signes de la base de l'algèbre associée à la famille $\mathscr{F}$ permet de rendre les constantes de structures positives. Le théorème 4.5.3 donne alors une réponse positive à cette conjecture quand n est pair.

L'objet I est de degré $d\varpi_1$ donc la tensorisation par I ajoute $d\varpi_1$ au degré d'un objet homogène. On considère alors, quand n et d sont impairs, la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ constituée des objets de degré dans Q/dQ. Dans ce cas, chaque orbite d'objets simples sous la tensorisation par I contient exactement un élément de degré dans Q/dQ puisque P/Q est cyclique d'ordre $(n+1)$ de générateur $d\varpi_1$ car d et $n+1$ sont premiers entre eux. Cette sous-catégorie est alors non dégénérée, sa S-matrice est inversible, et donne à nouveau une catégorification de la donnée modulaire donnée associée à la famille $\mathscr{F}$, mais cette fois par une catégorie non dégénérée, et non plus par une catégorie légèrement dégénérée. Un changement de signes de la base de l'anneau associé à la S-matrice donnant des constantes de structures positives est alors possible.

En revanche, quand n est impair et d est pair, un tel changement de base est impossible, le cas $n=1$ ayant été expliqué dans l'exemple de la partie 3.5.

4.5.3 Catégorification de la d-alité d'Ennola

La d-alité d'Ennola donne une bijection $\mathscr{E}$ sur $\Psi^\#(Y,\pi)$ et vérifie $\mathscr{E}^d=\mathrm{id}$. Soit $(-\gamma,\gamma)$ dans $\tilde{C}$ donné par $\gamma=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\varpi_1-\rho$.

Proposition 4.5.6. *Tensoriser par $L_\xi(-\gamma,\gamma)$ est une catégorification de la d-alité d'Ennola. Pour tout $f\in\Psi^\#(Y,\pi)$ on a*

$$L_\xi(\iota(f))\otimes L_\xi(-\gamma,\gamma)\simeq L_\xi(\iota(\mathscr{E}(f))),$$

l'isomorphisme étant entendu dans la modularisation de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ si n est pair, et dans la super-catégorie associée à la modularisation partielle de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ si n est impair.

Puisque γ appartient à $Q^\vee$, il est clair que $L_\xi(-\gamma,\gamma)^{\otimes d}\simeq\mathbf{1}$.

Démonstration. Écrivons γ sur la base des racines simples

$$\gamma=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(n-i+2)\alpha_i.$$

Soient $f\in\Psi^\#(Y,\pi)$ et $(\lambda,\mu)=\iota(f)+(-\gamma,\gamma)$. En écrivant $\mu=\sum_{i=1}^n\mu_i\alpha_i$ et $\lambda=-\mu+2\sum_{i=1}^n\eta_i\varpi_i$ on a

$$\mu_i=\sum_{j=1}^{i-1}k_{j-1}(f)-\sum_{j=1}^{i}f(j)+\frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}\quad\text{et}\quad\eta_i=f(i+1)-f(i)-1.$$

Par définition, $f_{\lambda,\mu}$ est l'unique fonction $g \in \Psi^{\#}(Y,\pi)$ telle que

$$\{g(1),\dots,g(n+1)\} = \left\{\left(-\langle \mu, \varpi_1\rangle + \sum_{j=1}^{i-1}\left\langle \frac{\lambda+\mu}{2}+\rho, \alpha_j\right\rangle\right)^{\mathrm{res}} \mid 1 \leq i \leq n+1\right\}$$

et

$$k_{i-1}(g) = \left(\sum_{j=1}^{i}\left\langle \frac{\lambda-\mu}{2}+\rho, \alpha_j\right\rangle\right)^{\mathrm{res}}.$$

Mais comme

$$-\langle \mu, \varpi_1\rangle + \sum_{j=1}^{i-1}\left\langle \frac{\lambda+\mu}{2}+\rho, \alpha_j\right\rangle = f(i) - \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i}\left\langle \frac{\lambda-\mu}{2}+\rho, \alpha_j\right\rangle &= f(i+1) - \frac{n(n+1)}{2} + \mu_{i+1} - \mu_i \\ &= k_{i-1}(f) - \frac{n(n+1}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} - \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2} \\ &= k_{i-1}(f) + i - 1 - \frac{n(n+3)}{2}.\end{aligned}$$

on a $f_{\lambda,\mu} = f_{\iota(\mathscr{E}(f))}$. Comme les fibres de l'application $(\lambda,\mu) \mapsto f_{\lambda,\mu}$ sont exactement les orbites des objets simples de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ sous la tensorisation par le centre symétrique, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $L_\xi(\iota(f)) \otimes L_\xi(-\gamma,\gamma) \simeq L_\xi(\iota(\mathscr{E}(f))) \otimes I^{\otimes k}$. $\square$

Chapitre 5

Graduation de catégories et matrices de Fourier des groupes tordus

En ce qui concerne la théorie des représentations des groupes réductifs finis, seule une matrice de Fourier associée à une famille de caractères unipotents du groupe de Suzuki de type ${}^2F_4$ n'a aucune interprétation catégorique. Ce chapitre en donne une première explication, et tente de donner un cadre théorique adapté à l'interprétation des matrices de Fourier des groupes tordus. Il faut avoir en tête que ces matrices de Fourier ne rentrent pas dans le cadre des chapitres précédents : elles ne sont pas symétriques et les algèbres de fusion qu'elles définissent ne vérifient pas la conjecture 2.2.8.

La notion de catégorie A-tressée permet de définir des S-matrices tordues, qui ne sont pas symétriques, mais qui définissent néanmoins des constantes de structures d'une $\mathbb{C}$-algèbre libre. Via le procédé d'équivariantisation, on se ramène au calcul de cette matrice dans une catégorie de fusion pivotale qui dispose d'une graduation par un groupe cyclique. La S-matrice tordue est alors extraite de sa S-matrice et elle sera reliée aux matrices de Fourier des groupes tordus. De plus, dans tous les exemples considérés, la modularisation de la composante de degré 0 a un lien fort avec une famille du groupe non tordu.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans une première partie, on établit un cadre catégorique qui est adapté aux exemples que l'on souhaite traiter. On définit une S-matrice tordue associée à une catégorie A-tressée $\mathscr{C}$ et à un élément $a \in A$, on la relie ensuite à la S-matrice de la catégorie équivariantisée $\mathscr{C}^{\langle a\rangle}$, qui contient alors $\mathrm{Rep}(\langle a\rangle)$. Dans un second temps, on regarde un premier exemple qui entre dans ce cadre théorique : celui des groupes diédraux. Dans [Lu94], une catégorification de la donnée $\mathbb{N}$-modulaire attachée aux groupes diédraux est donnée, tandis que dans [GM03], une matrice de Fourier non symétrique est attachée à la grande famille de caractères unipotents des groupes diédraux tordus. On réinterprète la construction de Lusztig en terme de modularisation de la composante de degré 0 d'une catégorie modulaire graduée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et on interprète la matrice de Fourier non symétrique de Geck et Malle comme une matrice extraite de la catégorie modulaire graduée considérée. Les deux dernières parties donnent des exemples de catégories modulaires graduées qui sont des catégories de modules de doubles de Drinfeld de groupes finis. Ceci nous permet de donner un cadre catégorique aux matrices de Fourier des groupes tordus de type ${}^2A_n, {}^3D_4, {}^2E_6$ ou encore ${}^2F_4$.

5.1 Catégories A-tressées et S-matrices tordues

Dans le but de définir de comprendre les matrices de Fourier non symétriques associées aux groupes tordus, on introduit la notion de catégorie de fusion A-tressée, où A est un groupe fini.

5.1.1 Graduation et caractères

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion, pivotale et graduée par un groupe A, c'est-à-dire que l'on dispose d'une décomposition

$$\mathscr{C} = \bigoplus_{a \in A} \mathscr{C}_a,$$

telle que pour tous objets X de $\mathscr{C}_a$ et Y de $\mathscr{C}_b$, l'objet $X \otimes Y$ est dans $\mathscr{C}_{ab}$ et X^* est un objet de $\mathscr{C}_{a^{-1}}$. On dit que la graduation est *fidèle* si pour tout $a \in A$ la catégorie $\mathscr{C}_a$ est non réduite à 0.

Pour deux caractères χ et χ' de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ à valeurs dans $\Bbbk$, on introduit $\langle \chi, \chi' \rangle_a$ le scalaire

$$\langle \chi, \chi' \rangle_a = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C}_a)} \chi(X)\chi'(X^*).$$

La dualité donnant une bijection entre $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_a)$ et $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_{a^{-1}})$, on a $\langle \chi, \chi' \rangle_a = \langle \chi', \chi \rangle_{a^{-1}}$.

Introduisons pour un caractère χ de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ l'élément

$$R_\chi = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \chi(X^*)[X]$$

de $\mathrm{Gr}_\Bbbk(\mathscr{C}) = \Bbbk \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{Gr}(\mathscr{C})$. Comme la catégorie $\mathscr{C}$ est graduée par A, l'anneau $\mathrm{Gr}_\Bbbk(\mathscr{C})$ est lui aussi gradué par A. On note alors $R_\chi = \sum_{a \in A} R_{\chi,a}$ la décomposition de R_χ en somme d'éléments homogènes.

Proposition 5.1.1. *Soient χ et χ' deux caractères de l'anneau de Grothendieck d'une catégorie de fusion tressée graduée par un groupe fini commutatif A. On a alors*

1. *Pour tout $X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C}), [X]R_\chi = \chi(X)R_\chi$.*
2. *Pour tous $a, n \in A$ et $X \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C}_a), [X]R_{\chi,b} = \chi(X)R_{\chi,a+b}$.*
3. *Pour tous $a, b \in A$, on a $\langle \chi', \chi \rangle_a R_{\chi',ab} = \langle \chi, \chi' \rangle_b R_{\chi,ab}$.*

Démonstration. La première assertion est un calcul classique :

$$\begin{aligned}
[X]R_\chi &= \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \chi(Y^*)[X \otimes Y] \\
&= \sum_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \left(\sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N_{X,Y}^Z \chi(Y^*) \right) [Z] \\
&= \sum_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} \left(\sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C})} N_{Z^*,X}^{Y^*} \chi(Y^*) \right) [Z] \\
&= \chi(X)R_\chi.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la deuxième assertion, on fait le même calcul, la seule chose à remarquer est que le produit tensoriel $Z^* \otimes X$ pour X de degré a et Z de degré ab est un élément de degré b^{-1} et donc ne fait apparaître que les duaux des objets simples de $\mathscr{C}_b$.

Enfin, pour la troisième assertion, les deux termes sont égaux à $R_{\chi,a}R_{\chi',b}$. □

Corollaire 5.1.2. *Si de plus la graduation est fidèle, la dimension catégorique de $\mathscr{C}_a$ est égale à $\frac{\dim(\mathscr{C})}{|A|}$ pour tout $a \in A$.*

Démonstration. En appliquant la proposition 5.1.1 au caractère $\dim^+$ on trouve que

$$\dim(\mathscr{C}_a)R_{\dim^+,ab} = \dim(\mathscr{C}_b)R_{\dim^+,ab},$$

pour tous $a, b \in A$. Le caractère $\dim^+$ ne s'annulant pas et la graduation par A étant fidèle, on obtient $\dim(\mathscr{C}_a) = \dim(\mathscr{C}_b)$ pour tous $a, b \in A$. □

5.1.2 Catégories A-tressées

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion graduée par le groupe A. Le degré d'un objet homogène Y est noté $d(Y)$. On suppose que $\mathscr{C}$ est munie d'une action du groupe fini A par autofoncteurs monoïdaux, que l'on va supposer stricte pour simplifier (cf. [Tu10, Section V.2] ou [EGNO15, 8.24] pour le cas non strict). Ainsi pour tout $a \in A$, on dispose d'un foncteur monoïdal strict T_a tel que $T_a T_b = T_{ab}$ et $T_1 = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Cette action est supposée compatible à la graduation dans le sens où

$$T_a(\mathscr{C}_b) \subset \mathscr{C}_{aba^{-1}},$$

pour tous $a, b \in A$. Il existe une notion de A-tressage dans de telles catégories, que nous rappelons brièvement ici. Le A-tressage c est une collection d'isomorphismes naturels

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \to T_{d(X)}(Y) \otimes X,$$

pour X un objet homogène et Y un objet quelconque. On demande à ce que des axiomes similaires à ceux de l'hexagone soient satisfaits (cf. [Tu10, Chapter V, (2.2.2)]) et à ce que l'action de A soit compatible avec ce tressage

$$T_a(c_{X,Y}) = c_{T_a(X),T_a(Y)}.$$

Il existe un analogue du morphisme de Drinfeld pour les catégories A-tressées. Pour X homogène, il est défini par la composition

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev}_{T_{d(X)^{-1}}(X^*)}} X \otimes T_{d(X)^{-1}}(X^*) \otimes T_{d(X)^{-1}}(X)^{**} \xrightarrow{c_{X,T_{d(X)^{-1}}(X^*)}} X^* \otimes X \otimes T_{d(X)^{-1}}(X)^{**}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ev}_X} T_{d(X)^{-1}}(X)^{**},$$

et il vérifie

$$u_X \otimes u_Y = u_{T_{d(X)d(Y)d(X)^{-1}}(X) \otimes T_{d(X)}(Y)} \circ c_{T_{d(X)}(Y),X} \circ c_{X,Y}.$$

Si l'on souhaite définir une S-matrice, on a également besoin d'une structure pivotale $a_X : X \to X^{**}$ compatible avec l'action de A, c'est-à-dire $T_g(a_X) = a_{T_a(X)}$. Tout ceci permet, comme dans le cadre des catégories de fusion pivotales, de définir des traces quantiques. La notion de twist a également son analogue [Tu10, Section V.2.3] : pour X homogène, c'est un morphisme

$$\theta_X : X \to T_{d(X)}(X),$$

vérifiant certains axiomes, dont

$$\theta_{X\otimes Y} = c_{T_{d(X)d(Y)}(Y), T_{d(X)}(X)} \circ c_{T_{d(X)}(X), T_{d(Y)}(Y)} \circ \theta_X \otimes \theta_Y$$

Dans une catégorie A-tressée, toute structure pivotale a un twist associé en utilisant le morphisme de Drinfeld, le twist θ et la structure pivotale a sont reliés par

$$a_X = u_{T_{d(X)}(X)} \circ \theta_X.$$

5.1.3 S-matrice tordue

Pour X et Y simples de degrés respectifs b et a, le double tressage n'est pas un endomorphisme de l'objet simple $X \otimes Y$ mais un morphisme de $X \otimes Y$ vers $T_{bab^{-1}}(X) \otimes T_b(Y)$. On va devoir imposer des restrictions afin de pouvoir calculer la trace de ce morphisme.

En supposant que X est en degré 1, on obtient le morphisme composé suivant

$$X \otimes Y \xrightarrow{c_{X,Y}} Y \otimes X \xrightarrow{c_{Y,X}} T_a(X) \otimes Y.$$

On se restreint alors de plus aux objets X de degré 1 tels que $T_a(X) \simeq X$. Un choix d'un tel isomorphisme γ donne lieu à un isomorphisme

$$X \otimes Y \xrightarrow{c_{X,Y}} Y \otimes X \xrightarrow{c_{Y,X}} T_a(X) \otimes Y \xrightarrow{\gamma \otimes \mathrm{id}_Y} X \otimes Y,$$

dont on peut calculer la trace quantique. Cette trace dépend du choix de l'isomorphisme γ.

On remarque qu'un isomorphisme entre X et $T_a(X)$ définit un élément de l'équivariantisation $\mathscr{C}^{\langle a \rangle}$ de $\mathscr{C}$, puisque cet isomorphisme détermine les isomorphismes entre $T_{a^k}(X)$ et X. Il existe ainsi $|\langle a \rangle|$ tels isomorphismes, qui diffèrent alors d'une racine de l'unité d'ordre celui de a dans A.

Définition 5.1.3. Pour $a \in A$, la S*-matrice tordue* $S_{1,a}$ est la matrice dont les lignes sont indexées par les classes d'isomorphie d'objets simples X de $\mathscr{C}_1$ tels que $T_a(X) \simeq X$ et dont les colonnes sont indexées par les classes d'isomorphie d'objets simples Y de $\mathscr{C}_a$ définie par

$$S^{++}_{X,Y} = \mathrm{tr}^+_{X\otimes Y}((\gamma_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}),$$

où on a choisi pour tout $X \in \mathscr{C}_1$ tels que $T_a(X) \simeq X$ un isomorphisme $\gamma_X : T_a(X) \to X$, où, autrement dit, un relevé de X dans $\mathscr{C}^{\langle a \rangle}$.

Le choix d'un autre isomorphisme entre $T_a(X)$ et X a pour effet de multiplier la ligne correspondante à X par une racine de l'unité d'ordre celui de a.

Afin de donner des relations satisfaites par cette S-matrice, on va l'interpréter comme une sous-matrice de l'équivariantisation $\mathscr{C}^{\langle a \rangle}$ de $\mathscr{C}$. Puisque nous sommes seulement intéressés par le degré a de la catégorie, on suppose que A est cyclique engendré par a, quitte à se restreindre à la sous-catégorie engendrée par les objets homogènes d'ordre une puissance de a.

> **Hypothèse.** *À partir de maintenant, on suppose que le groupe A est cyclique engendré par l'élément a.*

L'équivariantisation de $\mathscr{C}$ par le groupe A est tressée, et $(\gamma_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ est justement le tressage entre l'objet (X, γ_X) et (Y, γ_Y), où γ_Y est un isomorphisme entre Y et $T_a(Y)$.

Lemme 5.1.4. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion A-tressée et Y un objet simple de degré a. Alors il existe un isomorphisme entre $T_a(Y)$ et Y.*

Démonstration. Le A-tressage donne un isomorphisme entre $Y^* \otimes T_a(Y)$ et $Y \otimes Y^*$ puisque Y^* est de degré a^{-1}. Donc $\mathbf{1}$ est un facteur direct de $Y^* \otimes T_a(Y)$, ce qui n'est possible que si $T_a(Y) \simeq Y$. □

On déduit alors immédiatement la proposition suivante :

Proposition 5.1.5. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie A-tressée. Si l'on choisit pour tout X simple dans $\mathscr{C}_1$ tel que $T_a(X) \simeq X$ un relevé dans $\mathscr{C}^A$ et si on choisit pour tout Y simple dans $\mathscr{C}_a$ un relevé dans $\mathscr{C}^A$ alors la S-matrice tordue $S_{1,a}$ est une sous-matrice de la S-matrice de $\mathscr{C}^A$.*

La catégorie $\mathscr{D} = \mathscr{C}^A$, vérifie $\mathrm{Rep}(A) \subset \mathscr{D}$ [EGNO15, Theorem 8.24.3]. Puisque A est cyclique engendré par a, se donner un objet de $\mathscr{D}$ revient à se donner un objet X de $\mathscr{C}$ et un isomorphisme entre X et $T_a(X)$. Ainsi les objets simples de $\mathrm{Rep}(A) \subset \mathscr{D}$ correspondent aux couples $(\mathbf{1}, \lambda)$, où λ est une racine $|A|$-ième de l'unité, c'est-à-dire aux éléments de $\hat{A}$. On note alors X_α l'objet simple correspondant à $\alpha \in \hat{A}$. La tensorisation par les X_α donne alors une action de $\hat{A}$ sur les objets de $\mathscr{D}$ et on peut graduer $\mathscr{D}$ par A de manière compatible avec la graduation de $\mathscr{C}$. Pour $b \in A$, la catégorie $\mathscr{D}_b$ désignera la sous-catégorie pleine de $\mathscr{D}$ constituée des objets X de $\mathscr{D}$ vérifiant

$$c_{X,X_\alpha} \circ c_{X_\alpha,X} = \alpha(b)\mathrm{id}_{X_\alpha \otimes X},$$

pour tout $\alpha \in \hat{A}$.

Lemme 5.1.6. *Ceci définit une graduation de $\mathscr{D}$ par A telle que si X est un objet de $\mathscr{C}$ de degré b, alors pour tout relevé (X, γ) de X dans $\mathscr{D}$ l'objet (X, γ) est de degré b.*

Démonstration. Commençons par montrer que tout objet simple X de $\mathscr{D}$ est dans l'une des sous-catégories $\mathscr{D}_b$. Pour tout $\alpha \in \hat{A}$, l'objet X_α est inversible et ainsi $X_\alpha \otimes X$ est simple. L'endomorphisme $c_{X,X_\alpha} \circ c_{X_\alpha,X}$ est alors égal à un multiple scalaire de l'identité, disons $\lambda_\alpha \, \mathrm{id}_{X_\alpha \otimes X}$. Il nous faut alors montrer que $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ est un morphisme de groupes $\hat{A} \to \Bbbk^*$. Ceci découle immédiatement de l'axiome de l'hexagone pour le tressage : pour $\alpha, \beta \in \hat{A}$,

$$\begin{aligned} c_{X,X_{\alpha\beta}} \circ c_{X_{\alpha\beta},X} &= c_{X,X_\alpha \otimes X_\beta} \circ c_{X_\alpha \otimes X_\beta, X} \\ &= (\mathrm{id}_{X_\alpha} \otimes c_{X,X_\beta}) \circ (c_{X,X_\alpha} \otimes \mathrm{id}_{X_\beta}) \circ (c_{X_\alpha,X} \otimes \mathrm{id}_{X_\beta}) \circ (\mathrm{id}_{X_\alpha} \otimes c_{X_\beta,X}) \\ &= \lambda_\alpha \lambda_\beta \, \mathrm{id}_{X_{\alpha\beta} \otimes X}. \end{aligned}$$

Le morphisme $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ étant un caractère linéaire de $\hat{A}$, il existe un unique $b \in A$ tel que pour tout $\alpha \in \hat{A}$ on ait $\alpha(b) = \lambda_\alpha$, c'est-à-dire que $X \in \mathscr{D}_b$.

On montre maintenant que cette décomposition est une graduation, c'est-à-dire que $\mathscr{D}_b \otimes \mathscr{D}_c \subset \mathscr{D}_{bc}$. Soient X un objet de $\mathscr{D}_b$ et Y un objet de $\mathscr{D}_c$. En utilisant à nouveau l'axiome de l'hexagone, pour tout $\alpha \in \hat{A}$, on a

$$\begin{aligned} c_{X\otimes Y, X_\alpha} \circ c_{X_\alpha, X\otimes Y} &= (c_{X,X_\alpha} \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,X_\alpha}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,X_\alpha}) \circ (c_{X,X_\alpha} \otimes \mathrm{id}_Y) \\ &= \alpha(b)\alpha(c)\,\mathrm{id}_{X_\alpha \otimes X \otimes Y}, \end{aligned}$$

et on conclut puisque α est multiplicatif.

Il reste à montrer que pour X un objet dans $\mathscr{D}_b$, son dual est dans $\mathscr{D}_{b^{-1}}$. Ceci découle directement de [EGNO15, Lemma 8.9.1].

Enfin, soit X un objet de $\mathscr{C}$ de degré b et γ un isomorphisme $T_a(X) \simeq X$, c'est-à-dire que (X,γ) définit un objet de $\mathscr{D}$. Le double tressage $c_{(X,\gamma),X_\alpha} \circ c_{X_\alpha,(X,\gamma)}$ dans $\mathscr{D}$ correspond à la composée

$$\mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{c_{1,X}} X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{c_{X,1}} \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\alpha(b)\mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes X$$

dans $\mathscr{C}$. Donc (X,γ) est bien de degré b dans $\mathscr{D}$. □

Passer d'un relevé (X,γ) de X à un autre relevé (X,γ') revient alors à tensoriser (X,γ) dans $\mathscr{D}$ par un certain X_α. On voit alors que les objets simples $X \in \mathscr{C}_1$ tels que $T_a(X) \simeq X$ ont $|A|$ relevés non isomorphes dans $\mathscr{D}$, et donc que pour tout relevé (X,γ) de X, le stabilisateur de (X,γ) sous l'action de $\hat{A}$ est trivial.

Le calcul de la S-matrice tordue $S_{1,a}$ se ramène alors à un calcul dans l'équivariantisation $\mathscr{D}$ d'une matrice extraite, dont les lignes sont indexées par un ensemble $[I_{1,n}]$ et les colonnes par un ensemble $[I_a]$ que l'on décrit. Tout d'abord, notons $I_{1,n}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de degré 1 de $\mathscr{D}$ de stabilisateur trivial pour l'action de $\hat{A}$. L'ensemble $[I_{1,n}]$ est un choix de représentants de ces orbites. De même, I_a est l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de degré a de $\mathscr{D}$ et $[I_a]$ en désigne un système de représentants. La S-matrice tordue $S_{1,a}$ est alors égale à la matrice $(S^{++}_{X,Y})_{X\in[I_{1,n}],Y\in[I_a]}$.

En ce qui concerne le twist, on se ramène de manière similaire à un calcul dans la catégorie $\mathscr{D}$. Puisque la donnée d'une catégorie de fusion A-tressée et pivotale $\mathscr{C}$ est équivalente à la donnée d'une catégorie de fusion tressée pivotale $\mathscr{C}^A$ contenant $\mathrm{Rep}(A)$ [EGNO15, Theorem 8.24.3], et que l'on a relié la S-matrice tordue de la catégorie $\mathscr{C}$ à une sous-matrice de la S-matrice de la catégorie $\mathscr{C}^A$, on va maintenant travailler avec le second point de vue afin d'obtenir des relations non triviales vérifiées par la S-matrice tordue. Tout comme dans le cas classique, on a besoin d'ajouter une hypothèse de non dégénérescence. La catégorie $\mathscr{C}^A$ sera supposée non dégénérée, ce qui est équivalent à la non dégénérescence de la catégorie $\mathscr{C}_1$ avec la fidélité de la graduation ($\mathscr{C}_b \neq 0$ pour tout $b \in A$) [EGNO15, Remark 8.24.4].

5.2 Catégories non dégénérées contenant $\mathrm{Rep}(A)$ avec A cyclique

Hypothèses. *On fixe $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée et pivotale sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle $\Bbbk$. Soit A un groupe cyclique fini de cardinal n de générateur a. On suppose que* $\mathrm{Rep}(A) \subset \mathscr{C}$, *inclusion à comprendre en tant que catégories de fusion rigides, tressés et pivotales. Enfin, on suppose que $\mathscr{C}$ est non dégénérée.*

La catégorie $\mathscr{C}$ contenant Rep(A), on dispose d'un objet simple X_α pour tout $\alpha \in \hat{A}$. Le double tressage avec les éléments de Rep(A) permet alors de définir une graduation de la catégorie $\mathscr{C}$ par A. Soit B l'unique sous-groupe maximal de A tel que $\mathscr{C}_b \neq 0$ pour tout $b \in B$. On note $d(X)$ le degré d'un objet homogène X. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 5.2.1. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion pivotale et tressée contenant* Rep(A) *comme sous-catégorie, avec A un groupe cyclique.*

1. *Pour tous objets simples X et Y dans $\mathscr{C}$, tout $\alpha \in \hat{A}$, et tout $(?,?') \in \{(+,+),(-,+),(-,-)\}$, on a $S^{?,?'}_{X_\alpha \otimes X, Y} = \alpha(d(Y)) S^{?,?'}_{X,Y}$.*
2. *Pour tout objet X, tout $\alpha \in \hat{A}$ et tout twist $\tilde{\theta}$ sur $\mathscr{C}$, on a $\tilde{\theta}_{X_\alpha \otimes X} = \alpha(d(X)) \tilde{\theta}_{X_\alpha} \tilde{\theta}_X$.*

Comme expliqué dans la partie précédente, on s'intéresse à une sous-matrice de la S-matrice de $\mathscr{C}$, et on obtient des propriétés de cette sous-matrice, en particulier on va montrer qu'elle est carrée.

5.2.1 Non dégénérescence et carré de la S-matrice tordue

Commençons par les objets transparents de $\mathscr{C}_1$. Remarquons qu'une conséquence évidente de la non dégénérescence de $\mathscr{C}$ est la non trivialité du sous-groupe B de A graduant fidèlement $\mathscr{C}$.

Lemme 5.2.2. *Le centre symétrique de $\mathscr{C}_1$ est* Rep(A). *Autrement dit, les seuls objets simples transparents de la catégorie $\mathscr{C}_1$ sont les X_α pour $\alpha \in \hat{A}$. De plus le groupe B graduant fidèlement $\mathscr{C}$ est égal à A.*

Démonstration. On note $\mathscr{Z}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_1)$ le centralisateur de $\mathscr{C}_1$ dans $\mathscr{C}$ [EGNO15, Section 8.20]. D'après [EGNO15, Theorem 8.21.1], on a

$$\dim(\mathscr{C}_1)\dim(\mathscr{Z}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_1)) = \dim(\mathscr{C})\dim(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{Z}_{\mathrm{sym}}(\mathscr{C})).$$

Par hypothèse, le seul objet simple du centre symétrique de $\mathscr{C}$ est $\mathbf{1}$ donc l'égalité ci-dessus, en tenant compte du corollaire 5.1.2, se réécrit $\dim(\mathscr{Z}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_1)) = |B| \leq |A|$ (on a ici choisi un plongement $\Bbbk_{\mathrm{alg}} \to \mathbb{C}$ pour pouvoir écrire une inégalité). Or tous les X_α, pour $\alpha \in \hat{A}$, sont clairement dans le centre symétrique de $\mathscr{C}_1$. Puisque $\dim(\mathrm{Rep}(A)) = |A|$, on conclut en rappelant que pour tout objet simple X l'élément $|X|$ de $\Bbbk$ est totalement positif. □

La structure pivotale n'étant pas nécessairement sphérique, on dispose d'une involution $\bar{\ }$ sur $\mathscr{C}$ (voir la sous-partie 3.1.4).

Lemme 5.2.3. *L'élément* $\mathbf{1}$ *est dans* $\mathscr{C}_1$. *Ainsi l'involution* $\bar{\ }$ *donne une bijection entre* $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_b)$ *et* $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_{b^{-1}})$ *pour tout* $b \in \hat{A}$.

Démonstration. Ceci provient du fait que X_α est de même dimension que son dual. En effet, $S^{++}_{X_\alpha,\bar{\mathbf{1}}} = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})s^+_{\bar{\mathbf{1}}}(X_\alpha) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})\dim^+(X_\alpha)$ et ainsi $c_{\bar{\mathbf{1}},X_\alpha} \circ c_{X_\alpha,\bar{\mathbf{1}}} = \mathrm{id}_{X_\alpha \otimes \bar{\mathbf{1}}}$. □

Notons $I_{a^{\pm1}}$ l'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_{a^{\pm1}})$. Au vu de ce qui précède, la tensorisation par X_α donne lieu à une action de $\hat{A}$ sur I_a et l'involution $\bar{\ }$ se restreint en une bijection de I_a sur $I_{a^{-1}}$.

Lemme 5.2.4. *Soient* $\alpha \in \hat{A}$ *et* X *un objet simple de degré* $a^{\pm1}$. *Alors* $X \otimes X_\alpha \simeq X$ *si et seulement si* $\alpha = 1$.

Démonstration. Si X est simple de degré $a^{\pm1}$ alors $\theta_{X_\alpha \otimes X} = \alpha(a^{\pm1})\theta_X$ d'après le lemme 5.2.1 et donc si $X_\alpha \otimes X \simeq X$ alors $\alpha(a^{\pm1}) = 1$. On conclut puisque $a^{\pm1}$ engendre A. □

Ainsi dans le cas qui va nous intéresser, à savoir les objets de $I_{a^{\pm1}}$, l'action de $\hat{A}$ est à stabilisateurs triviaux sur $I_{a^{\pm1}}$. Notons alors $I_{1,f}$ le sous-ensemble de I_1 constitué des classes d'isomorphie d'objets simples de stabilisateur non trivial sous l'action de $\hat{A}$ et notons $I_{1,n}$ son complémentaire. On choisit un système de représentants $[I_{1,n}]$ (resp. $[I_a]$) des orbites de $I_{1,n}$ (resp. I_a) sous l'action de $\hat{A}$.

Remarque 5.2.5. Le choix de $[I_{1,n}]$ n'est pas nécessairement compatible avec l'involution $\bar{\ }$, mais pour tout $X \in [I_{1,n}]$, il existe d'uniques $Y \in [I_{1,n}]$ et $\alpha \in \hat{A}$ tels que $\bar{X} \simeq X_\alpha \otimes Y$.

Si $n \neq 2$, on peut choisir pour $[I_{a^{-1}}]$ l'ensemble $\{\bar{X} \mid X \in [I_a]\}$, ce qui donne un choix compatible de $[I_a]$ et $[I_{a^{-1}}]$ avec l'involution $\bar{\ }$.

Si $n = 2$, on peut choisir les éléments de $[I_a]$ de telle sorte que pour tout $X \in [I_a]$ alors $\bar{X} \in [I_a]$. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $X \in I_a$, on n'a jamais $\bar{X} \simeq X_\alpha \otimes X$ quel que soit $\alpha \in \hat{A}$ non nul : si θ est le twist associé à la structure pivotale on a $\theta_{\bar{X}} = \theta_X$ et $\theta_{X_\alpha \otimes X} = \alpha(a)\theta_X$.

On pose alors $[I_{a^{-1}}] = \{\bar{X} \mid X \in [I_a]\}$. Pour $X \in I_{1,f}$ tel que $X_\alpha \otimes X \simeq X$ pour $\alpha \neq 1$ et $Y \in I_{a^{\pm1}}$, on a $S^{++}_{X,Y} = S^{++}_{X_\alpha \otimes X,Y} = \alpha(a^{\pm1})S^{++}_{X,Y}$ et donc $S^{++}_{X,Y}$ est nul. On considère alors les sous-matrices suivantes de S^{++} :

$$S_{1,a^{\pm1}} = (S^{++}_{X,Y})_{X\in[I_{1,n}],Y\in[I_{a^{\pm1}}]},\ S_{a^{\pm1},1} = {}^tS_{1,a^{\pm1}}, \quad \text{et} \quad S_{a^{\pm1},a} = (S^{++}_{X,Y})_{X\in[I_a^{\pm1}],Y\in[I_a]}.$$

Considérons les deux matrices monomiales carrées $P = (P_{X,Y})_{X,Y\in[I_{1,n}]}$ et $Q = (Q_{W,Z})_{W\in[I_{a^{-1}}],Z\in[I_a]}$ définies par

$$P_{X,Y} = \sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha(a^{-1})\delta_{\bar{Y}\simeq X_\alpha\otimes X} \quad \text{et} \quad Q_{W,Z} = \delta_{\bar{W}\simeq Z}$$

pour tous $X, Y \in [I_{1,n}]$, $W \in [I_{a^{-1}}]$ et $Z \in [I_a]$.

Proposition 5.2.6. *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie de fusion tressée, pivotale et non dégénérée contenant* $\mathrm{Rep}(A)$. *Alors*

$$S_{1,a}S_{a,1} = \frac{\dim(\mathscr{C}_1)}{n}\dim^+(\bar{\mathbf{1}})P \quad \textit{et} \quad S_{a^{-1},1}S_{1,a} = S_{a^{-1},a}S_{a,a} = \frac{\dim(\mathscr{C}_1)}{n}\dim^+(\bar{\mathbf{1}})Q \tag{5.1}$$

En particulier les matrices $S_{1,a^{\pm1}}$ *et* $S_{a^{\pm1},1}$ *sont carrées et* $|I_{1,n}| = |I_a|$.

Démonstration. Commençons par le produit $S_{a^{-1},1}S_{1,a}$. Fixons $X \in [I_a]$ et $Y \in [I_{a^{-1}}]$. Comme déjà remarqué, pour tout $Z \in I_{1,f}$ on a $S^{++}_{X,Z} = 0 = S^{++}_{Z,Y}$. Par conséquent,

$$\sum_{Z\in I_1} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \sum_{Z\in I_{1,n}} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \sum_{Z\in[I_{1,n}]}\sum_{\alpha\in\hat{A}} S^{++}_{X,X_\alpha\otimes Z}S^{++}_{X_\alpha\otimes Z,Y}.$$

Mais $S^{++}_{X,X_\alpha\otimes Z} = \alpha(a)S^{++}_{X,Z}$ et $S^{++}_{X_\alpha\otimes Z,Y} = \alpha(a^{-1})S^{++}_{X,Z}$ et ainsi

$$(S_{a^{-1},1}S_{1,a})_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{Z\in I_1} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y}.$$

Supposons à présent que pour les objets simples $\bar{Y}$ et X ne sont pas isomorphes. Dans ce cas,

$$\sum_{Z\in I_1} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \dim^+(X)\dim^+(Y)\sum_{Z\in I_1} s^+_X(Z)s^+_{\bar{Y}}(Z^*) = 0$$

puisque les caractères s^+_X et $s^+_{\bar{Y}}$ de $\mathrm{Gr}(\mathscr{C}_1)$ sont différents en vertu de [EGNO15, Lemma 8.20.9].

Supposons alors maintenant que $\bar{Y} \simeq X$. En utilisant (3.1) et comme l'objet $X\otimes Y$ est de degré nul, on trouve que

$$\sum_{Z\in I_1} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \sum_{\substack{Z\in I_1\\ W\in I_1}} \dim^+(Z)N^W_{X,Y}S^{++}_{Z,W} = \sum_{W\in I_1} N^W_{X,Y}\sum_{Z\in I_1} s^+_{\mathbf{1}}(Z)s^+_{\bar{W}}(Z^*).$$

La somme sur Z est alors nulle si $\bar{W} \not\simeq X_\alpha$ et on trouve ainsi que

$$\sum_{Z\in I_1} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \dim(\mathscr{C}_1)\sum_{\alpha\in\hat{A}} \dim^+(\overline{X_\alpha})N^{\overline{X_\alpha}}_{X,Y}.$$

Enfin, $N^{\overline{X_\alpha}}_{X,Y} = N^{\mathbf{1}}_{X,Y\otimes\overline{X_\alpha}^*}$ et comme $Y\otimes\overline{X_\alpha}^* \simeq X^*\otimes\bar{\mathbf{1}}\otimes X_\alpha\otimes\bar{\mathbf{1}}^* \simeq X^*\otimes X_\alpha$ cette constante de structure est nulle si $\alpha \neq 1$ et égale à 1 sinon. On finit en remarquant que $\dim^+(\overline{X_\alpha}) = \dim^+(\bar{\mathbf{1}})$.

Intéressons nous maintenant au produit $S_{1,a}S_{a,1}$. Soient X, Y des éléments de I_1. On commence par remarquer que

$$\sum_{Z\in I_a} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = n\sum_{Z\in[I_a]} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y}.$$

Supposons en premier lieu que pour tout $\alpha\in\hat{A}$ les objets $\bar{Y}$ et $X_\alpha\otimes X$ ne sont pas isomorphes. Les caractères s^+_X et $s^+_{\bar{Y}}$ de $\mathscr{C}_1$ sont alors différents et donc $\langle s^+_{\bar{Y}}, s^+_X\rangle_1 = 0$. En utilisant la proposition 5.1.1 ainsi que ses notations, on obtient

$$0 = \langle s^+_{\bar{Y}}, s^+_X\rangle_1 R_{s^+_{\bar{Y}},a} = \langle s^+_X, s^+_{\bar{Y}}\rangle_a R_{s^+_X,a}.$$

Si $R_{s^+_X,a} = 0$ alors le caractère s^+_X s'annule sur I_a et $\langle s^+_X, s^+_{\bar{Y}}\rangle_a$ est clairement nul. Sinon, si $R_{s^+_X,a} \neq 0$, l'égalité précédente impose que $\langle s^+_X, s^+_{\bar{Y}}\rangle_a = 0$. Comme

$$\sum_{Z\in I_a} S^{++}_{X,Z}S^{++}_{Z,Y} = \dim^+(X)\dim^+(Y)\langle s^+_X, s^+_{\bar{Y}}\rangle_a,$$

on obtient l'annulation de $(S_{1,a}S_{a,1})_{X,Y}$ si $\bar{Y}$ et $X_\alpha \otimes X$ ne sont pas isomorphes pour tout $\alpha \in \hat{A}$.

On suppose alors que $\bar{Y} \simeq X_\alpha \otimes X$ pour un certain $\alpha \in \hat{A}$. Le calcul est le même que pour le cas correspondant de $S_{a^{-1},1}S_{1,a}$, la seule différence étant que

$$\sum_{Z\in I_a} s_{\mathbf{1}}^+(Z)s_{X_\beta}^+(Z^*) = \beta(a^{-1})\dim(\mathscr{C}_a) = \dim(\mathscr{C}_1)$$

l'égalité de dimensions provenant du corollaire 5.1.2.

Le cas du produit $S_{a^{-1},a}S_{a,a}$ se traite de manière similaire. □

Corollaire 5.2.7. *Conservons les mêmes hypothèses. Soient $X, Y, Z \in [I_{1,n}]$. Alors*

$$\sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha(a) N_{X,Y}^{X_\alpha\otimes Z} = \frac{n}{\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})} \sum_{W\in[I_a]} \frac{S_{W,X}^{++}S_{W,Y}^{++}S_{W,\bar{Z}}^{++}}{\dim^+(W)}.$$

Démonstration. Choisissons tout d'abord $\beta \in \hat{A}$ tel que $X_\beta \otimes \bar{Z} \in [I_{1,n}]$. L'équation (3.1) donne

$$\begin{aligned}
\sum_{W\in[I_a]} \frac{S_{W,X}^{++}S_{W,Y}^{++}S_{W,\bar{Z}}^{++}}{\dim^+(W)} &= \sum_{\substack{W\in[I_a]\\ U\in I_1}} N_{X,Y}^U S_{U,W}S_{W,\bar{Z}} \\
&= \sum_{\substack{W\in[I_a]\\ U\in[I_{1,n}]}} \left(\sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha(a) N_{X,Y}^{X_\alpha\otimes U}\right) S_{U,W}S_{W,\bar{Z}} \\
&= \sum_{U\in[I_{1,n}]} \beta(a^{-1}) \left(\sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha(a) N_{X,Y}^{X_\alpha\otimes U}\right) (S_{1,a}S_{a,1})_{U,X_\beta\otimes\bar{Z}}.
\end{aligned}$$

Mais d'après la proposition précédente, le produit $(S_{1,a}S_{a,1})_{U,X_\beta\otimes\bar{Z}}$ est justement égal à $\frac{\dim(\mathscr{C}_0)}{n}\dim^+(\bar{\mathbf{1}})\beta(a)\delta_{U,Z}$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 5.2.8. Cette formule du "type Verlinde" peut paraître un peu artificielle. Le terme de droite a déjà été considéré par Geck et Malle [GM03] avec $n = 2$ afin de définir une algèbre avec des constantes de structures négatives. Nous détaillerons cet exemple dans la partie 5.3.

Ces constantes de structures sont en fait celles du quotient de l'anneau $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}(\mathscr{C}_1)$ par l'idéal engendré par $X_\alpha - \alpha(a)$ pour $\alpha \in \hat{A}$.

5.2.2 Twist et graduation

Maintenant, on cherche une relation entre les matrices $S_{a^{\pm1},1}, S_{1,a^{\pm1}}$ et le twist θ de $\mathscr{C}$ associé à la structure pivotale. Comme vu au lemme 5.2.1, le twist d'un élément de $[I_{1,n}]$ ne dépend pas du choix du représentant, tandis que le twist d'un élément de $[I_a]$ en dépend. Néanmoins, sa puissance n-ième ne dépend pas du choix. On note T_1 la matrice diagonale avec entrées θ_X^{-1} pour $X \in [I_{1,n}]$ et on note $T_{a^{\pm1}}$ la matrice diagonale avec entrées θ_X^{-1} pour $X \in [I_{a^{\pm1}}]$. Puisque $\theta_{\bar{X}} = \theta_X$ pour tout objet simple X, on a $T_{a^{-1}} = QT_a$, où Q est la matrice définie avant la proposition 5.2.6.

Proposition 5.2.9. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée, pivotale et non dégénérée contenant* Rep(A) *comme sous-catégorie tressée et pivotale. Alors $S_{a^{-1},1}$, $S_{1,a}$, T_1, T_a et $T_{a^{-1}}$ satisfont :*

$$S_{a^{-1},1}T_1S_{1,a} = \frac{1}{n}\tau^-(\mathscr{C}_1)T_{a^{-1}}^{-1}S_{a^{-1},a}T_a^{-1}. \tag{5.2}$$

Démonstration. Soient $Y \in [I_{a^{-1}}]$ et $Z \in [I_a]$. Tout d'abord,

$$(S_{a^{-1},1}T_1S_{1,a})_{Y,Z} = \sum_{X\in[I_{1,n}]} S^{++}_{Y,X}\theta_X^{-1}S^{++}_{X,Z} = \frac{1}{2}\sum_{X\in I_1} S^{++}_{Y,X}\theta_X^{-1}S^{++}_{X,Z},$$

puisque $S^{++}_{X,Y} = 0$ pour $X \in I_{1,f}$ et puisque $S^{++}_{Y,X}\theta_X^{-1}S^{++}_{X,Z} = S^{++}_{Y,X_a\otimes X}\theta^{-1}_{X_a\otimes X}S^{++}_{X_a\otimes X,Z}$. En utilisant successivement le fait que s_X^+ est un morphisme d'anneaux, le lemme 3.1.16 et l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{X\in I_1} S^{++}_{Y,X}\theta_X^{-1}S^{++}_{X,Z} &= \sum_{W\in I_1} N^W_{Y,Z}\sum_{X\in I_1}\theta_X^{-1}\dim^+(X)S^{++}_{X,W}\\ &= \sum_{W\in I_1} N^W_{Y,Z}\theta_W\dim^+(W)\tau^-(\mathscr{C}_1)\\ &= \theta_Y\theta_Z S^{++}_{Y,Z}\tau^-(\mathscr{C}_1),\end{aligned}$$

comme attendu. □

Les facteurs $\frac{1}{n}\dim(\mathscr{C}_1)$ et $\frac{1}{n}\tau^-(\mathscr{C}_1)$ apparaissent dans (5.1) et dans (5.2). On peut les réinterpréter aux termes correspondants pour la modularisation de $\mathscr{C}_1$.

Lemme 5.2.10. *La dimension de $\mathscr{C}_1$ ainsi que les sommes de Gauss vérifient*

$$\frac{1}{n}\tau^+(\mathscr{C}_1)\frac{1}{n}\tau^-(\mathscr{C}_1) = \frac{1}{n}\dim(\mathscr{C}_1).$$

Démonstration. On dispose de la modularisation $\mathscr{C}_1^{\mathrm{mod}}$ de la catégorie $\mathscr{C}_1$. Chaque orbite d'objets simples de $\mathscr{C}_1$ ayant pour stabilisateur un sous-groupe d'ordre k de $\hat{A}$ pour l'action par tensorisation par X_α, donne lieu à k objets simples isomorphes dans $\mathscr{C}_1^{\mathrm{mod}}$, tous de même dimension quantique et de même twist [Br00, Proposition 4.4]. On obtient alors que

$$\dim(\mathscr{C}_1^{\mathrm{mod}}) = \frac{1}{n}\dim(\mathscr{C}_1) \quad \text{et} \quad \tau^\pm(\mathscr{C}_1^{\mathrm{mod}}) = \frac{1}{n}\tau^\pm(\mathscr{C}_1).$$

On conclut alors grâce à la proposition 3.1.23. □

On choisit à présent un plongement $\Bbbk_{\mathrm{alg}} \to \mathbb{C}$ et on note $\sqrt{\dim(\mathscr{C}_1)}$ la racine carrée positive de $\dim(\mathscr{C}_1)$ pour ce plongement. On choisit également une racine carrée $\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}$ de $\dim^+(\bar{\mathbf{1}})$.

Théorème 5.2.11. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de fusion tressée, pivotale et non dégénérée contenant* Rep(A) *comme sous-catégorie tressée et pivotale, avec A d'ordre 2. On définit les matrices renormalisées $\tilde{S}_{1,a}$ et $\tilde{S}_{a,1}$ par*

$$\tilde{S}_{1,a} = \frac{S_{1,a}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}} \quad \textit{et} \quad \tilde{S}_{a,1} = \frac{S_{a,1}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)}\sqrt{\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}}.$$

Alors

$$(\tilde{S}_{a,1}\tilde{S}_{1,a})^2 = \mathrm{id}, (\tilde{S}_{1,a}\tilde{S}_{a,1})^2 = 1, (\tilde{S}_{a,1}T_1\tilde{S}_{1,a}T_a^2)^2 = \frac{\tau^-(\mathscr{C}_1)}{\tau^+(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\,\mathrm{id}$$
$$\text{et} \quad (\tilde{S}_{a,1}T_1^{-1}\tilde{S}_{1,a}T_a^{-2})^2 = \frac{\tau^+(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}{\tau^-(\mathscr{C}_1)}\,\mathrm{id}.$$

Démonstration. La proposition 5.2.6 montre que $\tilde{S}_{1,a}\tilde{S}_{a,1}$ et que $\tilde{S}_{a,1}\tilde{S}_{1,a}$ sont des matrices de permutation signée et sont d'ordre 2.

Ensuite, il découle de la proposition 5.2.9 que

$$(\tilde{S}_{a,1}T_1\tilde{S}_{1,a}T_a^2)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\tau^-(\mathscr{C}_1)\right)^2}{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}\,\mathrm{id},$$

puisque $S_{a,a}^2 = \frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})\mathrm{id}$.

Enfin, en ce qui concerne la dernière relation, on commence par prendre l'inverse de l'équation (5.2) :

$$\tilde{S}_{1,a}^{-1}T_1^{-1}\tilde{S}_{a,1}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}{\frac{1}{2}\tau^-(\mathscr{C}_1)}T_a S_{a,a}^{-1} T_a.$$

Or, d'après la proposition 5.2.6, on a $\tilde{S}_{1,a}^{-1} = \tilde{S}_{a,1}P, \tilde{S}_{a,1}^{-1} = P\tilde{S}_{1,a}$ et $\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})S_{a,a}^{-1} = S_{a,a}$. En remarquant que $PT_1^{-1}P = T_1^{-1}$, on trouve

$$(\tilde{S}_{a,1}T_1^{-1}\tilde{S}_{1,a}T_a^{-2})^2 = \frac{\frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}_1)\dim^+(\bar{\mathbf{1}})}{\left(\frac{1}{2}\tau^-(\mathscr{C}_1)\right)^2}\,\mathrm{id}.$$

On conclut en utilisant le lemme 5.2.10. □

5.3 Données modulaires associées aux groupes diédraux

Dans cette partie, on reprend l'exemple de la catégorie considérée par Lusztig [Lu94], que l'on réinterprète dans le cadre théorique de la partie 5.2. La catégorie sera graduée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que l'on note additivement. Le calcul de la modularisation du degré 0 sera écrit en détail, ainsi que l'interprétation de la matrice de Fourier du groupe diédral tordu.

On fixe $d > 2$ un entier, $\xi = \exp\left(\frac{i\pi}{d}\right)$ une racine primitive $2d$-ième de l'unité et $\zeta = \xi^2$. Le groupe diédral d'ordre $2d$ sera noté $I_2(d)$.

5.3.1 Une matrice de Fourier pour les groupes diédraux

On rappelle ici la donnée modulaire associée au groupe diédral, telle que définie par Lusztig [Lu94, Section 3.1]. On note I l'ensemble des paires d'entiers (i,j) telles que

$$0 < i < j < i+j < d \quad \text{ou} \quad 0 = i < j < \frac{d}{2}.$$

Soit I' l'ensemble avec deux éléments $\left(0,\frac{d}{2}\right)'$ et $\left(0,\frac{d}{2}\right)''$ si d est pair, et soit $I' = \emptyset$ si d est impair. Finalement, soit X la réunion disjointe de I et I'. Lusztig définit alors la matrice

$\mathbb{S} = (\{x, x'\})_{x,x' \in X}$ par

$$\{(i,j),(k,l)\} = \frac{\zeta^{il+jk} + \zeta^{-il-jk} - \zeta^{ik+jl} - \zeta^{-ik-jl}}{d}$$

si (i,j) et (k,l) appartiennent à I,

$$\left\{(i,j),\left(0,\frac{d}{2}\right)'\right\} = \left\{(i,j),\left(0,\frac{d}{2}\right)''\right\} = \left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)',(i,j)\right\} = \left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)'',(i,j)\right\} = \frac{(-1)^i - (-1)^j}{d}$$

si d est pair et si (i,j) appartient à I et

$$\left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)',\left(0,\frac{d}{2}\right)'\right\} = \left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)'',\left(0,\frac{d}{2}\right)''\right\} = \frac{1-(-1)^{d/2}+d}{2d},$$
$$\left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)',\left(0,\frac{d}{2}\right)''\right\} = \left\{\left(0,\frac{d}{2}\right)'',\left(0,\frac{d}{2}\right)'\right\} = \frac{1-(-1)^{d/2}-d}{2d}.$$

Lusztig définit également un vecteur $t = (t_x)_{x \in X}$ par $t_{i,j} = \zeta^{-ij}$ si $(i,j) \in I$ et $t_x = 1$ si $x \in I'$.

Remarque 5.3.1. Les formules ci-dessus pour $\mathbb{S}$ ne sont pas exactement celles de Lusztig. La différence provient de l'existence d'une involution $\flat$ sur X définie par $(i,j) \mapsto (i, d-j)$ si $(i,j) \in I$ et $i > 0$ et $x \mapsto x$ sinon. La matrice définie par Lusztig dans [Lu94] est $\mathbb{S}_{x,\flat(x')}$.

Proposition 5.3.2 ([Lu94, Proposition 3.2]). *La matrice* $\mathbb{S}$ *et la matrice diagonale* $\mathbb{T}$ *avec entrées* $(t_x)_{x \in X}$ *forment une donnée* $\mathbb{N}$*-modulaire :*

$$\mathbb{S}^2 = 1, (\mathbb{S}\mathbb{T})^3 = 1 \quad et \quad \forall x,y,z \in X, \sum_{u \in X} \frac{\mathbb{S}_{x,u}\mathbb{S}_{y,u}\overline{\mathbb{S}_{z,u}}}{\mathbb{S}_{(0,1),u}} \in \mathbb{N}.$$

5.3.2 Une matrice de Fourier pour les groupes diédraux tordus

On rappelle ici la définition de la matrice de Fourier ainsi que des valeurs propres de Frobenius pour les groupes diédraux tordus, telle que définie dans [Ma95, 6C] et [GM03, 6.1]. Ces données ne forment pas de données $\mathbb{N}$ voire $\mathbb{Z}$-modulaires, mais on les interprétera dans le cadre catégorique de la partie 5.2. Soit J l'ensemble des paires d'entiers impairs (j,k) telles que

$$0 < k < l < k + l < 2d.$$

La matrice de Fourier est alors $\mathbb{S}^{\text{tw}} = (\langle (i,j),(k,l)\rangle)_{(i,j)\in I,(k,l)\in J}$ où

$$\langle (i,j),(k,l)\rangle = \frac{\xi^{il+jk} + \xi^{-il-jk} - \xi^{ik+jl} - \xi^{-ik-jl}}{d}.$$

Cette matrice n'est pas symétrique, mais est néanmoins carrée. Comme pour les groupes $G(d,1,n)$, il existe une notion de "caractères unipotents" pour les groupes diédraux tordus ou non, et même plus généralement pour les groupes $G(d,d,n)$. En ce qui concerne les groupes diédraux, les caractères unipotents de la grosse famille peuvent être indexés par X, et pour les groupes diédraux tordus, les caractères unipotents de la grosse famille peuvent être indexés pat J. On note F_1 la matrice diagonale avec entrées $(t_x)_{x\in I}$ et F_2 la matrice diagonale avec entrées $(\xi^{kl})_{(k,l)\in J}$.

Proposition 5.3.3 ([GM03, Theorem 6.9]). *Les matrices* $\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}$, F_1 *et* F_2 *vérifient*

$$\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}\,{}^t\mathbb{S}^{\mathrm{tw}} = 1 = {}^t\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}\mathbb{S}^{\mathrm{tw}} \quad et \quad (F_2\,{}^t\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}F_1^{-1}\mathbb{S}^{\mathrm{tw}})^2 = 1.$$

De plus, pour tous $x, y, z \in I$

$$N_{x,y}^z = \sum_{u\in J} \frac{\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}_{x,u}\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}_{y,u}\overline{\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}_{z,u}}}{\mathbb{S}^{\mathrm{tw}}_{(0,1),u}} \in \mathbb{Z}.$$

On peut alors définir une $\mathbb{Z}$-algèbre libre en tant que $\mathbb{Z}$-module et de base indexée par I dont les constantes de structures sont $N_{x,y}^z$. Geck et Malle ont expliqué les nombreuses similarités entre cette algèbre et celle que l'on peut associer à la donnée modulaire de Lusztig pour le groupe diédral.

Tout comme dans le cas des algèbres de fusion associées aux familles de caractères unipotents de $G(d,1,n)$, il est facile de trouver des exemples pour lesquels certaines constantes de structures sont strictement négatives. Par contre, la conjecture 2.2.8 de Cuntz n'est plus valide ici : l'“anneau” dont les constantes de structures sont données par les valeurs absolues des $N_{x,y}^z$ n'est plus associatif.

Exemple 5.3.4. Dans le cas où $d = 6$, quand le groupe diédral $I_2(d)$ est le groupe de Coxeter de type G_2, la famille $\mathscr{F}$ de caractères du groupe tordu que l'on considère ici est de cardinal 6 et la table de multiplication de l'algèbre de fusion $A_{\mathscr{F}}$ associée est donnée dans la table 5.1.

$\times$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_2	b_2	$b_1+b_3-b_5$	b_2+b_4	$b_3+b_5+b_6$	$-b_2+b_4$	b_4
b_3	b_3	b_2+b_4	$b_1+b_3+b_6$	b_2+b_4	0	b_3
b_4	b_4	$b_3+b_5+b_6$	b_2+b_4	$b_1+b_3-b_5$	b_2-b_4	b_2
b_5	b_5	$-b_2+b_4$	0	b_2-b_4	$b_1-b_3-b_5$	$-b_5$
b_6	b_6	b_4	b_3	b_2	$-b_5$	b_1

TABLE 5.1 – Table de multiplication de l'algèbre de fusion de la grosse famille de ${}^2G_2$

Si on note $(b_i^+)_{1\le i\le 6}$ la base du $\mathbb{Z}$-module avec multiplication donnée par les valeurs absolues des constantes de structures de l'anneau $A_{\mathscr{F}}$, la multiplication ainsi définie n'est pas associative. Par exemple,

$$(b_2^+b_5^+)b_3^+ = 2b_2^+ + 2b_4^+ \neq 0 = b_2^+(b_5^+b_3^+).$$

5.3.3 Le centre de Drinfeld de la catégorie des modules basculants de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$

On note $\mathscr{C}(\xi)$ la catégorie de fusion des modules basculants de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$ telle que définie dans [BK01, Section 3.3] ou dans [EGNO15, Section 8.18.2]. Rappelons que cette catégorie peut être vue comme le degré 0 de la catégorie des modules basculants de $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{sl}_2)$ étudiée dans la partie 4.3.6. La catégorie de fusion $\mathscr{C}(\xi)$ peut également être décrite en terme de représentations de niveau $d-2$ d'une algèbre de Lie affine de type A_1 avec un produit tensoriel tronqué. Une équivalence entre ces deux catégories a été donnée par Finkelberg [Fi96].

La catégorie $\mathscr{C}(\xi)$ admet $d-1$ objets simples, que l'on va noter $V_1,\ldots,V_{d-1}$, V_1 étant l'objet unité. Cette catégorie est de plus tressée et pivotale, la S-matrice est donnée par

$$S_{V_i,V_j} = \frac{\xi^{ij}-\xi^{-ij}}{\xi-\xi^{-1}},$$

et le twist θ associé à la structure pivotale par

$$\theta_{V_i\boxtimes V_j} = \xi^{(i^2-j^2)/2},$$

$\xi^{1/2}$ étant une racine carrée de ξ choisie au préalable. Dans $\mathscr{C}(\xi)$, tout objet est autodual et la structure pivotale est sphérique.

Afin de donner une catégorification de la donnée de fusion associé au groupe diédral, Lusztig considère une sous-catégorie de $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$. Cette sous-catégorie n'est pas modulaire et sa modularisation donne alors la catégorification attendue. La catégorie $\mathscr{C}(\xi)$ étant modulaire, elle est factorisable [EGNO15, Proposition 8.20.12] : son centre de Drinfeld $\mathscr{Z}(\mathscr{C}(\xi))$ est équivalent à $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$. On remarque que $\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ est équivalente à $\mathscr{C}(\xi^{-1})$. La structure pivotale et le tressage de $\mathscr{C}(\xi)$ munissent alors $\mathscr{C}$ d'une structure pivotale ainsi que d'un tressage. La S-matrice de la catégorie $\mathscr{C}$ est alors donnée par

$$S_{V_i\boxtimes V_j,V_k\boxtimes V_l} = \frac{\xi^{ik}-\xi^{-ik}}{\xi-\xi^{-1}}\frac{\xi^{jl}-\xi^{-jl}}{\xi-\xi^{-1}}$$

et le twist θ associé à la structure pivotale par

$$\theta_{V_i\boxtimes V_j} = \xi^{(i^2-j^2)/2}.$$

Remarque 5.3.5. Dans [Lu94, Section 3.8], Lusztig ne considère pas exactement la catégorie $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ mais la catégorie $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)$. Puisque $\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}\simeq\mathscr{C}(\xi^{-1})$, la S-matrice de $\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ est la conjuguée complexe de la S-matrice de $\mathscr{C}(\xi)$. Or cette dernière est à valeurs réelles, et donc les catégories $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ et $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)$ ont mêmes S-matrices.

Ce n'est absolument pas le cas du twist associé à la structure pivotale, et afin d'obtenir les valeurs propres du Frobenius sur les caractères unipotents du groupe diédral, le choix de $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ fait ici est crucial.

Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'objet simple $V_{d-1}\boxtimes V_{d-1}$ de $\mathscr{C}$. Comme V_{d-1} est de carré tensoriel isomorphe à l'unité dans $\mathscr{C}(\xi)$, il en est de même pour $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans $\mathscr{C}$. La sous-catégorie de fusion engendrée par $\boldsymbol{\varepsilon}$ est de plus égale à $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La catégorie $\mathscr{C}$ vérifie ainsi toutes les hypothèses énoncées au début de la partie 5.2. L'objet simple X est en degré nul si et seulement si $S_{\boldsymbol{\varepsilon},X} = \dim(X)$ et est en degré 1 si et seulement si $S_{\boldsymbol{\varepsilon},X} = -\dim(X)$. Comme

$$S_{\boldsymbol{\varepsilon},V_i\boxtimes V_j} = (-1)^{i+j}\dim(V_i\boxtimes V_j),$$

les objets simples de $\mathscr{C}_0$ sont les $V_i\boxtimes V_j$ avec i et j de même parité, tandis que les objets simples de $\mathscr{C}_1$ sont les $V_i\boxtimes V_j$ avec i et j de parités différentes. La catégorie $\mathscr{C}_0$ est exactement la sous-catégorie $\mathscr{C}'$ que considère Lusztig [Lu94, Section 3.8].

Dans $\mathscr{C}(\xi)$ le produit tensoriel par V_{d-1} est donné par $V_{d-1}\otimes V_j = V_{d-j}$ et ainsi dans $\mathscr{C}$, le produit tensoriel par $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donné par $\boldsymbol{\varepsilon}\otimes(V_i\boxtimes V_j) = V_{d-i}\boxtimes V_{d-j}$. La tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ admet donc un point fixe sur l'ensemble I_0 des classes d'isomorphie de $\mathscr{C}_0$ si et seulement si d est pair, l'objet fixe étant $V_{\frac{d}{2}}\boxtimes V_{\frac{d}{2}}$.

5.3.4 Modularisation de la composante de degré nul

Les seuls objets simples transparents de $\mathscr{C}_0$ sont $\mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui sont tous deux de dimension 1 et de twist 1. D'après [Br00], il existe une unique modularisation minimale $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ de $\mathscr{C}_0$, à équivalence près, ainsi qu'un foncteur monoïdal tressé $F\colon \mathscr{C}_0 \to \mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ qui respecte de plus la structure pivotale. On peut obtenir cette modularisation en ajoutant des isomorphismes entre X et $\boldsymbol{\varepsilon}\otimes X$ pour tout objet X et en prenant ensuite la complétion idempotente.

Si d est impair, comme la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'a pas de point fixe, les objets simples de $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ sont les $V_i \boxtimes V_j$ avec i et j de même parité et $0<i<j<d$ ou $0<i=j<d/2$.

Si d est pair, la situation est un peu plus complexe : la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ a pour seul point fixe $V_{\frac{d}{2}} \boxtimes V_{\frac{d}{2}}$ et cet objet se scinde alors en deux dans la modularisation $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$. Les objets simples de la modularisation sont alors les $V_i \boxtimes V_j$ avec i et j de même parité et $0<i<j<d$ ou $0<i=j<d/2$ ainsi que les deux objets supplémentaires $(V_{\frac{d}{2}} \boxtimes V_{\frac{d}{2}})_+$ et $(V_{\frac{d}{2}} \boxtimes V_{\frac{d}{2}})_-$.

Notons alors $\tilde{I}$ l'ensemble des paires d'entiers (i,j) de même parité telles que $0<i<j<d$ ou $0<i=j<d/2$ et notons par $\tilde{I}'$ l'ensemble vide si d est impair et l'ensemble constitué des deux éléments $\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+$ et $\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-$ si d est pair. Enfin, notons $\tilde{X}$ la réunion disjointe de $\tilde{I}$ et $\tilde{I}'$. On indexera la S-matrice de la catégorie $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ par $\tilde{X}$, dont on détaille les calculs esquissés par Lusztig [Lu94].

Proposition 5.3.6. *Si d est impair, la S-matrice et les valeurs du twist θ associé à la structure pivotale de la catégorie $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ sont données par*

$$S_{(i,j),(k,l)} = \frac{\xi^{ik}-\xi^{-ik}}{\xi-\xi^{-1}}\frac{\xi^{jl}-\xi^{-jl}}{\xi-\xi^{-1}} \quad \textit{et} \quad \theta_{(i,j)} = \xi^{(i^2-j^2)/2},$$

pour $(i,j),(k,l)\in\tilde{I}$.

Si d est pair, la S-matrice et les valeurs du twist θ associé à la structure pivotale de la catégorie $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ sont données par

$$S_{(i,j),(k,l)} = \frac{\xi^{ik}-\xi^{-ik}}{\xi-\xi^{-1}}\frac{\xi^{jl}-\xi^{-jl}}{\xi-\xi^{-1}},$$

pour $(i,j),(k,l)\in\tilde{I}$,

$$S_{(i,j),\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+} = S_{(i,j),\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-} = S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+,(i,j)} = S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-,(i,j)} = \frac{1}{2}\frac{\xi^{id/2}-\xi^{-id/2}}{\xi-\xi^{-1}}\frac{\xi^{jd/2}-\xi^{-jd/2}}{\xi-\xi^{-1}},$$

pour $(i,j)\in\tilde{I}$,

$$S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+,\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+} = S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-,\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-} = \frac{1}{2(\xi-\xi^{-1})^2}\left((-1)^{d/2}-1-d\right),$$
$$S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+,\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-} = S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-,\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+} = \frac{1}{2(\xi-\xi^{-1})^2}\left((-1)^{d/2}-1+d\right),$$

et

$$\theta_{(i,j)} = \xi^{(i^2-j^2)/2} \quad \textit{et} \quad \theta_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_+} = \theta_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_-} = 1,$$

pour $(i,j)\in\tilde{I}$.

Démonstration. Rappelons brièvement la construction de Müger [Mü00] de la modularisation de $\mathscr{C}_0$. Commençons par considérer la catégorie $\mathscr{D}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathscr{C}_0$ et dont les espaces de morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(X,Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(X, \boldsymbol{\varepsilon} \otimes Y).$$

On renvoie à [Mü00] pour plus de détails quant à la composition des morphismes et au produit tensoriel. Cette catégorie dispose de traces quantiques, et la remarque cruciale est la suivante : les traces quantiques d'un endomorphisme f de X provenant d'un morphisme $X \to \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ de $\mathscr{C}_0$ sont nulles. En effet, cette trace est un endomorphisme de $\mathbf{1}$ dans $\mathscr{D}$ représenté par un morphisme $\mathbf{1} \to \boldsymbol{\varepsilon}$ qui est alors nul.

La catégorie $\mathscr{D}$ n'est pas semi-simple en général, la modularisation $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ est sa complétion idempotente : ses objets sont les paires (X,e) où $e \in \mathrm{End}_{\mathscr{D}}(X)$ est un idempotent et les morphismes entre (X,e) et (Y,f) sont les $g : X \to Y$ tels que $f \circ g = g \circ e$. Cette catégorie est munie de toutes les structures supplémentaires dont dispose $\mathscr{D}$. De plus, pour tout $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}}((X,e))$ on a

$$\mathrm{Tr}_{(X,e)}^{\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}}(f) = \mathrm{Tr}_X^{\mathscr{D}}(f \circ e).$$

Le foncteur $F : \mathscr{C}_0 \to \mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ est alors simplement $X \mapsto (X, \mathrm{id}_X)$ sur les objets et l'identité sur les morphismes. Ainsi $F(X)$ est simple si et seulement si $X \not\simeq \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$. Si X est simple dans $\mathscr{C}_0$ et $X \simeq \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ alors il existe un isomorphisme $\gamma \in \mathrm{End}_{\mathscr{D}}(X)$ tel que $\gamma \circ \gamma = \mathrm{id}_X$ provenant d'un isomorphisme $X \to \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ dans $\mathscr{C}_0$. Ainsi $e_\pm = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_X \pm \gamma)$ est un idempotent de $\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(X)$ et $F(X) = X_+ \oplus X_-$ où $X_\pm = (X, e_\pm)$.

Cette description de la modularisation $\mathscr{C}_0$ permet donc de conclure quant à la valeur de $S_{(i,j),(k,l)}$ pour (i,j) et (k,l) dans $\tilde{I}$.

On suppose dorénavant que d est pair. Il ne reste plus qu'à calculer les termes de la S-matrice faisant intervenir $\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_\pm$. Si X désigne l'objet simple de $\mathscr{C}_0$ tel que $F(X) = X_+ \oplus X_-$ alors pour tout objet Y dans $\mathscr{C}_0$ on trouve

$$\mathrm{Tr}_{F(Y)\otimes X_\pm}^{\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}}(c_{X_\pm,F(Y)} \circ c_{F(Y),X_\pm}) = \mathrm{Tr}_{Y,X}^{\mathscr{D}}(c_{X,Y} \circ c_{Y,X} \circ \mathrm{id} \otimes e_\pm) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{Y,X}^{\mathscr{C}_0}(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}),$$

puisque le morphisme $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} \circ \gamma \otimes \mathrm{id}_Y$ dans $\mathscr{D}$ provient d'un morphisme $X \otimes Y \to \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \otimes Y$ qui est de trace nulle. De même,

$$\mathrm{Tr}_{X_+\otimes X_\pm}^{\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}}(c_{X_\pm,X_+} \circ c_{X_+,X_\pm}) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}_{X,X}^{\mathscr{C}_0}(c_{X,X} \circ c_{X,X} \circ (\mathrm{id}_{X\otimes X} \pm (\varphi \otimes \mathrm{id}_{X\otimes X}) \circ (\mathrm{id}_\varepsilon \otimes c_{X,\varepsilon} \otimes \mathrm{id}_X) \circ (g \otimes g))$$

et

$$\mathrm{Tr}_{X_-\otimes X_\pm}^{\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}}(c_{X_\pm,X_-} \circ c_{X_-,X_\pm}) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}_{X,X}^{\mathscr{C}_0}(c_{X,X} \circ c_{X,X} \circ (\mathrm{id}_{X\otimes X} \mp (\varphi \otimes \mathrm{id}_{X\otimes X}) \circ (\mathrm{id}_\varepsilon \otimes c_{X,\varepsilon} \otimes \mathrm{id}_X) \circ (g \otimes g)).$$

On déduit donc les valeurs attendues pour $S_{(i,j),\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_\pm}$ pour $(i,j) \in \tilde{I}$. Il ne reste que les valeurs de $S_{\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_\pm,\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)_\pm}$ à calculer. Pour simplifier, notons X l'objet $V_{\frac{d}{2}} \boxtimes V_{\frac{d}{2}}$ de $\mathscr{C}_0$. On va alors utiliser le fait que $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ est modulaire et donc que sa S-matrice et son twist donnent lieu à une représentation de $SL_2(\mathbb{Z})$. La S-matrice de $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ a donc la forme suivante :

$$S = \left(\begin{array}{c|cc} s & {}^t l & {}^t l \\ \hline l & \alpha & \beta \\ l & \beta & \alpha \end{array}\right)$$

où s est une matrice carrée que l'on a déterminée, l un vecteur ligne que l'on a aussi déterminé et α, β sont à déterminer. Les objets simples sont ordonnés de telle sorte que X_+ et X_- sont les deux derniers. On a vu que $2(\alpha+\beta)$ est égal à $S^{\mathscr{C}_0}_{X,X}$. La relation $S^2 = \dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})E$, où E est la matrice de permutation donnant la dualité, s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|cc} s^2+2{}^tl\,l & s\,{}^tl+(\alpha+\beta){}^tl & s\,{}^tl+(\alpha+\beta){}^tl \\ \hline l\,s+(\alpha+\beta)l & l\,{}^tl+\alpha^2+\beta^2 & l\,{}^tl+2\alpha\beta \\ l\,s+(\alpha+\beta)l & l\,{}^tl+2\alpha\beta & l\,{}^tl+\alpha^2+\beta^2 \end{array}\right) = \dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \gamma & \delta \\ 0 & \eta & \nu \end{array}\right),$$

où $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \eta & \nu \end{pmatrix}$ est l'identité ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ selon si les objets X_+ et X_- sont autoduaux où duaux l'un de l'autre. Dans les deux cas, ceci donne $(\alpha-\beta)^4 = \dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})^2$.

Si on note T la matrice diagonale dont les entrées sont les valeurs de l'inverse du twist sur les objets simples de $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$, on a la relation $(ST^{-1})^3 = \dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})\tau^+(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})1$. En calculant explicitement la matrice $(ST^{-1})^3$, on trouve que $\theta_X^{-3}(\alpha-\beta)^3 = \dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})\tau^+(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})$. Ainsi $\alpha-\beta = \theta_X^3\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})$. Enfin

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(S^{\mathscr{C}_0}_{X,X} + 2\theta_X^3\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})\right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4}\left(S^{\mathscr{C}_0}_{X,X} - 2\theta_X^3\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})\right).$$

Afin de conclure, il nous reste à calculer $\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})$. Pour éviter le calcul direct de cette somme, on remarque que $\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}) = \frac{1}{2}\tau^-(\mathscr{C})$. En effet, $\tau^-(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}) = \frac{1}{2}\tau^-(\mathscr{C}_0)$ et on a ensuite $\tau^-(\mathscr{C}_0) = \tau^-(\mathscr{C})$ puisque la partie $\sum_{Z\in\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_1)}\theta_Z^{\pm1}|Z|^2$ est nulle : pour $Z \in \mathrm{Irr}(\mathscr{C}_1)$, on a $\theta_{\boldsymbol{\varepsilon}\otimes Z} = -\theta_Z$ et la tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_1)$.

Mais la catégorie $\mathscr{C}$ est, par définition, égale à $\mathscr{C}(\xi)\boxtimes\mathscr{C}(\xi)^{\mathrm{rev}}$ et ainsi

$$\tau^-(\mathscr{C}) = \tau^-(\mathscr{C}(\xi))\tau^+(\mathscr{C}(\xi)) = \dim(\mathscr{C}(\xi))$$

puisque $\mathscr{C}(\xi)$ est modulaire. Il ne reste plus qu'à calculer la dimension catégorique de $\mathscr{C}(\xi)$:

$$\dim(\mathscr{C}(\xi)) = \sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{\xi^i-\xi^{-i}}{\xi-\xi^{-1}}\right) = -\frac{2d}{(\xi-\xi^{-1})^2}.$$

Finalement,

$$\alpha = \frac{1}{2(\xi-\xi^{-1})^2}\left((-1)^{d/2}-1-d\right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2(\xi-\xi^{-1})^2}\left((-1)^{d/2}-1+d\right),$$

comme attendu. □

On renormalise à présent la S-matrice en divisant par la racine carrée positive de la dimension $\dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})$ qui n'est autre que

$$\sqrt{\dim(\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}})} = \frac{1}{2}\dim(\mathscr{C}(\xi)) = -\frac{d}{(\xi-\xi^{-1})^2}.$$

La S-matrice renormalisée est alors égale à

$$\tilde{S}_{(i,j),(k,l)} = \frac{\xi^{ik-jl}+\xi^{-ik+jl}-\xi^{ik+jl}-\xi^{-ik-jl}}{d},$$

pour (i,j) et (k,l) dans $\tilde{I}$ et si de plus d est pair

$$\tilde{S}_{(i,j),(d/2,d/2)_+} = \tilde{S}_{(d/2,d/2)_+,(i,j)} = \tilde{S}_{(i,j),(d/2,d/2)_-} = \tilde{S}_{(d/2,d/2)_-,(i,j)} = \frac{1}{d}\left((-1)^{(i-j)/2} - (-1)^{(i+j)/2}\right),$$

pour $(i,j) \in \tilde{I}$ et

$$\tilde{S}_{(d/2,d/2)_+,(d/2,d/2)_+} = \tilde{S}_{(d/2,d/2)_-,(d/2,d/2)_-} = \frac{1}{2d}\left(1-(-1)^{d/2}+d\right)$$
$$\tilde{S}_{(d/2,d/2)_+,(d/2,d/2)_-} = \tilde{S}_{(d/2,d/2)_-,(d/2,d/2)_+} = \frac{1}{2d}\left(1-(-1)^{d/2}-d\right).$$

Soit $\Psi_0 \colon X \to \tilde{X}$ l'application qui envoie $(i,j) \in I$ sur $(j-i, i+j)$ et, si d est pair, $(0,d/2)'$ sur $(d/2,d/2)_+$ et $(0,d/2)''$ sur $(d/2,d/2)_-$. On vérifie facilement que Ψ_0 est bijective et que son inverse sur $\tilde{I}$ est donné par $(i,j) \mapsto \left(\frac{j-i}{2}, \frac{i+j}{2}\right)$. Le résultat suivant est dû à Lusztig [Lu94, 3.8].

Théorème 5.3.7. *La catégorie $\mathscr{C}_0^{\mathrm{mod}}$ est une catégorification de la donnée modulaire associée au groupe diédral. Plus précisément, si $\tilde{S}$ est la S-matrice correctement renormalisée de $\mathscr{C}_0^{mod}$ et si θ le twist associé à la structure pivotale,*

$$\tilde{S}_{\Psi_0(x),\Psi_0(x')} = \{x, x'\} \quad \textit{et} \quad \theta_{\Psi_0(x)} = t_x,$$

pour tous $x, x' \in X$.

5.3.5 Le degré 1 de $\mathscr{C}$

On s'intéresse désormais à la matrice $S_{0,1}$ associée à la graduation de $\mathscr{C}$ et on montre que l'on retrouve la matrice de Fourier non symétrique associée au groupe diédral tordu. Les objets simples de la catégorie $\mathscr{C}_1$ sont les $V_k \boxtimes V_l$ avec k et l de parité différente et $0 < k, l < d$. On choisit alors $\{V_k \boxtimes V_l | 0 < k < l < d, k \not\equiv l \mod 2\}$ comme représentants des orbites de $\mathrm{Irr}(\mathscr{C}_1)$ sous l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$. On note $\tilde{J}$ l'ensemble des paires d'entiers (k,l) de parité différente telle que $0 < k < l < d$.

La matrice $S_{0,1}$ est alors indexée par $\tilde{I} \times \tilde{J}$ et est égale à

$$(S_{0,1})_{(i,j),(k,l)} = \frac{\xi^{ik} - \xi^{-ik}}{\xi - \xi^{-1}} \frac{\xi^{jl} - \xi^{-jl}}{\xi - \xi^{-1}},$$

pour tous $(i,j) \in \tilde{I}$ et $(k,l) \in \tilde{J}$.

Soit $\Psi_1 \colon J \to \tilde{J}$ la fonction envoyant (k,l) sur $\left(\frac{l-k}{2}, \frac{k+l}{2}\right)$. On vérifie facilement que Ψ_1 est une bijection d'inverse donné par $(k,l) \mapsto (l-k, k+l)$.

Théorème 5.3.8. *La S-matrice $\tilde{S}_{0,1}$ convenablement renormalisée associée à la catégorie $\mathscr{C}$ contenant* $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *est la matrice de Fourier associée au groupe diédral tordu. Plus précisément, pour tous $(i,j) \in I$ et $(k,l) \in J$ on a*

$$(\tilde{S}_{0,1})_{\Psi_0(i,j),\Psi_1(k,l)} = \langle (i,j),(k,l) \rangle.$$

De plus, l'inverse de la valeur propre du Frobenius est donné par le carré du twist sur $\mathscr{C}_1$: pour tous $(k,l) \in J$ on a

$$\theta^{-2}_{\Psi_1(k,l)} = \xi^{kl}.$$

Ainsi la matrice F_1 est égale à la matrice T_0^{-1} et la matrice F_2 est égale à la matrice T_1^2. La relation [GM03, Theorem 6.9, (F6')] devient alors

$$(T_1^2 \tilde{S}_{1,0} T_0 \tilde{S}_{0,1})^2 = 1, \tag{5.3}$$

et il découle du théorème 5.2.11 que

$$(T_1^2 \tilde{S}_{1,0} T_0 \tilde{S}_{0,1})^2 = \frac{\tau^-(\mathscr{C}_0)}{\tau^+(\mathscr{C}_0)} \mathrm{id}$$

puisque la catégorie $\mathscr{C}$ est sphérique et donc $\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$. On a de plus vu que $\tau^-(\mathscr{C}_0) = \tau^+(\mathscr{C}_0)$. On retrouve donc bien la relation (5.3).

Remarque 5.3.9. Dans [GM03, Section 7], Geck et Malle construisent un anneau R, quotient de l'anneau de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{C}$, qui est l'anneau de fusion associé à la matrice de Fourier associé au groupe diédral tordu. Néanmoins, l'anneau R qu'ils construisent n'est pas libre sur $\mathbb{Z}$ puisqu'il contient de la 2-torsion. Dans notre construction, la 2-torsion n'est plus présente, puisque l'objet simple annihilé par 2 correspond exactement à l'objet simple de $\mathscr{C}_0$ fixe par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$.

5.4 Double de Drinfeld d'un produit semi-direct $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ici, on donne un autre exemple de catégorie contenant $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, à savoir le double de Drinfeld d'un produit semi-direct. Ceci permet de réexpliquer certains ensembles considérés par Lusztig dans [Lu84] ainsi que certaines matrices de Fourier associées aux groupes de type ${}^2A_n$, ${}^2E_6$ ou encore ${}^3D_4$.

Fixons à présent un groupe fini G muni d'une action d'un automorphisme F d'ordre n et considérons le groupe $\tilde{G} = G \rtimes \langle F \rangle$. Il admet G comme sous-groupe distingué et on note π le morphisme quotient $\tilde{G} \to \langle F \rangle$. On se retrouve en présence de la suite exacte

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

On fixe ζ une racine primitive n-ième de l'unité, et on note ε la représentation de dimension 1 de $\tilde{G}$ triviale sur G envoyant F sur ζ.

5.4.1 Un élément de puissance tensorielle triviale dans $D(\tilde{G})$-mod et la graduation qui s'en suit

Rappelons que les objets simples de $D(\tilde{G})$-mod sont indexés par les paires (g, χ) où $g \in \tilde{G}$ et χ est un caractère irréductible de $Z_{\tilde{G}}(g)$, le centralisateur de g dans $\tilde{G}$, ceci à conjugaison près. La représentation $V_{g,\chi}$ a pour support $[g]$.

Ici, on dispose d'une représentation irréductible ε de $\tilde{G}$ qui est de puissance tensorielle n-ième triviale. Il en est alors de même pour la représentation $V_{1,\varepsilon}$ que l'on va à présent noter $\boldsymbol{\varepsilon}$. Cet élément munit alors la catégorie $D(\tilde{G})$-mod d'une graduation par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on décrit à présent.

Lemme 5.4.1. *La composante de degré k de $D(\tilde{G})$-mod a pour objets ceux dont le support est contenu dans GF^k.*

Démonstration. Soit X un $D(\tilde{G})$-module. Le morphisme $c_{\boldsymbol{\varepsilon},X} \colon \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \to X \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ est égal à

$$c_{\boldsymbol{\varepsilon},X}(e \otimes x) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \sum_{g \in GF^k} (e_g x \otimes e),$$

tandis que le morphisme $c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}} \colon X \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ est égal à

$$c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}}(x \otimes e) = e \otimes x.$$

Ainsi le double tressage est

$$c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}} \circ c_{\boldsymbol{\varepsilon},X}(e \otimes x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{g \in GF^k} \zeta^k (e \otimes e_g x)$$

ce qui permet de conclure. □

Afin de poursuivre l'étude de la catégorie $D(\tilde{G})$-mod munie de la graduation donnée par $\boldsymbol{\varepsilon}$, on s'intéresse aux objets simples de degré 0 qui ont un stablilisateur non trivial pour l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$. Les objets simples de la composante de degré 0 sont ceux dont le support est contenu dans G c'est-à-dire ceux de la forme $V_{g,\chi}$ avec $g \in G$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(Z_{\tilde{G}}(g))$.

Proposition 5.4.2. *Pour tout $g \in G$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(Z_{\tilde{G}}(g))$, l'objet simple $V_{g,\chi}$ a un stablilisateur non trivial pour l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ si et seulement si $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF = \emptyset$ ou $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF \neq \emptyset$ et $\mathrm{Res}^{Z_{\tilde{G}}(g)}_{Z_G(g)}(\chi)$ n'est pas irréductible.*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{g,\chi} \simeq V_{g,\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{Z_{\tilde{G}}(g)}(\boldsymbol{\varepsilon})\otimes\chi}$. Ainsi $V_{g,\chi}$ est stable par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes k}$ si et seulement si $\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{Z_G(g)}(\varepsilon^k) \otimes \chi = \chi$. Comme ε est trivial sur G, il ne reste plus qu'à s'intéresser au cas où $Z_{\tilde{G}}(g) \not\subset G$.

Supposons en premier lieu que $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF = \emptyset$. On note alors $m \geq 2$ le plus petit entier tel que $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF^m \neq \emptyset$. Cet entier divise alors n, et on écrit $n = km$. Il est alors clair que $\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{Z_G(g)}(\varepsilon^k) = 1$ et donc que $\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes k} \otimes V_{g,\chi} \simeq V_{g,\chi}$. Ainsi si $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF \neq \emptyset$, le stabilisateur de $V_{g,\chi}$ pour l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ est non trivial.

Désormais on suppose que $Z_{\tilde{G}}(g) \cap GF \neq \emptyset$. Le groupe quotient $Z_{\tilde{G}}(g)/Z_G(g)$ est alors cyclique d'ordre n. On a alors

$$\sum_{l=0}^{n-1} \langle \mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{Z_{\tilde{G}}(g)}(\varepsilon^k) \otimes \chi, \chi \rangle = \langle \mathrm{Res}^{Z_{\tilde{G}}(g)}_{Z_G(g)}(\chi), \mathrm{Res}^{Z_{\tilde{G}}(g)}_{Z_G(g)}(\chi) \rangle,$$

comme on le voit en décomposant $Z_{\tilde{G}}(g)$ comme union disjointe des classes à gauche pour le sous-groupe $Z_G(g)$. Ainsi $V_{g,\chi}$ a un stabilisateur non trivial pour l'action de tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ si et seulement s'il existe $0 < k < n$ tel que $\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{Z_{\tilde{G}}(g)}(\varepsilon^k) \otimes \chi = \chi$ si et seulement si $\mathrm{Res}^{Z_{\tilde{G}}(g)}_{Z_G(g)}(\chi)$ n'est pas trivial. □

5.4.2 Lien avec le double de Drinfeld de G

La graduation obtenue sur la catégorie $D(\tilde{G})$-mod a un lien avec la catégorie $D(G)$-mod. Comme la catégorie $D(\tilde{G})$-mod est modulaire, les seuls objets simples transparents dans la composante de degré 0 de $D(\tilde{G})$-mod sont les puissances de $\boldsymbol{\varepsilon}$, qui sont tous de dimension 1 et de twist 1, et la modularisation de $(D(\tilde{G})\text{-mod})_0$ existe alors.

Proposition 5.4.3. *La modularisation de la composante de degré* 0 *de* $D(\tilde{G})$-mod *est la catégorie modulaire* $D(G)$-mod.

Démonstration. On dispose d'un foncteur $R\colon (D(\tilde{G})\text{-mod})_0 \to D(G)\text{-mod}$ défini par restriction. Plus précisément, on dispose d'une algèbre de Hopf $D_{\tilde{G}}(G)$ obtenue comme produit semi-direct $\mathbb{C}[\tilde{G}] \rtimes \mathbb{C}G$, le groupe G agissant bien évidemment sur G par conjugaison (cf. [Wi96, Section 2] pour un cas plus général). Les trois algèbres $D(G)$, $D(\tilde{G})$ et $D_{\tilde{G}}(G)$ sont reliées comme suit

$$\begin{tikzcd} & D_{\tilde{G}}(G) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ D(G) & & D(\tilde{G}) \end{tikzcd}$$

avec π envoyant $g \in G$ sur g et $e_g, g \in \tilde{G}$, sur e_g si $g \in G$ et sur 0 sinon et ι envoyant $g \in G$ sur g et $e_g, g \in \tilde{G}$, sur e_g.

Les représentations de $D_{\tilde{G}}(G)$ passant au quotient par π sont celles dont le support est inclus dans G. Ainsi, la restriction d'une représentation de $(D(\tilde{G})\text{-mod})_0$ à $D_{\tilde{G}}(G)$ passe au quotient et devient une représentation de $D(G)$, et ceci définit le foncteur R. Ce foncteur est bien évidemment tensoriel, et respecte à la fois le tressage et le twist. Comme la catégorie $D(G)$-mod est modulaire, il ne reste plus qu'à voir que le foncteur R est dominant au sens de [Br00, Section 2.1].

Pour cela, il suffit de montrer que tout objet simple de $D(G)$-mod est facteur direct d'un objet de la forme $R(X)$. Soit $g \in G$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(Z_G(g))$ et considérons l'objet simple $V_{g,\chi}$ de la catégorie $D(G)$-mod. On choisit $\tilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(Z_{\tilde{G}}(g))$ tel que χ soit un facteur direct irréductible de $\mathrm{Res}^{Z_{\tilde{G}}(g)}_{Z_G(g)}(\tilde{\chi})$. On vérifie aisément que $R(V_{g,\tilde{\chi}})$ admet $V_{g,\chi}$ comme facteur direct. □

5.4.3 Lien avec les matrices de Fourier des groupes tordus

Dans [Lu84, 4.16], Lusztig considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des paires (g,χ) où $g \in \tilde{G}$ est tel que la classe de conjugaison de g rencontre GF et χ est une représentation irréductible de $Z_{\tilde{G}}(g)$ dont la restriction à $Z_G(g)$ est encore irréductible, à conjugaison près.

Il considère également l'ensemble $\mathscr{M}'$ des paires (g,χ) où $g \in GF$ et χ est une représentation irréductible de $Z_{\tilde{G}}(g)$, toujours à conjugaison près. Enfin, il considère un troisième ensemble $\overline{\mathscr{M}}$ constitué des paires $(g,\overline{\chi})$ où $g \in \tilde{G}$ d'un élément $g \in GF$ et $\overline{\chi}$ est une représentation de $Z_G(g)$, à conjugaison près. Enfin, pour donner une interprétation des matrices de Fourier des familles de caractères unipotents de groupes tordus par un automorphisme du diagramme de Dynkin, il considère la matrice

$$\{(g,\overline{\chi}),(h,\tau)\} = n\tilde{S}_{V_{g,\chi^*},V_{h,\tau}},$$

où $(g,\overline{\chi}) \in \overline{\mathscr{M}}$, $(h,\tau) \in \mathscr{M}$, χ est une extension de $\overline{\chi}$ à $Z_{\tilde{G}}(g)$ et $\tilde{S}$ est la S-matrice renormalisée de la catégorie $D(\tilde{G})$-mod.

Proposition 5.4.4. *L'ensemble $\mathcal{M}$ est en bijection avec l'ensemble $I_{0,n}$ des objets simples de la catégorie $(D(\tilde{G})\text{-mod})_0$ qui ont un stabilisateur trivial sous l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$.*

L'ensemble $\overline{\mathcal{M}}$ correspond à un choix de représentants de l'ensemble I_1 des objets simples de la catégorie $(D(\tilde{G})\text{-mod})_1$ sous l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Lusztig remarque effectivement que le choix de représentants de I_1 ne modifie pas la S-matrice $S_{0,1}$. Le choix de représentants de $I_{0,n}$ n'est pas fait chez Lusztig, mais il considère des fonctions sur $I_{0,n}$ qui sont compatibles à l'action de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (cf. l'ensemble $\mathcal{P}_c$ tel que défini dans [Lu84, 4.16]).

5.5 Double de Drinfeld d'une extension centrale par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Fixons à présent un groupe fini G et considérons une extension centrale $\tilde{G}$ de G par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cette fois-ci, on se retrouve en présence de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$

On note z l'élément central de $\tilde{G}$ correspondant à un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Remarquons que z est un élément central du double de Drinfeld $D(\tilde{G})$. On fixe également une racine primitive n-ième de l'unité ζ.

5.5.1 Un élément de puissance tensorielle triviale dans $D(\tilde{G})$-mod et la graduation qui s'en suit

Les objets simples de $D(\tilde{G})$-mod ayant été rappelés à la partie 5.4.1, comme l'élément z est central, il est clair que l'objet simple $V_{z,\mathbf{1}}$ est un élément d'ordre n pour la puissance tensorielle, $\mathbf{1}$ désignant ici la représentation triviale de $\tilde{G}$. On note alors cet objet $\boldsymbol{\varepsilon}$. La sous-catégorie engendrée par $\boldsymbol{\varepsilon}$ est alors égale à Rep($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). On munit ainsi $D(\tilde{G})$-mod d'une graduation par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on décrit à présent.

Lemme 5.5.1. *La composante de degré i de $D(\tilde{G})$-mod a pour objets ceux sur lesquels l'élément central z agit par ζ^i id.*

Démonstration. Soit X un $D(\tilde{G})$-module. Le morphisme $c_{\boldsymbol{\varepsilon},X} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X \to X \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ est égal à

$$c_{\boldsymbol{\varepsilon},X}(e \otimes x) = \sum_{g \in \tilde{G}} (\delta_g x \otimes e) = x \otimes e$$

tandis que le morphisme $c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}} : X \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{\varepsilon} \otimes X$ est égal à

$$c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}}(x \otimes e) = e \otimes z \cdot x.$$

Le double tressage $c_{X,\boldsymbol{\varepsilon}} \circ c_{\boldsymbol{\varepsilon},X}$ est donc donné par l'action de z sur la seconde tensorande, ce qui permet de conclure. □

Comme dans la partie précédente, on a besoin de comprendre les objets simples dont le stabilisateur pour l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ est non trivial, ceci afin d'enlever des colonnes ou lignes nulles des matrices extraites de la S-matrice de la catégorie $D(\tilde{G})$-mod.

Proposition 5.5.2. *Pour tout $g \in \tilde{G}$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(Z_{\tilde{G}}(g))$ tel que $\chi(z) = \chi(1)$, l'objet simple $V_{g,\chi}$ est stable par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ si et seulement si $[g] = [zg]$ et $\chi = {}^r\chi$ où $r \in G$ est tel que $zg = rgr^{-1}$.*

Démonstration. Le module $V_{g,\chi}$ est supporté par la classe de conjugaison $[g]$ de g dans G, donc $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{g,\chi}$ est supporté par $z[g] = [zg]$ et donc est de la forme $V_{zg,\psi}$ pour $\psi \in \mathrm{Irr}(Z_G(zg))$. Il est immédiat que $\psi = \chi$ puisque z agit par l'identité sur $V_{g,\chi}$. On a donc un isomorphisme $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{g,\chi} \simeq V_{zg,\chi}$. Si $[h] = [k]$, on a un isomorphisme entre $V_{h,\gamma}$ et $V_{k,{}^t\gamma}$ où t est tel que $h = tkt^{-1}$, ce qui permet de conclure. □

5.5.2 Lien avec le double de Drinfeld de G

Exactement comme dans la situation de la partie 5.4, la catégorie $D(\tilde{G})$-mod a un lien fort avec la catégorie $D(G)$-mod, que l'on comprend avec la graduation donnée par l'objet $\boldsymbol{\varepsilon}$. La catégorie $D(\tilde{G})$-mod est modulaire donc les seuls objets simples transparents dans la composante de degré 0 de $D(\tilde{G})$-mod sont les puissances tensorielles de $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui sont toutes de dimension 1 et de twist 1.

Proposition 5.5.3. *La modularisation de la composante de degré* 0 *de* $D(\tilde{G})$-mod *est la catégorie modulaire* $D(G)$-mod.

Démonstration. Cette fois, on obtient un foncteur $Q : (D(\tilde{G})\text{-mod})_0 \to D(G)$-mod est obtenu par quotient. Plus précisément, les trois algèbres $D(\tilde{G})$, $D(G)$ et $D_{\tilde{G}}(G)$ sont reliées comme suit

$$\begin{tikzcd} & D_{\tilde{G}}(G) & \\ D(\tilde{G}) \arrow[ur, "\pi"] & & D(G) \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

avec π envoyant $g \in \tilde{G}$ sur $\pi(g)$ et $\delta_g, g \in \tilde{G}$ sur δ_g et ι envoyant $g \in G$ sur g et $\delta_g, g \in G$ sur $\sum_{k \in \pi^{-1}(g)} \delta_k$.

Une représentation de $D(\tilde{G})$ passe au quotient $D_{\tilde{G}}(G)$ si et seulement si l'élément central z agit par id. On obtient donc un foncteur $F : (D(\tilde{G})\text{-mod})_0 \to D(G)$-mod par quotient suivi de restriction. Ce foncteur est bien évidemment tensoriel, et respecte à la fois le tressage et le twist. Comme la catégorie $D(G)$-mod est modulaire, il ne reste plus qu'à voir que le foncteur Q est dominant au sens de [Br00, Section 2.1].

Pour cela, il suffit de montrer que tout objet simple de $D(G)$-mod est facteur direct d'un objet de la forme $Q(X)$. Soit $g \in G$ et χ un caractère irréductible de $Z_G(g)$. On choisit $\tilde{g}$ dans $\pi^{-1}(g)$. Le morphisme quotient π se restreint alors en un morphisme de groupes $Z_{\tilde{G}}(\tilde{g}) \to Z_G(g)$, qui n'est pas nécessairement surjectif. Ceci nous permet de voir χ comme une représentation de $Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})$, qui n'est pas nécessairement irréductible. On choisit alors $\tilde{\chi}$ un facteur direct simple de χ, vu comme représentation de $Z_{\tilde{G}}(\tilde{g})$. L'élément central z agit nécessairement trivialement sur $\tilde{\chi}$. Le module simple $V_{g,\chi}$ apparaît alors comme facteur direct de $Q(V_{\tilde{g},\tilde{\chi}})$. □

5.5.3 ${}^2F_4$ et le double de Drinfeld de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$

Tout comme pour les groupes de Suzuki de type ${}^2B_2$ et de Ree de type ${}^2G_2$, on dispose de matrices de Fourier pour les familles du groupe de Ree de type ${}^2F_4$. La matrice de Fourier de la grande famille de ${}^2F_4$ telle que décrite dans [GM03] s'interprète alors en considérant une extension centrale de $\mathfrak{S}_4$.

Une matrice de Fourier pour ${}^2F_4$

On ne considère que la grosse famille de ${}^2F_4$ qui est de cardinal 13. La matrice de Fourier de cette famille est donnée par

$$\mathbb{S} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}
3 & 3 & 6 & -6 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -8 \\
-6 & -6 & 0 & -4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\
3 & 3 & 6 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\
3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & -6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -3 & 6 & -2 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & 3 & -4 & -4 & -4 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 4 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 4 \\
3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

L'ordre des lignes et des colonnes n'est pas ici celui de [GM03, Theorem 5.4], mais celui choisi dans le paquet CHEVIE de GAP. On dispose également des matrices F_1 et F_2, comme pour les groupes diédraux tordus (cf. partie 5.3.2) :

$$F_1 = \operatorname{diag}(1,1,1,1,1,\zeta_4,-\zeta_4,-1,1,1,\zeta_3,\zeta_3^2,-1)$$

et

$$F_2 = \operatorname{diag}(1,1,1,-1,-1,-1,-\zeta_4,\zeta_4,\zeta_4,-\zeta_4,-\zeta_3,-\zeta_3^2,-1).$$

Proposition 5.5.4 ([GM03, Theorem 6.9])**.** *La matrice S est unitaire et pour tout $i,j,k \in \{1,\dots,13\}$, le réel*

$$N_{i,j}^k = \sum_{l=1}^{13} \frac{\mathbb{S}_{i,l}\mathbb{S}_{j,l}\overline{\mathbb{S}_{k,l}}}{\mathbb{S}_{4,l}}$$

est un entier et $(F_2\mathbb{S}F_1^{-1}\mathbb{S})^2 = \mathrm{id}$.

La condition d'unitarité de $\mathbb{S}$ implique que les entiers $N_{i,j}^k$ permettent de définir une $\mathbb{Z}$-algèbre unitaire et associative, de base $(b_i)_{1\le i\le 13}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module et dont la multiplication est donnée par

$$b_i \cdot b_j = \sum_{l=1}^{13} N_{i,j}^k b_k,$$

l'élément neutre étant alors donné par b_4.

La matrice $S_{0,1}$ pour $\mathfrak{S}_4$

On considère comme groupe G le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Ce dernier admet quatre extensions centrales par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non isomorphes, puisque $H^2(G;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On travaille avec l'extension centrale non triviale $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ telle que décrite dans [HH92, Theorem 2.8]. Il s'agit du groupe binaire octaédral et une présentation en est donnée par

$$\tilde{\mathfrak{S}}_4 = \left\langle z, t_1, t_2, t_3 \;\middle|\; z^2 = 1, t_i^2 = z, (t_1t_2)^3 = z, (t_2t_3)^3 = z, (t_1t_3)^2 = z \right\rangle.$$

L'élément z est central et on a un morphisme quotient $\pi\colon \tilde{\mathfrak{S}}_4 \to \mathfrak{S}_4$ en quotientant par le sous-groupe distingué $\{1, z\}$ qui envoie le générateur t_i sur la transposition $(i\ i+1)$. Les classes de conjugaison de ce groupe sont données par [HH92, Theorem 3.8], et des représentants sont donnés par les éléments suivants

$$1, z, t_1, t_1t_3, t_1t_2, zt_1t_2, t_1t_2t_3, zt_1t_2t_3.$$

Afin d'obtenir les modules simples du double de Drinfeld de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$, on a également besoin de connaître la structure des centralisateurs des éléments mentionnés ci-dessus. Ce calcul, mené à l'aide de GAP, nous donne

$$Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(1) = Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(z) = \tilde{\mathfrak{S}}_4, Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1t_3) = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1t_2) = Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(zt_1t_2) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$
$$\text{et}\quad Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1t_2t_3) = Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(zt_1t_2t_3) \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

La table des caractères de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ est donnée dans la table 5.2 et provient de [HH92, Table 4.7].

	1	z	t_1	t_1t_3	t_1t_2	zt_1t_2	$t_1t_2t_3$	$zt_1t_2t_3$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1
ε	1	1	−1	1	1	1	−1	−1
χ_2	2	2	0	2	−1	−1	0	0
χ_3	3	3	1	−1	0	0	−1	−1
χ_3'	3	3	−1	−1	0	0	1	1
ψ_2	2	−2	0	0	1	−1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
ψ_2'	2	−2	0	0	1	−1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
ψ_4	4	−4	0	0	−1	1	0	0

TABLE 5.2 – Table de caractères de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$

Tous les autres centralisateurs étant cycliques, on déduit qu'il y a 56 $D(G)$-modules simples. Introduisons quelques notations pour les décrire. On choisit ζ_k une racine primitive k-ième de l'unité pour $k \in \{4, 6, 8\}$. L'ensemble $\operatorname{Irr}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ sera identifié à $\{\zeta_k^r \mid r \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\}$, toujours pour $k \in \{4, 6, 8\}$. En ce qui concerne les représentations de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$, on se réfère à la table de caractères 5.2.

L'élément $\boldsymbol{\varepsilon}$ est d'ordre 2 et la catégorie $D(G)$-mod est graduée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On obtient 30 objets simples de degré 0 indexés par

$$(1,\mathbf{1}),(1,\varepsilon),(1,\chi_2),(1,\chi_3),(1,\chi_3'),(z,\mathbf{1}),(z,\varepsilon),(z,\chi_2),(z,\chi_3),(z,\chi_3'),$$
$$(t_1,1),(t_1,-1),(t_1t_3,1),(t_1t_3,\zeta_8^2),(t_1t_3,\zeta_8^4),(t_1t_3,\zeta_8^6),(t_1t_2,1),(t_1t_2,\zeta_6^2),(t_1t_2,\zeta_6^4),$$
$$(zt_1t_2,1),(zt_1t_2,\zeta_6^2),(zt_1t_2,\zeta_6^4),(t_1t_2t_3,1),(t_1t_2t_3,\zeta_8^2),(t_1t_2t_3,\zeta_8^4),(t_1t_2t_3,\zeta_8^6),$$
$$(zt_1t_2t_3,1),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^2),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^4),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^6),$$

et 26 en degré 1 indexés par

$$(1,\psi_2),(1,\psi_2'),(1,\psi_4),(z,\psi_2),(z,\psi_2'),(z,\psi_4),(t_1,\zeta_4),(t_1,\zeta_4^3),$$
$$(t_1t_3,\zeta_8),(t_1t_3,\zeta_8^3),(t_1t_3,\zeta_8^5),(t_1t_3,\zeta_8^7),(t_1t_2,\zeta_6),(t_1t_2,\zeta_6^3),(t_1t_2,\zeta_6^5),$$
$$(zt_1t_2,\zeta_6),(zt_1t_2,\zeta_6^3),(zt_1t_2,\zeta_6^5),(t_1t_2t_3,\zeta_8),(t_1t_2t_3,\zeta_8^3),(t_1t_2t_3,\zeta_8^5),(t_1t_2t_3,\zeta_8^7),$$
$$(zt_1t_2t_3,\zeta_8),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^3),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^5),(zt_1t_2t_3,\zeta_8^7).$$

On a vu que les modules simples fixes par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont les $V_{g,\chi}$ avec $[zg] = [g]$, $\chi(z) = \chi(1)$ et ${}^{r}\chi = \chi$ où $r \in G$ est tel que $zg = rgr^{-1}$. Seules les classes de conjugaison de t_1 et $t_1 t_3$ satisfont la première condition.

Commençons par l'étude des représentations de la forme $V_{t_1,\chi}$. Le centralisateur $Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et a pour générateur t_1. On vérifie que $t_3 t_1 t_3^{-1} = z t_1$ et donc on cherche les représentations irréductibles χ de $Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1)$ satisfaisant à la fois $\chi(z) = \chi(1)$ et ${}^{t_3}\chi = \chi$. La première condition est vérifiée pour $\chi = \mathbf{1}$ ou $\chi = \zeta_4^2$ et il en est de même pour la seconde, la conjugaison par t_3 envoyant t_1 sur t_1^{-1}. On obtient alors deux $D(\tilde{\mathfrak{S}}_4)$-modules simples fixes par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Passons maintenant au cas des modules de la forme $V_{t_1 t_3,\chi}$. Le centralisateur $Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1 t_3)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et a pour générateur $h = t_1 t_2 t_1 t_3 t_2$. On vérifie que $t_3 t_1 t_3 t_3^{-1} = z t_1 t_3$ et donc on cherche les représentations irréductibles χ de $Z_{\tilde{\mathfrak{S}}_4}(t_1)$ satisfaisant à la fois $\chi(z) = \chi(1)$ et ${}^{t_3}\chi = \chi$. La première condition est vérifiée pour $\chi = \zeta_8^k$ avec k pair et la conjugaison par t_3 envoyant h sur h^7, seuls $\chi = 1$ et $\chi = \zeta_8^4$ satisfont la seconde condition. On obtient alors deux autres $D(\tilde{\mathfrak{S}}_4)$-modules simples fixes par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Finalement, il existe 4 point fixes sur $\mathrm{Irr}(D(\tilde{\mathfrak{S}}_4)_0)$, conformément à la proposition 5.2.6. Il reste maintenant à donner les orbites non triviales sous l'action par tensorisation par $\boldsymbol{\varepsilon}$ afin d'obtenir la matrices $S_{0,1}$.

On a les isomorphismes suivants en degré 0 :

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\mathbf{1}} \simeq V_{z,\mathbf{1}}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\varepsilon} \simeq V_{z,\varepsilon}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\chi_2} \simeq V_{z,\chi_2}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\chi_3} \simeq V_{z,\chi_3}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\chi_3'} \simeq V_{z,\chi_3'}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_3,\zeta_8^2} \simeq V_{t_1 t_3,\zeta_8^6}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,1} \simeq V_{z t_1 t_2,1}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,\zeta_6^2} \simeq V_{z t_1 t_2,\zeta_6^2}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,\zeta_6^4} \simeq V_{z t_1 t_2,\zeta_6^4}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,1} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,1}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^2} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^2}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^4} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^4}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^6} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^6}, & &
\end{array}
$$

et on a les isomorphismes suivants en degré 1

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\psi_2} \simeq V_{z,\psi_2}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\psi_2'} \simeq V_{z,\psi_2'}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{1,\psi_4} \simeq V_{z,\psi_4}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1,\zeta_4} \simeq V_{t_1,\zeta_4^3}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_3,\zeta_8} \simeq V_{t_1 t_3,\zeta_8^7}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_3,\zeta_8^3} \simeq V_{t_1 t_3,\zeta_8^5}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,\zeta_6} \simeq V_{z t_1 t_2,\zeta_6}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,\zeta_6^3} \simeq V_{z t_1 t_2,\zeta_6^3}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2,\zeta_6^5} \simeq V_{z t_1 t_2,\zeta_6^5}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^3} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^3}, & \boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^5} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^5}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} \otimes V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^7} \simeq V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^7}, & &
\end{array}
$$

On fait alors les choix suivants de représentants d'orbites en degré 0 :

$$
V_{z,\chi_3}, V_{t_1 t_2,1}, V_{z,\chi_2}, V_{1,\mathbf{1}}, V_{z t_1 t_2 t_3,1}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^6}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^2}, V_{t_1 t_3,\zeta_8^6}, V_{z,\chi_3'}, V_{z,\varepsilon}, V_{t_1 t_2,\zeta_6^4}, V_{t_1 t_2,\zeta_6^2}, V_{z t_1 t_2 t_3,\zeta_8^4}
$$

et les choix suivants en degré 1 :

$$
V_{t_1 t_3,\zeta_8}, V_{t_1 t_3,\zeta_8^3}, V_{t_1,\zeta_4}, V_{1,\psi_4}, V_{1,\psi_2'}, V_{1,\psi_2}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^5}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^3}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8^7}, V_{t_1 t_2 t_3,\zeta_8}, V_{z t_1 t_2,\zeta_6}, V_{z t_1 t_2,\zeta_6^5}, V_{z t_1 t_2,\zeta_6^3}.
$$

Avec ces choix et cet ordre, on obtient

$$S_{0,1} = \begin{pmatrix}
6 & 6 & 12 & -12 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & -16 \\
-12 & -12 & 0 & -8 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \\
6 & 6 & 12 & 4 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\
6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 6 & -12 & -12 & -6 & -6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & -6 & 12 & -4 & -2 & -2 & 6 & 6 & 6 & 6 & -8 & -8 & -8 \\
0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -16 & 8 \\
0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & 8 \\
6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 0 & 0 & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

et les matrices T_0 et T_1^2 données par l'inverse de la valeur du twist sont

$$T_0 = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 1, \zeta_4, -\zeta_4, -1, 1, 1, \zeta_3, \zeta_3^2, -1),$$

et

$$T_1^2 = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1, -\zeta_4, \zeta_4, \zeta_4, -\zeta_4, \zeta_3^2, \zeta_3, 1).$$

La catégorie $D(G)$-mod est sphérique, donc l'objet $\bar{1}$ est l'objet unité $\mathbf{1}$. Enfin, on renormalise $S_{0,1}$ d'un facteur 24 qui n'est autre que la racine carrée positive de $\frac{\dim((D(G)\text{-mod})_0)}{2}$, et on note $\tilde{S}_{0,1}$ la matrice $\frac{S_{0,1}}{24}$.

Théorème 5.5.5. *La matrice $\tilde{S}_{0,1}$ est égale à la matrice de Fourier du groupe ${}^2F_4$. De plus, la matrice T_1^2 est égale à l'opposée de la matrice diagonale des valeurs propres du Frobenius. Plus précisément, on a :*

$$\tilde{S}_{0,1} = \mathbb{S}, \; F_1 = T_0 \quad \textit{et} \quad F_2 = -T_1^{-2}.$$

Ce théorème donne une autre preuve de [GM03, Theorem 6.9, (F5), (F6)'] qui ne repose pas sur le calcul explicite des constantes de structure ou du produit $(F_2 \mathbb{S} F_1^{-1} \mathbb{S})^2$.

Remarque 5.5.6. L'apparition du groupe $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ reste surprenante, mais pas celle de $\mathfrak{S}_4$. Il existe en effet une classe unipotente dans le groupe réductif $F_4(\mathbb{C})$ dont le groupe des composantes connexes du centralisateur est $\mathfrak{S}_4$, celle qui est dénotée $F_4(a_3)$ dans [Ca85, Section 13.3], et qui est la classe spéciale associée à la famille correspondante de caractères unipotents.

Chapitre 6

Catégorification de données modulaires associées aux groupes exceptionnels

Terminons par des catégorifications de données modulaires associées aux groupes de réflexions complexes exceptionnels, comme décrits dans la partie 2.3. Les catégorifications de ces données modulaires font apparaître diverses catégories : des catégories de représentations des quasi-algèbres de Hopf $D^{\omega}(G)$, des catégories liées aux diverses constructions du chapitre 4. On ne décrit que les familles qui ne proviennent pas d'un sous-groupe parabolique et sont regroupées ensemble les données modulaires dont les catégorifications font intervenir des catégories similaires. On ne traite pas non plus le cas où le groupe de réflexions complexes exceptionnel est un groupe de Weyl de type F_4, E_6, E_7 ou E_8, les données modulaires correspondant aux familles de caractères unipotents ont toutes dans ce cas une catégorification par $D(G)$ où G est un groupe fini parmi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_5$ sauf pour une famille de E_7 et deux de E_8 où le double de Drinfeld tordu $D^{\omega}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ apparaît.

Les groupes de réflexions complexes exceptionnels sont numérotés selon la classification de Shephard-Todd [ST54].

6.1 Des catégorifications par des doubles de Drinfeld tordus $D^{\omega}(G)$

En ce qui concerne les double de Drinfeld tordus, on se réfère à l'annexe A.

6.1.1 La quatrième famille de G_{14}, la dixième famille de G_{32} et la vingt-huitème famille de G_{34}

Notons ζ_9 une racine primitive neuvième de l'unité et $\zeta_3 = \zeta_9^3$. La matrice de Fourier de la quatrième famille de caractères unipotents de G_{14} et de la vingt-huitème famille de G_{34}

est donnée par

$$S_{14-4} = S_{34-28} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8 \\ 1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7 \\ 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 \\ 1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5 \\ 1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4 \\ 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 \\ 1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2 \\ 1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont

$$\mathrm{Fr}_{14-4}\,\mathrm{Fr}_{34-28} = \mathrm{diag}\big(1, \zeta_9^5, \zeta_9^2, 1, \zeta_9^8, \zeta_9^8, 1, \zeta_9^2, \zeta_9^5\big),$$

et l'élément spécial est en première position.

En ce qui concerne la dixième famille de G_{32}, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius sont les mêmes, mais l'élément spécial est en septième position.

Commençons par donner une explication à la donnée modulaire associée à la quatrième famille de G_{14}. On choisit comme groupe G le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et on prend pour ω le cocycle non trivial donné par

$$\omega(a,b,c) = \zeta_3^{a\lfloor \frac{b+c}{3} \rfloor} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le b+c < 3, \\ \zeta_3^{-a} & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $0 \le a, b, c < 3$. On identifiera les représentations (linéaires ou projectives) de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à leur valeur en l'élément 1.

Le cocycle θ_0 est trivial, on dispose de trois représentations simples $V_{0,1}$, V_{0,ζ_3} et V_{0,ζ_3^2}. Le cocycle θ_1 est donné par

$$\theta_1(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le a+b < 3, \\ \zeta_3^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et ceci fournit donc trois autres représentations simples de $D^\omega(G)$ que l'on note V_{1,ζ_9^2}, V_{1,ζ_9^5} et V_{1,ζ_9^8}. Enfin, le cocyle θ_2 est donné par

$$\theta_2(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le a+b < 3, \\ \zeta_3 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et ceci fournit les trois dernières représentations simples de $D^\omega(G)$ que l'on note V_{2,ζ_9}, V_{2,ζ_9^4} et V_{2,ζ_9^7}. En choisissant

$$V_{0,1}, V_{1,\zeta_9^5}, V_{2,\zeta_9}, V_{0,\zeta_3}, V_{1,\zeta_9^8}, V_{2,\zeta_9^4}, V_{0,\zeta_3^2}, V_{1,\zeta_9^2}, V_{2,\zeta_9^7}$$

comme ordre pour les objets simples, la S-matrice de la catégorie $D^{\omega}(G)$-mod est alors

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8 \\
1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7 \\
1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 \\
1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5 \\
1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4 \\
1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 \\
1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2 \\
1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9
\end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}\left(1, \zeta_9^5, \zeta_9^2, 1, \zeta_9^8, \zeta_9^8, 1, \zeta_9^2, \zeta_9^5\right)$$

En renormalisant la S-matrice par un facteur 3, on retrouve bien la matrice de Fourier de la quatrième famille de G_{14} et les valeurs propres du Frobenius.

Remarque 6.1.1. On pourrait aussi obtenir cette matrice de Fourier comme la S-matrice de la catégorie de fusion des modules basculants de $\mathscr{U}_{\xi}(\mathfrak{sl}_{10})$ où ξ est une racine primitive 180-ième de l'unité telle que $\xi^{20} = \zeta_9^{-1}$ [CGR00, Theorem 3].

Afin d'obtenir la matrice de Fourier de la dixième famille de G_{32}, on modifie la structure pivotale à l'aide d'un élément central g_0 tel que le cocycle γ_{g_0} soit un 2-cobord. On choisit ici $g_0 = 0$, le cocycle γ_0 étant trivial. On a alors le choix d'une fonction $\alpha G\colon \to \mu_{\mathbb{C}}$ telle que $\alpha(a+b) = \alpha(a)\alpha(b)$, c'est-à-dire une représentation de dimension 1 de G. On choisit alors $\alpha(a) = \zeta_3^{2a}$.

En choisissant

$$V_{0,\zeta_3}, V_{1,\zeta_9^8}, V_{2,\zeta_9^4}, V_{0,\zeta_3^2}, V_{1,\zeta_9^2}, V_{2,\zeta_9^7}, V_{0,1}, V_{1,\zeta_9^5}, V_{2,\zeta_9}$$

comme ordre pour les objets simples, la S-matrice de la catégorie $D^{\omega}(G)$-mod, munie de la structure pivotale associé à g_0 et α, est alors

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9 \\
1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2 \\
1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 \\
1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4 \\
1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5 \\
1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 \\
1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7 \\
1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8
\end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}\left(1, \zeta_9^5, \zeta_9^2, 1, \zeta_9^8, \zeta_9^8, 1, \zeta_9^2, \zeta_9^5\right)$$

En renormalisant la S-matrice par un facteur 3, on retrouve bien la matrice de Fourier de la dixième famille de G_{32} et les valeurs propres du Frobenius, et l'élément spécial de la famille est bien l'élément unité de $D^{\omega}(G)$-mod.

6.1.2 La quatrième famille de G_{23} et la quatrième famille de G_{24}

Notons i une racine primitive quatrième de l'unité. La matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius de la quatrième famille de caractères unipotents de G_{23} et de la quatrième famille de caractères unipotents de G_{24} sont données par

$$S_{23-4} = S_{34-4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{23-4} = \mathrm{Fr}_{24-4} = \mathrm{diag}(1, 1, i, -i),$$

et l'élément spécial est en première position.

Remarque 6.1.2. Le groupe G_{23} n'est autre que le groupe de Coxeter de type H_3.

Cette donnée modulaire est celle des trois familles exceptionnelles de caractères unipotents des groupes de type E_7 et E_8.

Cette donnée modulaire se retrouve à partir du double de Drinfeld tordu $D^{\omega}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où ω est l'unique 3-cocycle non-trivial. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ étant commutatif, on a deux classes de conjugaison. Le cocycle β_0 est trivial tandis que le cocycle β_1 est l'unique 2-cocycle non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe alors deux représentations projectives pour le cocycle β_1 et irréductibles, l'élément 1 agit sur la première par multiplication par i et sur la seconde par multiplication par $-i$. On note les diverses représentations irréductibles (projectives ou non) par le scalaire donnée par l'action de 1. On choisit comme structure sphérique celle associée à l'élément de type groupe $x_{0,\varepsilon}$, où ε est l'unique caractère irréductible non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En choisissant

$$V_{0,1}, V_{0,-1}, V_{1,-i}, V_{1,i}$$

comme ordre pour les objets simples, la S-matrice de la catégorie $D^{\omega}(G)$-mod est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(1, 1, i, -i).$$

En renormalisant la S-matrice par un facteur 2, on retrouve bien la matrice de Fourier de la quatrième famille de G_{23} et les valeurs propres du Frobenius.

6.1.3 Les quatrième et huitième familles de G_{27} et la treizième famille de G_{34}

Notons ζ_9 une racine primitive neuvième de l'unité et $\zeta_3 = \zeta_9^3$. La matrice de Fourier de la quatrième famille de caractères unipotents de G_{27} et de la treizième famille de caractères unipotents de G_{34} est donnée par

$$S_{27-4} = S_{34-8} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9 \\ 1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2 \\ 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 \\ 1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4 \\ 1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5 \\ 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 \\ 1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7 \\ 1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{27-4} = \mathrm{Fr}_{34-8} = \mathrm{diag}\big(1, \zeta_9^4, \zeta_9^7, 1, \zeta_9, \zeta_9, 1, \zeta_9^7, \zeta_9^4\big),$$

et l'élément spécial est en septième position.

En ce qui concerne la huitième famille de caractères unipotents de G_{27}, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius sont les mêmes, mais l'élément spécial est en première position et correspond ainsi à la ligne constituée uniquement de 1. Cette donnée modulaire est la conjuguée complexe de la donnée modulaire associée à la quatrième famille de G_{14}. Il suffit de remplacer la racine primitive ζ_9 par son inverse, ce qui peut s'obtenir en prenant pour G le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et pour ω le cocycle non trivial donné par

$$\omega(a,b,c) = \zeta_3^{a\lfloor\frac{b+c}{3}\rfloor} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq b+c < 3, \\ \zeta_3^a & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $0 \leq a, b, c < 3$. La catégorie $D^{\omega}(G)$-mod admet 9 objets simples et en choisissant

$$V_{0,1}, V_{1,\zeta_9^4}, V_{2,\zeta_9^8}, V_{0,\zeta_3^2}, V_{1,\zeta_9}, V_{2,\zeta_9^5}, V_{0,\zeta_3}, V_{1,\zeta_9^7}, V_{2,\zeta_9^2}$$

comme ordre pour les objets simples, la S-matrice de la catégorie $D^{\omega}(G)$-mod est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9 \\ 1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2 \\ 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 \\ 1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4 \\ 1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5 \\ 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 \\ 1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7 \\ 1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8 \end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}\big(1, \zeta_9^4, \zeta_9^7, 1, \zeta_9, \zeta_9, 1, \zeta_9^7, \zeta_9^4\big).$$

En renormalisant la S-matrice par un facteur 3, on retrouve bien la matrice de Fourier de la huitième famille de G_{27} et les valeurs propres du Frobenius.

Remarque 6.1.3. On pourrait aussi obtenir cette matrice de Fourier comme la S-matrice de la catégorie de fusion des modules basculants de $\mathcal{U}_\xi(\mathfrak{sl}_{10})$ où ξ est une racine primitive 180-ième de l'unité telle que $\xi^{20}=\zeta_9$ [CGR00, Theorem 3].

Afin d'obtenir la matrice de Fourier de la quatrième famille de G_{27}, on modifie la structure pivotale à l'aide d'un élément central g_0 tel que le cocycle γ_{g_0} soit un 2-cobord. On choisit ici $g_0=0$, le cocycle γ_0 étant trivial. On a alors le choix d'une fonction $\alpha G\colon \to \mu_{\mathbb{C}}$ telle que $\alpha(a+b)=\alpha(a)\alpha(b)$, c'est-à-dire une représentation de dimension 1 de G. On choisit alors $\alpha(a)=\zeta_3^a$.

En choisissant

$$V_{0,\zeta_3^2}, V_{1,\zeta_9}, V_{2,\zeta_9^5}, V_{0,\zeta_3}, V_{1,\zeta_9^7}, V_{2,\zeta_9^2}, V_{0,1}, V_{1,\zeta_9^4}, V_{2,\zeta_9^7}$$

comme ordre pour les objets simples, la S-matrice de la catégorie $D^\omega(G)$-mod, munie de la structure pivotale associé à g_0 et α, est alors

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & \zeta_9^8 & \zeta_9^7 & \zeta_3^2 & \zeta_9^5 & \zeta_9^4 & \zeta_3 & \zeta_9^2 & \zeta_9\\
1 & \zeta_9^7 & \zeta_9^5 & \zeta_3 & \zeta_9 & \zeta_9^8 & \zeta_3^2 & \zeta_9^4 & \zeta_9^2\\
1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & \zeta_3\\
1 & \zeta_9^5 & \zeta_9 & \zeta_3^2 & \zeta_9^2 & \zeta_9^7 & \zeta_3 & \zeta_9^8 & \zeta_9^4\\
1 & \zeta_9^4 & \zeta_9^8 & \zeta_3 & \zeta_9^7 & \zeta_9^2 & \zeta_3^2 & \zeta_9 & \zeta_9^5\\
1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2\\
1 & \zeta_9^2 & \zeta_9^4 & \zeta_3^2 & \zeta_9^8 & \zeta_9 & \zeta_3 & \zeta_9^5 & \zeta_9^7\\
1 & \zeta_9 & \zeta_9^2 & \zeta_3 & \zeta_9^4 & \zeta_9^5 & \zeta_3^2 & \zeta_9^7 & \zeta_9^8
\end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}\bigl(1,\zeta_9^4,\zeta_9^7,1,\zeta_9,\zeta_9,1,\zeta_9^7,\zeta_9^4\bigr).$$

En renormalisant la S-matrice par un facteur 3, on retrouve bien la matrice de Fourier de la quatrième famille de G_{27} et les valeurs propres du Frobenius, et l'élément spécial de la famille est bien l'élément unité de $D^\omega(G)$-mod.

6.1.4 La sixième famille de G_{27}

Notons ζ_{20} une racine primitive 20-ième de l'unité, $\zeta_5=\zeta_{20}^4$ et $i=\zeta_{20}^5$. La matrice de Fourier associée à la sixième famille de caractères unipotents de G_{27} est donnée par

$$S_{27-6}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}
a & b & c & c & a & b & c & c & -a & -b & -c & -c & -a & -b & -c & -c\\
b & a & -c & -c & b & a & -c & -c & -b & -a & c & c & -b & -a & c & c\\
c & -c & -a & b & c & -c & -a & b & -c & c & a & -b & -c & c & a & -b\\
c & -c & b & -a & c & -c & b & -a & -c & c & -b & a & -c & c & -b & a\\
a & b & c & c & a & b & c & c & a & b & c & c & a & b & c & c\\
b & a & -c & -c & b & a & -c & -c & b & a & -c & -c & b & a & -c & -c\\
c & -c & -a & b & c & -c & -a & b & c & -c & -a & b & c & -c & -a & b\\
c & -c & b & -a & c & -c & b & -a & c & -c & b & -a & c & -c & b & -a\\
-a & -b & -c & -c & a & b & c & c & -a & -b & -c & -c & a & b & c & c\\
-b & -a & c & c & b & a & -c & -c & -b & -a & c & c & b & a & -c & -c\\
-c & c & a & -b & c & -c & -a & b & -c & c & a & -b & c & -c & -a & b\\
-c & c & -b & a & c & -c & b & -a & -c & c & -b & a & c & -c & b & -a\\
-a & -b & -c & -c & a & b & c & c & a & b & c & c & -a & -b & -c & -c\\
-b & -a & c & c & b & a & -c & -c & b & a & -c & -c & -b & -a & c & c\\
-c & c & a & -b & c & -c & -a & b & c & -c & -a & b & -c & c & a & -b\\
-c & c & -b & a & c & -c & b & -a & c & -c & b & -a & -c & c & -b & a
\end{pmatrix}$$

où $a=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $c=\sqrt{5}$. Les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{27-6}=\operatorname{diag}\bigl(1,1,\zeta_5^3,\zeta_5^2,1,1,\zeta_5^3,\zeta_5^2,i,i,\zeta_{20}^{17},\zeta_{20}^{13},-i,-i,\zeta_{20}^{7},\zeta_{20}^{3}\bigr).$$

L'élément spécial est en première position.

La matrice de Fourier s'écrit comme le produit de Kronecker de deux matrices de taille 4, et il en est de même pour la matrice diagonale des valeurs propres du Frobenius

$$S_{27-6} = S_{27-6'} \otimes S_{26-7''} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{27-6} = \mathrm{Fr}_{27-6'} \otimes \mathrm{Fr}_{27-6''}$$

où

$$S_{27-6'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Fr}_{27-6'} = \mathrm{diag}(1,1,i,-i),$$

et

$$S_{27-6''} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & -c & -c \\ c & -c & -a & b \\ c & -c & b & -a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Fr}_{27-6''} = \mathrm{diag}\big(1,1,\zeta_5^3,\zeta_5^2\big).$$

La donnée modulaire constituée des matrices $S_{27-6'}$ et $\mathrm{Fr}_{27-6'}$ provient de la catégorie $D^{\omega}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec une structure sphérique différente de celle choisie habituellement, cf. sous-partie 6.1.1.

En ce qui concerne la donnée modulaire constituée des matrices $S_{27-6''}$ et $\mathrm{Fr}_{27-6''}$, elle correspond à la donnée modulaire associée à la grosse famille de caractères unipotents du groupe diédral $I_2(5)$, dont on a expliqué une catégorification dans la partie 5.3.

6.1.5 La huitième famille de G_{29}

Notons ζ_{20} une racine primitive 20-ième de l'unité, $\zeta_5 = \zeta_{20}^4$ et $i = \zeta_{20}^5$. La matrice de Fourier S_{29-8} de la huitième famille de caractères unipotents de G_{29} est donnée par

$$\frac{1}{20}\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 5 & 5 & -5 & -5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 4 & -5 & -5 & 5 & 5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -4 & 5i & 5i & -5i & -5i & -5i & -5i & -5i & -5i & 5 & 5 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -4 & -5i & -5i & 5i & 5i & 5i & 5i & 5i & 5i & 5 & 5 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\
4 & 4 & -4 & -4 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\
5 & -5 & 5i & -5i & 0 & 5 & -5 & -5i & 5i & 5 & -5 & 5i & -5i & 5 & -5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -5 & 5i & -5i & 0 & -5 & 5 & 5i & -5i & -5 & 5 & -5i & 5i & 5 & -5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5 & 5 & -5i & 5i & 0 & -5i & 5i & -5 & 5 & 5i & -5i & -5 & 5 & 5 & -5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5 & 5 & -5i & 5i & 0 & 5i & -5i & 5 & -5 & -5i & 5i & 5 & -5 & 5 & -5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -5 & -5i & 5i & 0 & 5 & -5 & 5i & -5i & 5 & -5 & -5i & 5i & 5 & -5 & -5i & 5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -5 & -5i & 5i & 0 & -5 & 5 & -5i & 5i & -5 & 5 & 5i & -5i & 5 & -5 & -5i & 5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -5 & -5i & 5i & 0 & 5i & -5i & -5 & 5 & -5i & 5i & -5 & 5 & -5 & 5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -5 & -5i & 5i & 0 & -5i & 5i & 5 & -5 & 5i & -5i & 5 & -5 & -5 & 5 & 5i & -5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -5 & -5 & 5 & 5 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 0 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5i & 5i & 5i & 5i & -5i & -5i & 5i & 5i & -5 & -5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 0 & -5i & -5i & -5i & -5i & 5i & 5i & -5i & -5i & -5 & -5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -4 & -4 & -4 & -4 \\
4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6-2\sqrt{5} & -4-4\sqrt{5} & -4+4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} \\
4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4-4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & 6-2\sqrt{5} & -4+4\sqrt{5} \\
4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4+4\sqrt{5} & 6-2\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & -4-4\sqrt{5} \\
4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6+2\sqrt{5} & -4+4\sqrt{5} & -4-4\sqrt{5} & 6-2\sqrt{5}
\end{array}\right)$$

les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{29-8} = \mathrm{diag}\big(1,1,1,1,1,1,-1,i,-i,1,-1,-i,i,1,1,-1,-1,1,\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4\big),$$

et l'élément spécial est en première position.

À conjugaison près par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1),$$

ces matrices coïncident avec la S-matrice et la matrice diagonale des valeurs du twist de la catégorie de modules de $D(G)$ où G est un groupe de Frobenius de cardinal 20, c'est-à-dire $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

6.1.6 La septième famille de G_{32}

À conjugaison par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius de la septième famille de caractères unipotents de G_{32} sont égales à la S-matrice et à la matrice diagonale des valeurs du twist de la catégorie de modules de l'algèbre $D(G)$, où G est le groupe de réflexions complexes de type G_4.

6.1.7 La vingtième famille de G_{34}

À conjugaison par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius de la septième famille de caractères unipotents de G_{32} sont égales à la S-matrice et à la matrice diagonale des valeurs du twist de la catégorie de modules de l'algèbre $D(G)$, où G est un groupe de Frobenius d'ordre 42, c'est-à-dire $G \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

6.2 Des catégorifications par des catégories de modules basculants en type A

6.2.1 La quatrième famille de G_4

Notons ζ_3 une racine primitive 3-ième de l'unité. La matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius sont données par

$$S_{4-4} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \zeta_3^2-\zeta_3 & 3 & -3 & 2\zeta_3^2-2\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2\zeta_3^2-2\zeta_3 & 0 & 0 & 2\zeta_3-2\zeta_3^2 & 2\zeta_3-2\zeta_3^2 \\ \zeta_3-\zeta_3^2 & 3 & -3 & 2\zeta_3-2\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{4-4} = \mathrm{diag}\big(1,1,-1,\zeta_3^2,1\big),$$

et l'élément spécial est en première position. La matrice de Fourier n'est pas obtenue directement en considérant une catégorie de la forme $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$, mais une sous-catégorie bien choisie.

Notations. *Dans cette sous-partie,* $\mathfrak{g}$ *est de type* A_1 *avec matrice de Cartan*

$$\big(2\big).$$

La racine simple est notée α. *Le poids fondamental est* $\varpi = \frac{1}{2}\alpha$.

Soit ξ une racine primitive 12-ième de l'unité telle que $\xi^4 = \zeta_3^{-1}$. On considère la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}$ de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ avec objets ceux de degré appartenant au sous-groupe de $P/6Q^\vee \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ engendré par 3ϖ. La chambre fondamentale C est

$$C = \left\{\lambda\varpi \in P^+ \,\middle|\, \lambda < 5\right\} = \{0, \varpi, 2\varpi, 3\varpi, 4\varpi\}$$

et la catégorie $\mathscr{C}$ admet 10 objets simples, à savoir ceux indexés par les poids suivants :

— en degré 0 : $(0,0), (2\varpi, 2\varpi)$ et $(4\varpi, 4\varpi)$,

— en degré 3ϖ : $(4\varpi,-2\varpi)$ et $(6\varpi,0)$,

— en degré 6ϖ : $(6\varpi,-6\varpi),(8\varpi,-4\varpi)$ et $(10\varpi,-2\varpi)$,

— en degré 9ϖ : $(10\varpi,-8\varpi)$ et $(12\varpi,-6\varpi)$.

Proposition 6.2.1. *La catégorie $\mathscr{C}$ est légèrement dégénérée. L'objet simple transparent non trivial est $L_\xi(10\varpi,-2\varpi)$, qui est de dimension -1 et de twist 1.*

Choisissons les représentants suivants des orbites des classes d'isomorphie des objets simples sous l'action de tensorisation par le centre symétrique :

$$\left\{L_\xi(0,0), L_\xi(6\varpi,0), L_\xi(12\varpi,-6\varpi), L_\xi(2\varpi,2\varpi), L_\xi(6\varpi,-6\varpi)\right\}.$$

Avec cet ordre, la S-matrice de la super-catégorie associée $\hat{\mathscr{C}}$ et la matrice diagonale des valeurs du twist sont

$$S_{\hat{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 2 & -1 \\ -\zeta_3^2+\zeta_3 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & 0 & -\zeta_3^2+\zeta_3 \\ \zeta_3^2-\zeta_3 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -\zeta_3^2+\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \operatorname{diag}\left(1,1,-1,\zeta_3^2,1\right)$$

Cette catégorie n'est pas sphérique et on peut vérifier que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est , $L_\xi(6\varpi,-6\varpi)$, qui est de dimension quantique -1. On renormalise alors la S-matrice par une racine carrée de $-12 = \operatorname{sdim}(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})$.

Théorème 6.2.2. *La S-matrice et la matrice du twist de la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ vérifient*

$$\frac{S_{\hat{\mathscr{C}}}}{i\sqrt{12}} = S_{4-4} \quad et \quad T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{4-4},$$

où $i = \xi^{-3}$.

6.2.2 La deuxième famille de G_6

Notons ζ_{12} une racine primitive 12-ième de l'unité, $\zeta_3 = \zeta_{12}^4$ et $i = \zeta_{12}^3$. La matrice de Fourier S_{6-2} est donnée par

$$\frac{1}{24}\begin{pmatrix}
a & 6 & b & d & id & b & -6i & c & 2d & -ic & -ia & -6i & -ib & -d & ib & -ic & 2id & -a & 6 & id & c & ia \\
6 & 6 & 6 & 6 & -6 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 0 & 6 \\
b & 6 & a & d & -id & a & 6i & -ic & 2d & c & ib & 6i & ia & -d & -ia & c & -2id & -b & 6 & -id & -ic & -ib \\
d & 6 & d & 6 & 6 & -d & 6 & -2d & 0 & -2d & -d & -6 & -d & 6 & -d & 2d & 0 & d & -6 & -6 & 2d & -d \\
id & -6 & -id & 6 & -6 & id & 6 & 2id & 0 & -2id & id & -6 & -id & 6 & -id & 2id & 0 & id & 6 & 6 & -2id & id \\
b & -6 & a & -d & id & a & -6i & -ic & -2d & c & ib & -6i & ia & d & -ia & c & 2id & -b & -6 & id & -ic & -ib \\
-6i & -6 & 6i & 6 & 6 & -6i & -6 & 0 & 0 & 0 & 6i & 6 & -6i & 6 & -6i & 0 & 0 & -6i & 6 & -6 & 0 & 6i \\
c & 0 & -ic & -2d & 2id & -ic & 0 & ic & 2d & -c & ic & 0 & c & 2d & -c & -c & -2id & -c & 0 & 2id & ic & -ic \\
2d & 0 & 2d & 0 & 0 & -2d & 0 & 2d & 0 & 2d & -2d & 0 & -2d & 0 & -2d & -2d & 0 & 2d & 0 & 0 & -2d & -2d \\
-ic & 0 & c & -2d & -2id & c & 0 & -c & 2d & ic & -c & 0 & -ic & 2d & ic & ic & 2id & ic & 0 & -2id & -c & c \\
-ia & 6 & ib & -d & id & ib & 6i & ic & -2d & -c & a & 6i & -b & d & b & -c & 2id & ia & 6 & id & ic & -a \\
-6i & 6 & 6i & -6 & -6 & -6i & 6 & 0 & 0 & 0 & 6i & -6 & -6i & -6 & -6i & 0 & 0 & -6i & -6 & 6 & 0 & 6i \\
-ib & 6 & ia & -d & -id & ia & -6i & c & -2d & -ic & -b & -6i & a & d & -a & -ic & -2id & ib & 6 & -id & c & b \\
-d & 6 & -d & 6 & 6 & d & 6 & 2d & 0 & 2d & d & -6 & d & 6 & d & -2d & 0 & -d & -6 & -6 & -2d & d \\
ib & 6 & -ia & -d & -id & -ia & -6i & -c & -2d & ic & b & -6i & -a & d & a & ic & -2id & -ib & 6 & -id & -c & -b \\
-ic & 0 & c & 2d & 2id & c & 0 & -c & -2d & ic & -c & 0 & -ic & -2d & ic & ic & -2id & ic & 0 & 2id & -c & c \\
2id & 0 & -2id & 0 & 0 & 2id & 0 & -2id & 0 & 2id & 2id & 0 & -2id & 0 & -2id & -2id & 0 & 2id & 0 & 0 & 2id & 2id \\
-a & 6 & -b & d & id & -b & -6i & -c & 2d & ic & ia & -6i & ib & -d & -ib & ic & 2id & a & 6 & id & -c & -ia \\
6 & -6 & 6 & -6 & 6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & -6 & 0 & 6 \\
id & 6 & -id & -6 & 6 & id & -6 & 2id & 0 & -2id & id & 6 & -id & -6 & -id & 2id & 0 & id & -6 & -6 & -2id & id \\
c & 0 & -ic & 2d & -2id & -ic & 0 & ic & -2d & -c & ic & 0 & c & -2d & -c & -c & 2id & -c & 0 & -2id & ic & -ic \\
ia & 6 & -ib & -d & id & -ib & 6i & -ic & -2d & c & -a & 6i & b & d & -b & c & 2id & -ia & 6 & id & -ic & a
\end{pmatrix}$$

où $a = -4\zeta_{12}^{11} - 2\zeta_{12}^{8} - 2\zeta_{12}^{7} - 4\zeta_{12}^{4}$, $b = 4\zeta_{12}^{11} - 2\zeta_{12}^{8} + 2\zeta_{12}^{7} - 4\zeta_{12}^{4}$, $c = 2\zeta_{12}^{11} + 2\zeta_{12}^{8} - 2\zeta_{12}^{7} - 2\zeta_{12}^{4}$ et $d = 2\zeta_3^2 - 2\zeta_3$.

Les valeurs propres du Frobenius Fr_{6-2} sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr} = \mathrm{diag}\big(1,1,1,1,-i,-1,i,-\zeta_3^2,\zeta_3^2,-\zeta_3^2,1,i,-1,1,1,\zeta_3^2,\zeta_{12}^5,-1,1,-i,\zeta_3^2,-1\big).$$

L'élément spécial est en première position.

Notations. *Dans cette sous-partie, $\mathfrak{g}$ est de type A_1 avec matrice de Cartan*

$$\big(2\big).$$

La racine simple est notée α. Le poids fondamental est $\varpi = \frac{1}{2}\alpha$.

Soit ξ une racine primitive 24-ième de l'unité telle que $\xi^2 = \zeta_{12}$. On considère la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ avec objets ceux de degré appartenant au sous-groupe de $P/12Q^\vee \simeq \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ engendré par 3ϖ. La chambre fondamentale C est

$$C = \left\{\lambda\varpi \in P^+ \,\middle|\, \lambda < 11\right\},$$

et la catégorie $\mathcal{C}$ admet 44 objets simples, que l'on indexe par

$$\left\{(-\mu + 2\eta, \mu) \,\middle|\, \eta \in C,\ \mu \in Q,\ -\mu + \eta \in \{0, 3\varpi, 6\varpi, 9\varpi, 12\varpi, 15\varpi, 18\varpi, 21\varpi\}\right\}.$$

Proposition 6.2.3. *La catégorie $\mathcal{C}$ est légèrement dégénérée. L'objet simple transparent non trivial est $L_\xi(22\varpi, -2\varpi)$, qui est de dimension -1 et de twist 1.*

Choisissons les représentants suivants des orbites des classes d'isomorphie des objets simples sous l'action de tensorisation par le centre symétrique :

$$\begin{aligned}\{&L_\xi(0,0), L_\xi(10\varpi,4\varpi), L_\xi(12\varpi,0), L_\xi(10\varpi,-8\varpi), L_\xi(12\varpi,6\varpi), L_\xi(10\varpi,-2\varpi),\\ &L_\xi(12\varpi,-6\varpi), L_\xi(8\varpi,-4\varpi), L_\xi(14\varpi,-4\varpi), L_\xi(20\varpi,-4\varpi), L_\xi(6\varpi,-6\varpi), L_\xi(16\varpi,-2\varpi),\\ &L_\xi(18\varpi,-6\varpi), L_\xi(22\varpi,-20\varpi), L_\xi(6\varpi,6\varpi), L_\xi(14\varpi,-10\varpi), L_\xi(8\varpi,2\varpi), L_\xi(12\varpi,-12\varpi),\\ &L_\xi(6\varpi,0), L_\xi(4\varpi,-2\varpi), L_\xi(14\varpi,2\varpi), L_\xi(18\varpi,-18\varpi)\}.\end{aligned}$$

La super-dimension de la catégorie $\mathcal{C}$ est alors égale à $\frac{1}{3}\,\mathrm{sdim}(\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}) = -\frac{48}{(\xi-\xi^{-1})^2}$ dont une racine carrée est $\frac{-4i\sqrt{3}}{\xi-\xi^{-1}}$ et l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est l'objet simple $L_\xi(6\varpi, -6\varpi)$ qui est de dimension $\xi^{18} = -i$, dont on choisit ξ^9 comme racine carrée. On normalise alors la S-matrice par un facteur $\frac{4\xi^3\sqrt{3}}{\xi-\xi^{-1}}$.

Théorème 6.2.4. *La S-matrice et la matrice du twist de la super-catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ vérifient*

$$\frac{S_{\hat{\mathcal{C}}}}{\frac{4\xi^3\sqrt{3}}{\xi-\xi^{-1}}} = S_{6-2} \quad \textit{et} \quad T_{\hat{\mathcal{C}}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{6-2},$$

c'est-à-dire qu'une catégorification de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire associée à la famille $\mathcal{F}$ est donnée par la catégorie légèrement dégénérée $\mathcal{C}$.

6.2.3 La quatrième famille de G_6, la quatrième famille de G_8 et les quatrième et douzième familles de G_{29}

Notons ζ_8 une racine primitive 8-ième de l'unité et $i = \zeta_8^2$. La matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius de la quatrième famille de caractères unipotents G_6, de la quatrième famille de G_8 et de la douzième famille de G_{29} sont données par

$$S_{6-4} = S_{8-4} = S_{29-12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i & i & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ i & i & -i & -i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{6-4} = \mathrm{Fr}_{8-4} = \mathrm{Fr}_{29-12} = \mathrm{diag}\left(\zeta_8^3, 1, \zeta_8^7, 1\right),$$

et l'élément spécial est en deuxième position. En ce qui concerne la quatrième famille de caractères unipotents de G_{29}, on obtient la matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius par conjugaison complexe.

Notations. *Dans cette sous-partie,* $\mathfrak{g}$ *est de type* A_1 *avec matrice de Cartan*

$$\left(2\right).$$

La racine simple est notée α. *Le poids fondamental est* $\varpi = \frac{1}{2}\alpha$.

On considère alors la catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ pour $\xi = -i$. On choisit également ζ_8^{-1} comme racine de ξ, puisque l'on travaille avec la catégorie $\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ et non avec la version entière. La chambre fondamentale C est

$$C = \left\{\lambda\varpi \in P^+ \,\middle|\, \lambda < 1\right\} = \{0\}.$$

La catégorie $\mathscr{C} = \mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ admet ainsi 4 objets simples, tous inversibles, indexés par les poids $(0,0), (\varpi, -\varpi), (2\varpi, -2\varpi)$ et $(3\varpi, -3\varpi)$. On choisit l'ordre suivant pour exprimer la S-matrice et la matrice diagonale des valeurs du twist :

$$\{L_\xi(\varpi, -\varpi), L_\xi(0,0), L_\xi(3\varpi, -3\varpi), L_\xi(2\varpi, -2\varpi)\}.$$

Avec cet ordre la S-matrice est

$$S_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} -i & -i & -i & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -i & i & -i & i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$T_{\mathscr{C}}^{-1} = \mathrm{diag}(\zeta_8^3, 1, \zeta_8^7, 1).$$

On a vu à la proposition 4.3.18 que la catégorie $\mathscr{C}$ est modulaire, et sa dimension est 4 puisque tous les objets sont inversibles. De plus, on se trouve dans le cas non sphérique, et l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est l'objet simple $L_\xi(2\varpi, -2\varpi)$ qui est de dimension quantique -1. On renormalise alors la matrice S par une racine de -4 que l'on choisit égale à $2i$.

Théorème 6.2.5. *La S-matrice et la matrice du twist de la catégorie $\mathscr{C}$ vérifient*

$$\frac{S_{\mathscr{C}}}{2i} = -i D S_{6-4} D^{-1} \quad \textit{et} \quad T_{\mathscr{C}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{6-4},$$

où D est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1,-1,-1,1)$.

Afin d'obtenir la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius de la quatrième famille de G_{29}, il suffit de remplacer ξ par ξ^{-1}.

6.2.4 Les deuxième et troisième familles de G_8

Notons i une racine primitive quatrième de l'unité. La matrice de Fourier des deuxième et troisième familles ainsi que les valeurs propres du Frobenius sont données par

$$S_{8-2} = S_{8-3} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i+1 & 2 & i+1 & -i-1 & -2i & -i+1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ i+1 & 2 & -i+1 & i-1 & 2i & i+1 \\ -i-1 & 2 & i-1 & -i+1 & 2i & -i-1 \\ -2i & 0 & 2i & 2i & 0 & 2i \\ -i+1 & -2 & i+1 & -i-1 & 2i & -i+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{8-2} = \mathrm{Fr}_{8-3} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1,-i,-1),$$

et l'élément spécial est en première position. On remarque que ces matrices correspondent à celles de la donnée modulaire associée à la famille non triviale de caractères unipotents du groupe $G(4,1,1)$. On déduit du théorème 4.5.3 qu'une catégorification de ces données est donnée par la super-catégorie associée à la catégorie légèrement dégénérée $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et ξ une racine 8-ième de l'unité telle que $\xi^2 = -i$.

6.2.5 La quatrième famille de G_{25}

Notons ζ_3 une racine primitive cubique de l'unité. La matrice de Fourier associée à la quatrième famille de caractères unipotents de G_{25} est donnée par

$$S_{25-4} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}
-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 2 & 1-\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & 1 & 2\zeta_3^2+\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3-1 & 1 \\
1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 0 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\
1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 0 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 2 & 1-\zeta_3 & -\zeta_3 & 1 & \zeta_3-1 & 2\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & 1 \\
1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1 & -1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 2 & -1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -1 \\
\zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3 & 0 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
2\zeta_3^2 & 0 & 2 & 0 & 2\zeta_3 & -2 & 0 & 2\zeta_3 & 0 & -2\zeta_3 & 0 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & 0 & -2 \\
\zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & -2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3 & -1 & \zeta_3-1 & -2\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & -1 \\
\zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
-2\zeta_3 & 0 & -2 & 0 & -2\zeta_3^2 & 2 & 0 & -2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 0 & 2 \\
\zeta_3 & 1-\zeta_3 & -2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & -1 & \zeta_3^2-1 & -2\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & -\zeta_3 & \zeta_3-1 & -1 \\
\zeta_3-1 & 1-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1 & -1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 2 & -1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -1
\end{pmatrix},$$

les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{25-4} = \mathrm{diag}\big(1,1,1,1,1,\zeta_3,-1,\zeta_3^2,-\zeta_3,1,\zeta_3,\zeta_3^2,1,-1,\zeta_3\big),$$

et l'élément spécial est en première position.

Notations. *Dans cette sous-partie,* $\mathfrak{g}$ *est de type* A_1 *avec matrice de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

La racine simple est notée α. *Le poids fondamental est* $\varpi = \frac{1}{2}\alpha$.

Soit ξ une racine primitive 12-ième de l'unité telle que $\xi^2 = -\zeta_3$. On considère $\mathscr{C}$ la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$. La chambre fondamentale est

$$C = \left\{\lambda\varpi \in P^+ \,\middle|\, \lambda < 5\right\} = \{0, \varpi, 2\varpi, 3\varpi\, 4\varpi\}.$$

et la catégorie $\mathscr{C}$ admet 30 objets simples, à savoir ceux indexés par les poids suivants :

$$\left\{(-\mu + 2\eta, \mu) \,\middle|\, \eta \in C,\ \mu \in Q,\ -\mu + \eta \in \{k\varpi \mid 0 \leq k < 12\}\right\}.$$

Proposition 6.2.6. *La catégorie* $\mathscr{C}$ *est légèrement dégénérée. L'objet simple transparent non trivial est* $L_\xi(10\varpi, -2\varpi)$*, qui est de dimension* -1 *et de twist* 1.

Choisissons les représentants suivants des orbites des classes d'isomorphie des objets simples sous l'action de tensorisation par le centre symétrique :

$$\{L_\xi(0,0), L_\xi(2\varpi,0), L_\xi(4\varpi,0), L_\xi(6\varpi,0), L_\xi(8\varpi,0), L_\xi(2\varpi,-2\varpi), L_\xi(12\varpi,-6\varpi), L_\xi(12\varpi,-8\varpi), L_\xi(8\varpi,-2\varpi), L_\xi(14\varpi,-6\varpi), L_\xi(6\varpi,-4\varpi), L_\xi(2\varpi,2\varpi), L_\xi(6\varpi,-6\varpi), L_\xi(8\varpi,-6\varpi), L_\xi(6\varpi,2\varpi)\}.$$

Avec cet ordre, la matrice S-matrice de la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ associée à $\mathscr{C}$ s'écrit

$$S_{\hat{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix}
1 & 1-\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3 & -\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -2\zeta_3 & \zeta_3-1 & -\zeta_3 & \zeta_3-1 & 2 & -1 & \zeta_3^2-1 & -\zeta_3^2 \\
1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 0 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 \\
-2\zeta_3^2 & 0 & -2\zeta_3^2 & 0 & -2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 0 & -2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3^2 \\
\zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 \\
\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1 & -\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & -2 & 1-\zeta_3 & -1 & 1-\zeta_3 & 2\zeta_3 & -\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & -\zeta_3^2 \\
-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & 2\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & -\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & \zeta_3-1 & 2\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2 & \zeta_3-1 & -2\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2 \\
\zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & 0 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 \\
-2\zeta_3 & 0 & -2\zeta_3^2 & 0 & -2 & 2\zeta_3^2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 0 & 2\zeta_3^2 \\
\zeta_3-1 & \zeta_3-1 & 0 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 0 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & 0 & \zeta_3-1 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 \\
-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & -1 & \zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & 2 & 1-\zeta_3 & 1 & 1-\zeta_3 & -2\zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2 \\
\zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3-1 & 0 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 0 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 \\
2 & 0 & 2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & 0 & 2\zeta_3 & 0 & -2\zeta_3 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2\zeta_3^2 \\
-1 & 1-\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & -\zeta_3 & \zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 2\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3 & \zeta_3-1 & -2 & 1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2 \\
\zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 0 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 0 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 0 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 \\
-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & -\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & \zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2
\end{pmatrix},$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \operatorname{diag}\left(1,1,1,1,1,\zeta_3,-1,\zeta_3^2,-\zeta_3,1,\zeta_3,\zeta_3^2,1,-1,\zeta_3\right)$$

La super-dimension de la catégorie $\mathscr{C}$ est alors égale à 36 et l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est l'objet simple $L_\xi(8\varpi, 0)$ qui est de dimension ζ_3, dont on choisit $-\zeta_3^2$ comme racine. On renormalise alors la matrice $S_{\hat{\mathscr{C}}}$ en la divisant par $6\zeta_3^2$.

Théorème 6.2.7. *La* S*-matrice et la matrice du twist de la super-catégorie* $\hat{\mathscr{C}}$ *vérifient*

$$\frac{S_{\hat{\mathscr{C}}}}{-6\zeta_3^2} = S_{25-4} \quad \textit{et} \quad T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{24-4}.$$

6.2.6 La septième famille de G_{25}

Notons ζ_3 une racine primitive cubique de l'unité. La matrice de Fourier associée à la septième famille de caractères unipotents de G_{25} est donnée par

$$S_{25-7} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & -1 & 2\zeta_3^2 & -3 & 1 & 2\zeta_3 \\ -2\zeta_3 & 2 & 2\zeta_3^2 & 2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & 0 & 2 & -2\zeta_3 \\ -2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ -2\zeta_3^2 & 2 & 2\zeta_3 & 2 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3 & 0 & 2 & -2\zeta_3^2 \\ 2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & 2\zeta_3 & -1 & 2\zeta_3 & -3 & 1 & 2\zeta_3^2 \\ 2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & -2 & -2\zeta_3 & 2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 0 & -2 & 2\zeta_3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 & -2 & 3 & -1 & -2 \\ 2\zeta_3 & -2\zeta_3 & -2 & -2\zeta_3^2 & 2 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & 0 & -2 & 2\zeta_3^2 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{25-7} = \mathrm{diag}\left(1, 1, \zeta_3^2, 1, \zeta_3^2, 1, \zeta_3, -1, 1, \zeta_3\right),$$

et l'élément spécial est en première position.

Notations. *Dans cette sous-partie, $\mathfrak{g}$ est de type A_2 avec matrice de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les racines simples sont notées α_1 et α_2. Les poids fondamentaux ϖ_1 et ϖ_2 sont $\varpi_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)$ et $\varpi_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)$.

Soit ξ une racine primitive 12-ième de l'unité telle que $\xi^4 = \zeta_3$. On considère $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi) \rtimes \mathscr{S}$ constituée des objets dont le degré est dans le sous-groupe de $P/6Q^\vee$ engendré par $\gamma = 4\varpi_1 + 3\varpi_2 = \frac{11}{3}\alpha_1 + \frac{7}{3}\alpha_2$, dont on vérifie que c'est un élément d'ordre 18. La chambre fondamentale est

$$\begin{aligned} C &= \left\{\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 \in P^+ \,\middle|\, \lambda_1 + \lambda_2 < 4\right\} \\ &= \{0, \varpi_2, 2\varpi_2, 3\varpi_2, \varpi_1, \varpi_1 + \varpi_2, \varpi_2 + 2\varpi_2, 2\varpi_1, 2\varpi_1 + \varpi_2, 3\varpi_1\}. \end{aligned}$$

La catégorie $\mathscr{C}$ admet alors 60 objets simples qui sont indexés par les poids

$$\left\{(-\mu + 2\eta, \mu) \,\middle|\, \eta \in C,\ \mu \in Q,\ -\mu + \eta \in \{k\gamma \mid 0 \leq k < 18\}\right\}.$$

Proposition 6.2.8. *La catégorie $\mathscr{C}$ a un centre symétrique équivalent à* $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, z)$*, où z est l'unique élément d'ordre* 2 *de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*. Il est engendré par l'objet $L_\xi(12\varpi_1 + 12\varpi_2, -12\varpi_1 - 6\varpi_2)$.*

On considère $\mathscr{D}$ la modularisation partielle de $\mathscr{C}$ obtenue en rendant l'objet $L_\xi(12\varpi_1 + 12\varpi_2, -12\varpi_1 - 6\varpi_2)^{\otimes 2}$ isomorphe à $\mathbf{1}$. Cette modularisation est alors légèrement dégénérée et le seul objet simple transparent différent de $\mathbf{1}$ est $\boldsymbol{\varepsilon} = L_\xi(12\varpi_1 + 12\varpi_2, -12\varpi_1 - 6\varpi_2)$. On choisit comme objets simples représentant les classes d'isomorphie de $\hat{\mathscr{D}}$

$$\{L_\xi(0,0), L_\xi(16\varpi_1+14\varpi_2,-16\varpi_1-10\varpi_2), L_\xi(17\varpi_1+12\varpi_2,-15\varpi_1-12\varpi_2),$$
$$L_\xi(10\varpi_1+6\varpi_2,-6\varpi_1-6\varpi_2), L_\xi(21\varpi_1+17\varpi_2,-19\varpi_1-13\varpi_2), L_\xi(3\varpi_2,3\varpi_2),$$
$$L_\xi(22\varpi_1+15\varpi_2,-18\varpi_1-15\varpi_2), L_\xi(\varpi_1+\varpi_2,\varpi_1+\varpi_2), L_\xi(12\varpi_1+9\varpi_2,-12\varpi_1-9\varpi_2),$$
$$L_\xi(4\varpi_1+5\varpi_2,-4\varpi_1-\varpi_2)\}$$

et avec cet ordre, la S-matrice de $\hat{\mathscr{D}}$ s'écrit

$$S_{\hat{\mathscr{D}}}=\begin{pmatrix}
1 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & -2\zeta_3^2 & 1 & -2\zeta_3^2 & 3 & -1 & -2\zeta_3\\
2\zeta_3 & -2 & -2\zeta_3^2 & -2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 0 & -2 & 2\zeta_3\\
2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 2 & 0 & -2 & 2\\
2\zeta_3^2 & -2 & -2\zeta_3 & -2 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 0 & -2 & 2\zeta_3^2\\
-2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3 & -2 & 0 & 2 & -2\\
1 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 & -2\zeta_3 & 1 & -2\zeta_3 & 3 & -1 & -2\zeta_3^2\\
-2\zeta_3^2 & 2\zeta_3^2 & 2 & 2\zeta_3 & -2 & -2\zeta_3 & -2\zeta_3^2 & 0 & 2 & -2\zeta_3\\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & -3 & 0\\
-1 & -2 & -2 & -2 & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2\\
-2\zeta_3 & 2\zeta_3 & 2 & 2\zeta_3^2 & -2 & -2\zeta_3^2 & -2\zeta_3 & 0 & 2 & -2\zeta_3^2
\end{pmatrix}.$$

Puisque la catégorie $\mathscr{D}$ est de super-dimension 36 et que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est $L_\xi(3\varpi_2,3\varpi_2)$, qui est de dimension 1, on normalise cette matrice par un facteur 6.

Théorème 6.2.9. *La S-matrice et la matrice du twist de la super-catégorie $\hat{\mathscr{D}}$ vérifient*

$$\frac{S_{\hat{\mathscr{D}}}}{6}=-S_{25-7} \quad \text{et} \quad T_{\hat{\mathscr{D}}}^{-1}=\mathrm{Fr}_{25-7}.$$

6.2.7 La cinquième famille de G_{26}

Notons ζ_3 une racine primitive cubique de l'unité. La matrice de Fourier associée à la cinquième famille de caractères unipotents de G_{26} est donnée par

$$S_{26-5}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}
1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2\\
1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2\\
1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & -\zeta_3^2-2\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2
\end{pmatrix}$$

les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{26-5}=\mathrm{diag}\left(1,1,\zeta_3^2,1,1,\zeta_3^2,1,1,\zeta_3^2,-1,-1,-\zeta_3^2\right),$$

et l'élément spécial est en première position. Remarquons qu'en conjuguant par la matrice

$$D=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,1,1)$$

la matrice de Fourier de la famille considérée est un produit de Kronecker de deux matrices de tailles respectives 4 et 3, et de même pour la matrice des valeurs propres du Frobenius :

$$S_{26-5} = D(S_{26-5'} \otimes S_{26-5''})D^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{26-5} = \mathrm{Fr}_{26-5'} \otimes \mathrm{Fr}_{26-5''},$$

où

$$S_{26-5'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{26-5'} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$$

et

$$S_{26-5''} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\ 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\ \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{26-5''} = \mathrm{diag}(1,1,\zeta_3^2).$$

En ce qui concerne la matrice $S_{26-5'}$, on l'obtient comme la S-matrice de la catégorie de modules de $D(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, que l'on a munie de la structure pivotale a_1, en ayant choisi l'ordre

$$V_{0,0}, V_{1,-1}, V_{1,0}, V_{0,-1}$$

pour les objets simples. Les valeurs propres du Frobenius coïncident avec les valeurs du twist de la catégorie $D(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-mod.

En ce qui concerne la matrice $S_{26-5''}$ ainsi que les valeurs propres du Frobenius $\mathrm{Fr}_{26-5''}$, on remarque qu'elles sont égales, à conjugaison par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$, aux matrices correspondantes de la famille non triviale de caractères unipotents du groupe de réflexions complexes $G(3,1,1)$. Une catégorification est alors donnée par le théorème 4.5.3.

6.2.8 Les cinquième et septièmes familles de G_{27}

Notons ζ_3 une racine primitive troisième de l'unité. La matrice de Fourier de la septième famille de caractères unipotents de G_{27} ainsi que les valeurs propres du Frobenius sont données par

$$S_{25-7} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\ 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\ \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Fr}_{25-7} = \mathrm{diag}(1,1,\zeta_3^2),$$

et l'élément spécial est en première position. En ce qui concerne la cinquième famille de caractères unipotents, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius s'obtiennent par conjugaison complexe.

Ces matrices correspondent, à conjugaison par une matrice diagonale à coefficients dans $\{\pm 1\}$, aux matrices de la donnée $\mathbb{Z}$-modulaires de la famille non triviale de caractères unipotents de $G(3,1,1)$ dont une catégorification est donnée par le théorème 4.5.3.

6.2.9 La huitième famille de G_{32} et la trente-deuxième famille de G_{34}

Notons ζ_{12} une racine primitive 12-ième de l'unité, $i=\zeta_{12}^3$ ainsi que $\zeta_3=\zeta_{12}^4$. La matrice de Fourier de la huitième famille de caractères unipotents de G_{32} est donnée par

$$S_{32-8}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}
1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
\zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
\zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3-1 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
\zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
\zeta_3^2-1 & 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-1 & \zeta_3-1 & 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-1 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \\
\zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3
\end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Fronbenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{32-8}=\mathrm{diag}\big(1,1,i,-i,1,1,i,-i,\zeta_3^2,\zeta_3^2,\zeta_{12}^{11},\zeta_{12}^5\big),$$

et l'élément spécial est en première position. La matrice de Fourier S_{34-32} de la trente-deuxième famille de caractères unipotents de G_{34} s'obtient en conjugant S_{32-8} par la matrice diagonale dont dix premiers coefficients sont égaux à 1 et les deux derniers à -1. En ce qui concerne les valeurs propres du Frobenius, on a $\mathrm{Fr}_{34-32}=\mathrm{Fr}_{32-8}$.

On peut écrire les matrices S_{34-32} et Fr_{34-32} comme des produits de Kronecker de matrices de tailles 3 et 4.

$$S_{34-32}=S_{34-32'}\otimes S_{34-32''}\quad \text{et}\quad \mathrm{Fr}_{34-32}=\mathrm{Fr}_{34-32'}\otimes\mathrm{Fr}_{34-32''},$$

où

$$S_{34-32'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3\\ 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2\\ \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^2\end{pmatrix},\quad \mathrm{Fr}_{34-32'}=\mathrm{diag}\big(1,1,\zeta_3^2\big)$$

et

$$S_{34-32''}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Fr}_{34-32''}=\mathrm{diag}(1,1,i,-i).$$

Des catégorifications de ces deux données modulaires ont déja été données dans les sous-parties 6.2.7 et 6.1.2.

6.2.10 La neuvième famille de G_{32}

Notons ζ_3 une racine primitive troisième de l'unité. La matrice de Fourier de la neuvième famille de caractères unipotents de G_{32} est donnée par

$$S_{32-9} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & 1 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3 & \zeta_3^2 & -\zeta_3 & -1 \\ 1 & -\zeta_3 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 \\ \zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3 & -\zeta_3 & 1 & \zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 \\ -\zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3 & -\zeta_3^2 & \zeta_3 & -\zeta_3^2 & -1 \\ -\zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & -\zeta_3^2 & 1 & -1 & -1 \\ \zeta_3^2 & -\zeta_3 & -1 & -\zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3^2 & \zeta_3 & 1 \\ -\zeta_3 & \zeta_3^2 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3^2 & -1 & \zeta_3 & -\zeta_3^2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{32-9} = \mathrm{diag}\big(1, 1, \zeta_3^2, 1, 1, \zeta_3^2, \zeta_3^2, \zeta_3^2, \zeta_3\big).$$

L'élément spécial est en première position.

Ces deux matrices peuvent s'écrire comme des carrés tensoriels :

$$S_{32-9} = S_{32-9'} \otimes S_{32-9'} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{32-9} = \mathrm{Fr}_{32-9'} \otimes \mathrm{Fr}_{32-9'},$$

où

$$S_{32-9'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \zeta_3 - 1 & \zeta_3^2 - 1 & \zeta_3 - \zeta_3^2 \\ \zeta_3^2 - 1 & \zeta_3 - 1 & \zeta_3^2 - \zeta_3 \\ \zeta_3 - \zeta_3^2 & \zeta_3^2 - \zeta_3 & \zeta_3^2 - \zeta_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{32-9'} = \mathrm{diag}\big(1, 1, \zeta_3^2\big).$$

On reconnait, à conjugaison par une matrice diagonale à coefficient dans $\{\pm 1\}$, la donnée modulaire associée à la famille non triviale de caractères unipotents du groupe cyclique $G(3,1,1)$. Une catégorification est alors donnée par le théorème 4.5.3.

6.2.11 La onzième famille de G_{32}

Notons ζ_3 une racine primitive troisième de l'unité. La famille de caractères unipotents étant de taille 45, on ne va pas écrire directement la matrice de Fourier ainsi que les valeurs propres du Frobenius. Néanmoins, à conjugaison par une matrice diagonale D à coefficients dans $\{\pm 1\}$, la matrice de Fourier ainsi que la matrice diagonale des valeurs propres du Frobenius s'écrivent comme un produit de Kronecker de matrices de tailles 5 et 9

$$D S_{32-11} D = S_{32-11'} \otimes S_{32-11''} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{32-11} = \mathrm{Fr}_{32-11'} \otimes \mathrm{Fr}_{32-11''},$$

où

$$S_{32-11'} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \zeta_3^2 - \zeta_3 & 3 & -3 & 2\zeta_3^2 - 2\zeta_3 & \zeta_3 - \zeta_3^2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 2\zeta_3^2 - 2\zeta_3 & 0 & 0 & 2\zeta_3 - 2\zeta_3^2 & 2\zeta_3 - 2\zeta_3^2 \\ \zeta_3 - \zeta_3^2 & 3 & -3 & 2\zeta_3 - 2\zeta_3^2 & \zeta_3^2 - \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Fr}_{32-11'} = \mathrm{diag}\big(1, 1, -1, \zeta_3^2, 1\big)$$

et

$$S_{32-11''}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1&1&1&1&-1\\1&1&-1&\zeta_3&-\zeta_3&\zeta_3&\zeta_3^2&\zeta_3^2&-\zeta_3^2\\-1&-1&1&-\zeta_3^2&\zeta_3^2&-\zeta_3^2&-\zeta_3&-\zeta_3&\zeta_3\\1&\zeta_3&-\zeta_3^2&1&-\zeta_3&\zeta_3^2&1&\zeta_3&-\zeta_3^2\\-1&-\zeta_3&\zeta_3^2&-\zeta_3&\zeta_3^2&-1&-\zeta_3^2&-1&\zeta_3\\1&\zeta_3&-\zeta_3^2&\zeta_3^2&-1&\zeta_3&\zeta_3&\zeta_3^2&-1\\1&\zeta_3^2&-\zeta_3&1&-\zeta_3^2&\zeta_3&1&\zeta_3^2&-\zeta_3\\1&\zeta_3^2&-\zeta_3&\zeta_3&-1&\zeta_3^2&\zeta_3^2&\zeta_3&-1\\-1&-\zeta_3^2&\zeta_3&-\zeta_3^2&\zeta_3&-1&-\zeta_3&-1&\zeta_3^2\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{Fr}_{32-11''}=\mathrm{diag}\big(1,1,1,1,\zeta_3,\zeta_3^2,1,\zeta_3^2,\zeta_3\big).$$

De plus, l'élément spécial de la onzième famille de caractères unipotents de G_{32} est en première position.

En ce qui concerne les matrices $S_{32-11'}$ et $\mathrm{Fr}_{32-11'}$, une explication catégorique a été donnée dans la sous-partie 6.2.1. En ce qui concerne les matrices $S_{32-11''}$ et $\mathrm{Fr}_{32-11''}$, à conjugaison par une matrice diagonale près, on retrouve encore la donnée modulaire associée à la catégorie de modules sur l'algèbre $D(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

6.2.12 La neuvième famille de G_{34}

Notons ζ_{12} une racine primitive 12-ième de l'unité, $i=\zeta_{12}^3$ ainsi que $\zeta_3=\zeta_{12}^4$. La matrice de Fourier de la neuvième famille de caractères unipotents de G_{34} est donnée par

$$S_{34-9}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}
1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&\zeta_3^2-1&1-\zeta_3&1-\zeta_3&\zeta_3-1&\zeta_3-1&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3\\
1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3&1-\zeta_3&1-\zeta_3&1-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&-\zeta_3^2+\zeta_3\\
\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&\zeta_3-1&1-\zeta_3&\zeta_3-1&1-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&\zeta_3-1&1-\zeta_3&1-\zeta_3&\zeta_3-1&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3\\
1-\zeta_3&1-\zeta_3&\zeta_3-1&\zeta_3-1&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&\zeta_3^2-1&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2\\
1-\zeta_3&1-\zeta_3&1-\zeta_3&1-\zeta_3&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3-1&1-\zeta_3&\zeta_3-1&1-\zeta_3&\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3-1&1-\zeta_3&1-\zeta_3&\zeta_3-1&\zeta_3^2-1&1-\zeta_3^2&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-1&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2\\
\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3\\
\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2
\end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{34-9}=\mathrm{diag}\big(1,1,i,-i,1,1,i,-i,\zeta_3,\zeta_3,\zeta_{12}^7,\zeta_{12}\big).$$

L'élément spécial est en première position.

Ces deux matrices peuvent s'écrire comme des produits de Kronecker

$$S_{34-9}=S_{34-9'}\otimes S_{34-9''}\quad\text{et}\quad\mathrm{Fr}_{34-9}=\mathrm{Fr}_{34-9'}\otimes\mathrm{Fr}_{34-9''},$$

où

$$S_{34-9'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\zeta_3^2&1-\zeta_3&\zeta_3-\zeta_3^2\\1-\zeta_3&1-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3\\\zeta_3-\zeta_3^2&\zeta_3^2-\zeta_3&\zeta_3^2-\zeta_3\end{pmatrix},\quad\mathrm{Fr}_{34-9'}=\mathrm{diag}(1,1,\zeta_3),$$

et

$$S_{34-9''}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mathrm{Fr}_{34-9''}=\mathrm{diag}(1,1,i,-i).$$

À conjugaison par une matrice diagonale près, les matrices $S_{34-9'}$ et $\mathrm{Fr}_{34-9'}$ sont égales aux conjuguées complexes des matrices de la donnée modulaire de la famille non triviale du groupe $G(3,1,1)$, dont une catégorification est donnée par le théorème 4.5.3. En ce qui concerne les matrices $S_{34-9''}$ et $\mathrm{Fr}_{34-9''}$, une explication catégorique a été donnée dans la sous-partie 6.1.2.

6.3 Des catégorifications par des catégories de modules basculants en type B

6.3.1 Les deuxième et sixième familles de G_{24}

Notons ζ_7 une racine primitive septième de l'unité et $\sqrt{-7}=\zeta_7+\zeta_7^2-\zeta_7^3+\zeta_7^4-\zeta_7^5-\zeta_7^6$. La matrice de Fourier de la sixième famille est

$$S_{24-6}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -\sqrt{-7} & \sqrt{-7} & 7 & 7 & -2\sqrt{-7} & -2\sqrt{-7} & -2\sqrt{-7} \\ \sqrt{-7} & -\sqrt{-7} & 7 & 7 & 2\sqrt{-7} & 2\sqrt{-7} & 2\sqrt{-7} \\ 7 & 7 & 7 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{-7} & 2\sqrt{-7} & 0 & 0 & 2\zeta_7^6+4\zeta_7^4-4\zeta_7^3-2\zeta_7 & -4\zeta_7^6+2\zeta_7^5-2\zeta_7^2+4\zeta_7 & -4\zeta_7^5-2\zeta_7^4+2\zeta_7^3+4\zeta_7^2 \\ -2\sqrt{-7} & 2\sqrt{-7} & 0 & 0 & -4\zeta_7^6+2\zeta_7^5-2\zeta_7^2+4\zeta_7 & -4\zeta_7^5-2\zeta_7^4+2\zeta_7^3+4\zeta_7^2 & 2\zeta_7^6+4\zeta_7^4-4\zeta_7^3-2\zeta_7 \\ -2\sqrt{-7} & 2\sqrt{-7} & 0 & 0 & -4\zeta_7^5-2\zeta_7^4+2\zeta_7^3+4\zeta_7^2 & 2\zeta_7^6+4\zeta_7^4-4\zeta_7^3-2\zeta_7 & -4\zeta_7^6+2\zeta_7^5-2\zeta_7^2+4\zeta_7 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres du Frobenius sont données par la matrice diagonale

$$\mathrm{Fr}_{24-6}=\mathrm{diag}\big(1,1,1,-1,\zeta_7^3,\zeta_7^5,\zeta_7^6\big),$$

et l'élément spécial est en première position.

La matrice de Fourier et les valeurs propres de la deuxième famille sont obtenues en conjuguant la matrice de Fourier et les valeurs propres de la sixième famille, l'élément spécial est toujours en première position.

Dans sa thèse [Cu05, Section 8.2.1 Beispiel 15], Cuntz a donné une construction de l'anneau de fusion associé à cette famille à l'aide de l'algèbre de Verlinde de type B_3 à une racine 28-ième de l'unité. Soit alors ξ une racine primitive 28-ième de l'unité telle que $\xi^4=\zeta_7$ et considérons la catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ pour $\mathfrak{g}$ de type B_3.

Notations. *Dans cette partie, $\mathfrak{g}$ est de type B_3 avec matrice de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La racine simple courte est notée α_1 tandis que les deux longues sont notées α_2 et α_3. Les poids fondamentaux sont $\varpi_1=\frac{3}{2}\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$, $\varpi_2=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$ et $\varpi_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

La catégorie $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ est graduée par $P/((14Q^\vee)\cap Q)$. Comme remarqué dans la preuve de 4.3.16, on a $14Q^\vee\subseteq Q$. On considère la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}$ de $\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ constituée des objets dont le degré est dans le sous-groupe de $P/14Q^\vee$ engendré par $7\varpi_1$. L'expression de ϖ_1 sur la base $(\alpha_i^\vee)_{1\leq i\leq 3}$ de $Q^\vee$ étant $\varpi_1=\frac{3}{2}\alpha_1^\vee+2\alpha_2^\vee+\alpha_3^\vee$, on déduit que ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et contient les éléments $\{0, 7\varpi_1, 14\varpi_1, 21\varpi_1\}$. La chambre fondamentale C est

$$C = \left\{\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \lambda_3\varpi_3 \in P^+ \,\middle|\, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 < 3\right\} = \{0, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, 2\varpi_1, 2\varpi_3, \varpi_1 + \varpi_3\}$$

et ainsi il y a 14 objets simples dans $\mathscr{C}$ qui sont

- en degré 0 : $(0,0), (\varpi_2, \varpi_2), (\varpi_3, \varpi_3), (2\varpi_1, 2\varpi_1)$ et $(2\varpi_3, 2\varpi_3)$,
- en degré $7\varpi_1$: $(8\varpi_1, -6\varpi_1)$ et $(8\varpi_1 + \varpi_3, -6\varpi_1 + \varpi_3)$,
- en degré $14\varpi_1$: $(14\varpi_1, -14\varpi_1), (14\varpi_1 + \varpi_2, -14\varpi_1 + \varpi_2), (14\varpi_1 + \varpi_3, -14\varpi_1 + \varpi_3)$, $(16\varpi_1, -12\varpi_1)$ et $(14\varpi_1 + 2\varpi_3, -14\varpi_1 + 2\varpi_3)$
- en degré $21\varpi_1$: $(22\varpi_1, -20\varpi_1)$ et $(22\varpi_1 + \varpi_3, -20\varpi_1 + \varpi_1)$.

Proposition 6.3.1. *La catégorie $\mathscr{C}$ est légèrement dégénérée. L'objet simple transparent non trivial est $L_\xi(14\varpi_1 + 2\varpi_3, -14\varpi_1 + 2\varpi_3)$, qui est de dimension -1 et de twist 1.*

Choisissons les représentants suivants des orbites de l'ensemble des objets simples sous l'action de tensorisation par le centre symétrique :

$$\big\{L_\xi(0,0), L_\xi(14\varpi_1, -14\varpi_1), L_\xi(22\varpi_1, -20\varpi_1), L_\xi(22\varpi_1 + \varpi_1, -20\varpi_1 + \varpi_3),$$
$$L_\xi(\varpi_3, \varpi_3), L_\xi(\varpi_2, \varpi_2), L_\xi(2\varpi_1, 2\varpi_1)\big\}.$$

Avec cet ordre, la S-matrice de la super-catégorie associée $\hat{\mathscr{C}}$ est donnée par

$$S_{\hat{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{-7} & \sqrt{-7} & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & \sqrt{-7} & \sqrt{-7} & -2 & -2 & -2 \\ \sqrt{-7} & \sqrt{-7} & \sqrt{-7} & -\sqrt{-7} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-7} & \sqrt{-7} & -\sqrt{-7} & \sqrt{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2\zeta_7^6 + 2\zeta_7 & 2\zeta_7^5 + 2\zeta_7^2 & 2\zeta_7^4 + 2\zeta_7^3 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2\zeta_7^5 + 2\zeta_7^2 & 2\zeta_7^4 + 2\zeta_7^3 & 2\zeta_7^6 + 2\zeta_7 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2\zeta_7^4 + 2\zeta_7^3 & 2\zeta_7^6 + 2\zeta_7 & 2\zeta_7^5 + 2\zeta_7^2 \end{pmatrix}$$

et les valeurs du twist sont données par la matrice diagonale

$$T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \operatorname{diag}\big(1, 1, 1, -1, \zeta_7^3, \zeta_7^5, \zeta_7^6\big)$$

Cette catégorie n'est pas sphérique et on peut vérifier que l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est $L_\xi(14\varpi_1, -14\varpi_1)$, qui est de dimension quantique -1. On renormalise alors la S-matrice par une racine carrée de $-28 = \operatorname{sdim}(\mathscr{C})\dim^+(\bar{\mathbf{1}})$.

Théorème 6.3.2. *La S-matrice et la matrice du twist de la super-catégorie $\hat{\mathscr{C}}$ vérifient*

$$\frac{S_{\hat{\mathscr{C}}}}{i\sqrt{28}} = S_{24-6} \quad et \quad T_{\hat{\mathscr{C}}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{24-6},$$

où $i = \xi^7$.

6.3.2 Les deuxième et dixième familles de G_{27}

Ces deux familles sont conjuguées l'une de l'autre. On ne décrit que la dixième famille, les matrices de Fourier et les valeurs propres du Frobenius de la deuxième famille s'obtiennent par conjugaison complexe.

Les matrices de Fourier ainsi que la matrice diagonale des valeurs propres du Frobenius se décomposent comme des produits de Kronecker. On note alors $S_{27-10} = S_{27-10'} \otimes S_{27-10''}$ et $\mathrm{Fr}_{27-10} = \mathrm{Fr}_{27-10'} \otimes \mathrm{Fr}_{27-10''}$.

Commençons par la première tensorande. La matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius sont données par

$$S_{27-10'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-\zeta_3 & 1-\zeta_3^2 & \zeta_3-\zeta_3^3 \\ 1-\zeta_3^2 & 1-\zeta_3 & \zeta_3^2-\zeta_3 \\ \zeta_3-\zeta_3^2 & \zeta_3^2-\zeta_3 & \zeta_3-\zeta_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{27-10'} = \mathrm{diag}\big(1,1,\zeta_3^2\big)$$

où ζ_3 est une racine primitive troisième de l'unité. On vérifie facilement que cette donnée modulaire coïncide avec celle associée à la famille non triviale du groupe de réflexions complexes cyclique $G(3,1,1)$. L'élément spécial est en première position. Une catégorification est alors donnée, d'après le théorème 4.5.3, par la catégorie $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et ξ vérifiant $\xi^2 = \zeta_3^{-1}$.

En ce qui concerne la seconde tensorande, la matrice de Fourier et les valeurs propres du Frobenius sont données par

$$S_{27-10''} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & -5 & -5 \\ -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 5 & 5 \\ 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(3\zeta_5^4+2\zeta_5^3+2\zeta_5^2+3\zeta_5) & 2(-2\zeta_5^4-3\zeta_5^3-3\zeta_5^2-2\zeta_5) & 0 & 0 \\ 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(-\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5) & 2(-2\zeta_5^4-3\zeta_5^3-3\zeta_5^2-2\zeta_5) & 2(3\zeta_5^4+2\zeta_5^3+2\zeta_5^2+3\zeta_5) & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Fr}_{27-10''} = \mathrm{diag}\big(1,1,\zeta_5^3,\zeta_5^2,-1,1\big),$$

où ζ_5 est une racine primitive 5-ième de l'unité, l'élément spécial est en première position.

> **Notation.** *Dans cette partie, $\mathfrak{g}$ est de type B_2 avec matrice de Cartan*
>
> $$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
>
> *La racine simple courte est notée α_1 et la longue α_2. Les poids fondamentaux sont $\varpi_1 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$ et $\varpi_2 = \alpha_1 + \alpha_2$.*

Soit ξ une racine primitive 20-ième de l'unité telle que $\xi^4 = \zeta_5$ et on considère la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathbb{Z}(\mathcal{T}_\xi) \rtimes \mathcal{S}$ avec objets de degré dans le sous-groupe de $P/10Q^\vee$ engendré par $5\varpi_1$. Ce dernier est de cardinal 2 puisque $10\varpi_1 = 10(\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee)$. La chambre fondamentale $\mathcal{C}$ est donnée par

$$C = \left\{\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 \in P^+ \,\middle|\, \lambda_1 + \lambda_2 < 3\right\} = \{0, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_1 + \varpi_2, 2\varpi_1, 2\varpi_2\}.$$

La catégorie $\mathcal{C}$ a pour objets simples les 6 suivants :

— en degré 0 : $(0,0), (\varpi_2,\varpi_2), (2\varpi_1, 2\varpi_1)$ et $(2\varpi_2, 2\varpi_2)$,

— en degré $5\varpi_1$: $(6\varpi_1, -4\varpi_1)$ et $(6\varpi_1 + \varpi_2, -4\varpi_1 + \varpi_2)$.

Avec cet ordre, la S-matrice et la matrice diagonale des valeurs du twist sont

$$S_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 & \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 \\ 2 & 2 & 2\zeta_5^4+2\zeta_5 & 2\zeta_5^3+2\zeta_5^2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\zeta_5^3+2\zeta_5^2 & 2\zeta_5^4+2\zeta_5 & 0 & 0 \\ \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & 0 & 0 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 \\ \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 & 0 & 0 & \zeta_5^4-\zeta_5^3-\zeta_5^2+\zeta_5 & -\zeta_5^4+\zeta_5^3+\zeta_5^2-\zeta_5 \end{pmatrix},$$

et les valeurs du twist sont données par

$$T_{\mathscr{C}}^{-1} = \operatorname{diag}\left(1, 1, \zeta_5^3, \zeta_5^2, -1, 1\right).$$

La dimension quantique de $\mathscr{C}$ est 20 et cette catégorie est sphérique, tout objet étant autodual.

Théorème 6.3.3. *La S-matrice et la matrice la matrice diagonale des valeurs du twist de la catégorie modulaire $\mathscr{C}$ vérifient*

$$\frac{S_{\mathscr{C}}}{\sqrt{20}} = -S_{27-10''} \qquad T_{\mathscr{C}}^{-1} = \mathrm{Fr}_{27-10''}.$$

Annexe A

Double de Drinfeld tordu d'un groupe fini

On introduit dans cette annexe la quasi-algèbre de Hopf $D^\omega(G)$ de [DPR90] associée à un groupe fini G et à un 3-cocycle ω. On donne tout d'abord une preuve de la formule de la S-matrice [CGR00] et ensuite on change la structure sphérique par le biais d'un élément central de type groupe. On travaille sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et on note $\mu_\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

A.1 La quasi-algèbre de Hopf $D^\omega(G)$

En ce qui concerne les quasi-algèbres et leurs variantes, on peut se reporter à [Ka95, Chapter XV]. Quasiment par définition, étant donné une quasi-algèbre de Hopf H, la catégorie des H-modules de dimension finie H-mod est une catégorie monoïdale et rigide. Il existe une notion d'élément pivot dans de telles algèbres (cf. [AC92] pour la notion de ruban, on relâche la condition $S(v) = v$ pour un pivot) et une notion de quasi-algèbre de Hopf tressée. La catégorie des représentations de dimension finie d'une quasi-algèbre de Hopf tressée munie d'un pivot est alors une catégorie monoïdale, rigide, pivotale et tressée.

Les quasi-algèbres de Hopf qui nous intéressent particulièrement ici sont les doubles de Drinfeld tordus de groupes finis $D^\omega(G)$, introduits dans [DPR90]. On fixe G un groupe fini et $\omega\colon G\times G\times G \to \mu_\mathbb{C}$ un 3-cocycle normalisé, c'est-à-dire que pour tous g, h, k et $l \in G$, on a

$$\omega(h,k,l)\omega(gh,k,l)^{-1}\omega(g,hk,l)\omega(g,h,kl)^{-1}\omega(g,h,k)=1,$$

$\omega(g,h,k)=1$ dès que g, h ou k est l'élément neutre et ω.

L'algèbre $D^\omega(G)$ admet, tout comme sa version non tordue $D(G)$, la famille $(e_g h)_{g,h\in G}$ comme base. La multiplication sur la base est donnée par

$$(e_g h)(e_k l) = \delta_{g,hkh^{-1}}\theta_g(h,l)e_g hl,$$

où $\theta_g(h,l) = \omega(g,h,l)\omega(h,h^{-1}gh,l)^{-1}\omega(h,l,(hl)^{-1}ghl)$. En utilisant le fait que ω est un 3-cocycle, on voit que ce produit est effectivement associatif et admet l'élément $\sum_{g\in G} e_g 1$ comme élément neutre.

Cette algèbre dispose d'un coproduit Δ donné sur la base par

$$\Delta(e_g h) = \sum_{ab=g} \gamma_h(a,b)e_a h \otimes e_b h,$$

où $\gamma_g(a,b) = \omega(a,b,g)\omega(a,g,g^{-1}bg)^{-1}\omega(g,g^{-1}ag,g^{-1}bg)$.

Tout comme dans le cas non-tordu, tout $D^\omega(G)$-module V dispose d'une graduation par le groupe G, la composante V_g de degré g étant donnée par l'action de l'idempotent $e_g 1$, et on a de plus $e_g h \cdot V_k \subset V_{hkh^{-1}}$.

La catégorie $D^\omega(G)$ est alors une catégorie de fusion (cf. [AC92, Section 5, Remarks] pour la semi-simplicité de la catégorie), et les objets simples ont un paramétrage similaire à ceux de la catégorie $D(G)$-mod : les simples sont en bijection avec l'ensemble des paires (g,ρ), à conjugaison près, où $g \in G$ et ρ est une représentation projective de $Z_G(g)$ pour le 2-cocycle θ_g (on vérifie effectivement que θ_g est un 2-cocycle sur $Z_G(g)$). On note $V_{g,\rho}$ la représentation de $D^\omega(G)$ associée. On peut alors la décrire comme suit : on se donne V_ρ un espace sur lequel $Z_G(g)$ agit par la représentation ρ. On fait de V_ρ une représentation de l'algèbre $D_G^\omega(Z_G(g))$ engendrée par les éléments $e_a b$, $a \in G$ et $b \in Z_G(g)$ en définissant

$$e_a b \cdot v = \delta_{a,g} b \cdot v,$$

pour $v \in V_\rho, a \in G$ et $b \in Z_G(g)$. La représentation $V_{g,\rho}$ est alors $D^\omega(G) \otimes_{D_G^\omega(Z_G(g))} V_\rho$. Pour $a, b \in G$ et $v \in V$, en écrivant $b = cd, d \in Z_G(g)$, on a

$$e_a b \otimes v = e_a c d \otimes v = \theta_g(c,d)^{-1} e_a b \otimes ((e_{b^{-1}ab} c) \cdot v),$$

et donc $e_a b \otimes v$ est nul sauf si a est dans la classe de conjugaison de g. En choisissant pour tout $a \in [g]$ un élément $g_a \in G$ tel que $a = g_a g g_a^{-1}$, on a

$$V_{g,\rho} = \bigoplus_{a \in [g]} e_a g_a \otimes_{D_G^\omega(Z_G(g))} V.$$

La catégorie $D^\omega(G)$-mod est également une catégorie enrubannée, le ruban θ étant donné par l'action de l'inverse de l'élément

$$v = \sum_{g \in G} \omega(g^{-1}, g, g^{-1}) e_g g^{-1},$$

dont on vérifie qu'il est égal à $\theta = \sum_{g \in G} e_g g$. La trace quantique est alors donnée par la trace habituelle [AC92, 4.16, 5.18].

Proposition A.1.1 ([CGR00, (5.23)]). *Pour tous g et h éléments de G et toutes représentations projectives ρ de $Z_G(g)$ pour le cocycle θ_g et π de $Z_G(h)$ pour le cocycle θ_h, la S-matrice est donnée par*

$$S_{(g,\rho),(h,\pi)} = \sum_{\substack{a \in [g] \\ b \in [h] \\ ab = ba}} \frac{\theta_g(g_a^{-1}, b)\theta_g(g_a^{-1}b, g_a)\theta_h(h_b^{-1}, a)\theta_h(h_b^{-1}a, h_b)}{\theta_g(g_a^{-1}, g_a)\theta_h(h_b^{-1}, h_b)} \chi_\rho(g_a^{-1} b g_a)\chi_\pi(h_b^{-1} a h_b),$$

en choisissant pour chaque $a \in [g]$ un élément $g_a \in G$ tel que $a = g_a g g_a^{-1}$ et pour chaque $b \in [h]$ un élément $h_b \in G$ tel que $b = h_b h h_b^{-1}$. Le twist est donné par la multiplication par le scalaire

$$\theta_{V_{g,\rho}} = \omega_\rho(g).$$

Remarque A.1.2. Ces formules apparaissent dans [CGR00], mais une preuve n'est pas donnée dans le cas général. Dans [GM18], une preuve de ces formules est donnée, et on en donne ici une autre, qui suit les mêmes lignes que la preuve du calcul de la S-matrice et du twist dans la catégorie $D(G)$-mod.

Remarque A.1.3. La formule donnée ici diffère de celle de [CGR00] par une conjugaison complexe. Ceci est dû au fait que la convention choisie ici pour la S-matrice est différente. La S-matrice de [CGR00] est la matrice $(S_{(g^{-1},\rho^*),(h,\pi)})$.

Démonstration. On reprend la stratégie de la preuve de la proposition 3.2.3. On commence par calculer l'action de θ sur la représentation simple $V_{g,\rho}$. Comme θ est central, il suffit de calculer son action sur $1\otimes v$, qui est en degré g. Comme $e_a b\otimes v$ est en degré bgb^{-1} on obtient

$$\theta\cdot 1\otimes v=\sum_{b\in Z_G(g)} e_b b\otimes v=\sum_{b\in Z_G(g)} 1\otimes\delta_{b,g} b\cdot v=\omega_\rho(g)1\otimes v,$$

la dernière égalité provenant du fait que g est central dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}_{\theta_g}Z_G(g)$ tordue par le 2-cocycle θ_g.

Pour $g,h\in G$, ρ une représentation irréductible de $Z_G(g)$ d'espace V et pour π une représentation irréductible de $Z_G(h)$ d'espace W, on calcule la trace du twist θ sur $V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}$. Soient $a\in[g]$, $b\in[h]$, $v\in V$ et $w\in W$. Par définition du coproduit, on a

$$\theta\cdot((e_a g_a\otimes v)\otimes(a_b h_b\otimes w))=\sum_{k\in G}\sum_{xy=k}\gamma_k(x,y)((e_x k e_a g_a)\otimes v)\otimes((e_y k e_b h_b)\otimes w)$$

En utilisant la définition du produit, on voit que le seul terme non nul de cette somme est obtenu pour $k=ab$, $x=abab^{-1}a^{-1}$ et $y=aba^{-1}$ et que c'est alors un élément dans $V_{(g,\rho),abab^{-1}a}\otimes V_{(h,\pi),aba^{-1}}$. Comme $(e_a g_a\otimes v)\otimes(a_b h_b\otimes w)$ est un élément dans $V_{(g,\rho),a}\otimes V_{(h,\pi),b}$, les seuls termes contribuant à la trace sont ceux pour lesquels $ab=ba$. Dans ce cas, θ agit comme suit :

$$\theta\cdot((e_a g_a\otimes v)\otimes(a_b h_b\otimes w))=\frac{\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b)}{\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)}\\ (e_a g_a\otimes(g_a^{-1}abg_a\cdot v))\otimes(e_b h_b\otimes(h_a^{-1}bah_b\cdot w)),$$

et ainsi la trace du twist sur $V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}$ est égale à

$$\mathrm{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}})=\sum_{\substack{a\in[g]\\ b\in[h]\\ ab=ba}}\frac{\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b)}{\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)}\chi_\rho(gg_a^{-1}bg_a)\chi_\pi(hh_b^{-1}bh_b).$$

Comme g est un élément central de l'algèbre tordue $\mathbb{C}_{\theta_g}Z_G(g)$, il agit sur V par multiplication par le scalaire $\omega_\rho(g)$ et on obtient

$$\chi_\rho(gg_a^{-1}bg_a)=\theta_g(g,g_a^{-1}bg_a)^{-1}\omega_\rho(g)\chi_\rho(g_a^{-1}bg_a),$$

et de même

$$\chi_\pi(hh_b^{-1}ah_b)=\theta_h(h,h_b^{-1}ah_b)^{-1}\omega_\pi(h)\chi_\pi(h_b^{-1}ah_b).$$

La S-matrice étant donnée par $S_{(g,\rho),(h,\pi)} = \theta^{-1}_{V_{g,\rho}}\theta^{-1}_{V_{h,\pi}}\operatorname{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}})$, on obtient finalement

$$S_{(g,\rho),(h,\pi)} = \sum_{\substack{a\in[g]\\ b\in[h]\\ ab=ba}} \frac{\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b)}{\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)\theta_g(g,g_a^{-1}bg_a)\theta_h(h,h_b^{-1}ah_b)} \chi_\rho(g_a^{-1}bg_a)\chi_\pi(h_b^{-1}ah_b).$$

Afin de retrouver la formule donnée dans l'énoncé, on fait de nombreuses manipulations avec les cocycles, en utilisant de manière répétée la relation

$$\theta_t(x,y)\theta_t(xy,z) = \theta_t(x,yz)\theta_{x^{-1}tx}(y,z), \tag{A.1}$$

valable pour tous $t,x,y,z\in G$. On commence par remarquer que par définition $\gamma_{ab}(a,b) = \theta_a(a,b)\theta_b(b,a)$ et donc le numérateur est égal à

$$\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b) = \theta_a(a,b)\theta_b(b,a)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b).$$

En appliquant deux fois la relation (A.1), on trouve alors

$$\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b) = \theta_a(a,bg_a)\theta_a(b,g_a)\theta_b(b,ah_b)\theta_b(a,h_b).$$

En ce qui concerne le dénominateur, la relation (A.1) donne

$$\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_g(g,g_a^{-1}bg_a) = \theta_a(g_a,g)\theta_a(g_ag,g_a^{-1}bg_a),$$

et

$$\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)\theta_h(h,h_b^{-1}ah_b) = \theta_b(h_b,h)\theta_b(h_bh,h_b^{-1}ah_b).$$

Ainsi

$$\frac{\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b)}{\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)\theta_g(g,g_a^{-1}bg_a)\theta_h(h,h_b^{-1}ah_b)} = \frac{\theta_a(a,bg_a)\theta_a(b,g_a)\theta_b(b,ah_b)\theta_b(a,h_b)}{\theta_a(g_a,g)\theta_a(g_ag,g_a^{-1}bg_a)\theta_b(h_b,h)\theta_b(h_bh,h_b^{-1}ah_b)}$$

Or la relation (A.1) donne

$$\theta_a(g_ag,g_a^{-1}bg_a)\theta_g(g_a^{-1},bg_a) = \theta_a(a,bg_a)\theta_a(g_ag,g_a^{-1})$$

et de même

$$\theta_b(h_bh,h_b^{-1}ah_b)\theta_h(h_b^{-1},ah_b) = \theta_b(b,ah_b)\theta_b(h_bh,h_b^{-1}),$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\theta_a(a,bg_a)\theta_a(b,g_a)\theta_b(b,ah_b)\theta_b(a,h_b)}{\theta_a(g_a,g)\theta_a(g_ag,g_a^{-1}bg_a)\theta_b(h_b,h)\theta_b(h_bh,h_b^{-1}ah_b)} = \frac{\theta_g(g_a^{-1},bg_a)\theta_h(h_b^{-1},ah_b)\theta_a(b,g_a)\theta_b(a,h_b)}{\theta_a(g_ag,g_a^{-1})\theta_b(h_bh,h_b^{-1})\theta_a(g_a,g)\theta_b(h_b,b)}$$

Comme $\theta_a(g_a, g) = \theta_a(a, g_a)$ et $\theta_b(h_b, h) = \theta_b(b, h_b)$, en utilisant la relation (A.1) deux fois au numérateur et deux fois au dénominateur, on obtient finalement que

$$\frac{\gamma_{ab}(a,b)\theta_a(ab,g_a)\theta_b(ba,h_b)}{\theta_a(g_a,g_a^{-1}abg_a)\theta_b(h_b,h_b^{-1}bah_b)\theta_g(g,g_a^{-1}bg_a)\theta_h(h,h_b^{-1}ah_b)} = \frac{\theta_g(g_a^{-1},b)\theta_g(g_a^{-1}b,g_a)\theta_h(h_b^{-1},a)\theta_h(h_b^{-1}a,h_b)}{\theta_g(g_a^{-1},g_a)\theta_h(h_b^{-1},h_b)},$$

ce qui nous permet de conclure. □

A.2 Changement de structure pivotale

La structure pivotale donnée jusqu'ici est sphérique, on peut alors tordre le twist θ par la multiplication par un élément central de type groupe de $D^\omega(G)$, dont on peut donner une description comme dans le cas non tordu (cf. lemme 3.2.1).

Lemme A.2.1. *Soit x un élément de type groupe dans $D^\omega(G)$. Il existe alors $g_0 \in G$ et $\alpha\colon G \to \mu_{\mathbb{C}}$ tels que $\gamma_{g_0}(g,h) = \frac{\alpha(g)\alpha(h)}{\alpha(gh)}$ pour tous $g,h \in G$ et*

$$x = \sum_{g\in G} \alpha(g) e_g g_0.$$

De plus l'élément $\sum_{g\in G} \alpha(g)e_g g_0$ comme ci-dessus est central si et seulement si g_0 est dans le centre de G.

Démonstration. En ce qui concerne la forme d'un élément de type groupe, la même preuve que celle du lemme 3.2.1 montre l'existence de g_0 et α comme énoncé.

Pour a et b des éléments de G, on calcule les deux produits $e_a b\left(\sum_{g\in G}\alpha(g)e_g g_0\right)$ et $\left(\sum_{g\in G}\alpha(g)e_g g_0\right)e_a b$. Le premier produit est égal à

$$e_a b\left(\sum_{g\in G}\alpha(g)e_g g_0\right) = \alpha(b^{-1}ab)\theta_a(b,g_0)e_a g_0 b,$$

tandis que le second produit est égal à

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha(g)e_g g_0\right)e_a b = \alpha(g_0 a g_0^{-1})\theta_{g_0 a g_0^{-1}}(g_0,b)e_{g_0 a g_0^{-1}} b g_0.$$

Ces deux éléments de $D^\omega(G)$ sont égaux si et seulement si g_0 est central dans G et

$$\alpha(b^{-1}ab)\theta_a(b,g_0) = \alpha(a)\theta_a(g_0,b),$$

pour tous $a, b \in G$. En multipliant par $\alpha(b)\alpha(ab)^{-1}$, la deuxième condition est équivalente à l'égalité

$$\gamma_{g_0}(b, b^{-1}ab)\theta_a(b,g_0) = \gamma_{g_0}(a,b)\theta_a(g_0,b).$$

Mais sous la condition de $g_0 \in Z(G)$, cette égalité est vérifiée, puisque les deux côtés de l'égalité sont égaux à $\omega(a,b,g_0)\omega(g_0,b,b^{-1}ab)$. □

Quand g_0 est dans le centre de G, les fonctions γ_{g_0} et θ_{g_0} sont égales et donc γ_{g_0} est un 2-cocycle sur G. La condition demandée sur γ_{g_0} pour avoir un élément de type groupe est que le 2-cocycle γ_{g_0} soit un 2-cobord.

Proposition A.2.2. *Soit $g_0 \in Z(G)$ tel que le 2-cocyle γ_{g_0} soit un 2-cobord. On choisit $\alpha\colon G \to \mu_{\mathbb{C}}$ telle que $\gamma_{g_0}(g,h) = \frac{\alpha(g)\alpha(h)}{\alpha(gh)}$ pour tous $g,h \in G$. L'élément $\theta_{g_0,\alpha} = \theta \sum_{g\in G} \alpha(g) e_g g_0$ permet de munir la catégorie D^ω-mod d'une structure pivotale non nécessairement sphérique dont la S-matrice est donnée par*

$$S^{++}_{(g,\rho),(h,\pi)} = \alpha(g)\alpha(h)\omega_\rho(g_0)\omega_\pi(g_0)$$
$$\sum_{\substack{a\in[g]\\ b\in[h]\\ ab=ba}} \frac{\theta_g(g_a^{-1},b)\theta_g(g_a^{-1}b,g_a)\theta_h(h_b^{-1},a)\theta_h(h_b^{-1}a,h_b)}{\theta_g(g_a^{-1},g_a)\theta_h(h_b^{-1},h_b)} \chi_\rho(g_a^{-1}bg_a)\chi_\pi(h_b^{-1}ah_b)$$

et les valeurs du twist par

$$\theta_{V_{g,\rho}} = \alpha(g)\omega_\rho(g_0)\omega_\rho(g),$$

pour tous $g,h \in G$, $\rho \in \mathrm{Irr}(Z_G(g))$ et $\pi \in \mathrm{Irr}(Z_G(h))$.

Démonstration. L'action de $\sum_{k\in G}\alpha(k)e_k g_0$ sur le module simple $V_{g,\rho}$ est donnée par multiplication par $\alpha(g)\omega_\rho(g_0)$. La trace quantique positive de θ_{g_0} sur $V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}$ pour la structure pivotale tordue est alors donnée par

$$\alpha(g)\alpha(h)\omega_\rho(g_0)\omega_\pi(g_0)\,\mathrm{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta_{g_0}) = (\alpha(g)\alpha(h)\omega_\rho(g_0)\omega_\pi(g_0))^2\,\mathrm{tr}_{V_{g,\rho}\otimes V_{h,\pi}}(\theta),$$

ce qui permet de conclure avec les formules de la proposition A.1.1. □

Ces structures pivotales ne sont pas en général sphériques, il nous faut donc comprendre l'objet $\bar{\mathbf{1}}$. On fixe g_0 dans le centre de G et $\alpha\colon G \to \mu_{\mathbb{C}}$ une représentation de dimension 1 de cocycle θ_{g_0}. Dans le cas non tordu, l'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est donné par $V_{g_0^{-2},\alpha^{-2}}$. Mais ici, la représentation α^{-2} est de cocycle $\theta_{g_0}^{-2}$ et non $\theta_{g_0^{-2}}$. On définit alors $\tilde{\alpha}\colon G \to \mu_{\mathbb{C}}$ par

$$\alpha(g) = \alpha(g)^{-2}\gamma_g(g_0,g_0^{-1})^{-1}\gamma_g(g_0,g_0^{-2})^{-1}.$$

En utilisant la relation

$$\theta_g(x,y)\theta_h(x,y)\gamma_x(g,h)\gamma_y(x^{-1}gx,x^{-1}hx) = \theta_{gh}(x,y)\gamma_{xy}(g,h)$$

valable pour tous $x,y,g,h \in G$ (cf. [DPR90, 3.2.8]), on vérifie alors que $\tilde{\alpha}$ est une représentation de cocycle $\theta_{g_0^{-2}}$.

Proposition A.2.3. *Soient $g_0 \in Z(G)$ et α une représentation de dimension 1 de cocycle θ_{g_0}. L'objet $\bar{\mathbf{1}}$ est isomorphe à $V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}$, où $\tilde{\alpha}$ est défini par la formule (A.2).*

Démonstration. Toutes les traces, dimensions quantiques et twists sont ici relatifs à la structure pivotale définie par le twist $\theta_{g_0,\alpha}$. Soient $g \in G$ et ρ une représentation irréductible de $Z_G(g)$ de cocycle θ_g. Les dimensions quantiques de $V_{g,\rho}$ sont

$$\dim^+(V_{g,\rho}) = \alpha(g)\omega_\rho(g_0)\chi_\rho(1)\big|[g]\big| \quad \text{et} \quad \dim^-(V_{g,\rho}) = \alpha(g)^{-1}\theta_g(g_0,g_0^{-1})^{-1}\omega_\rho(g_0^{-1})\chi_\rho(1)\big|[g]\big|,$$

puisque conjuguées l'une de l'autre.

Afin de calculer $S^{++}_{(g_0^{-2},\tilde{\alpha}),(g,\rho)}$, on exploite le fait que $V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}$ est un objet inversible. Remarquons que

$$V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}} \otimes V_{g,\rho} \simeq V_{g_0^{-2}g,\tilde{\alpha}\otimes\rho},$$

où $\tilde{\alpha}\otimes\rho$ désigne la représentation projective de $Z_G(g)$ de cocycle $\theta_{g_0^{-2}g}$ définie par

$$\tilde{\alpha}\otimes\rho(k) = \gamma_k(g_0^{-2},g)\alpha(k)\rho(k).$$

Ainsi $S^{++}_{(g_0^{-2},\tilde{\alpha}),(g,\rho)}$ est égal à

$$S^{++}_{(g_0^{-2},\tilde{\alpha}),(g,\rho)} = \dim^+(V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}})\dim^+(V_{g,\rho})\frac{\theta_{V_{g_0^{-2}g,\tilde{\alpha}\otimes\rho}}}{\theta_{V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}}\theta_{V_{g,\rho}}}.$$

Calculons alors le quatient des twists qui apparaît à l'aide de la formule du twist donnée dans la proposition A.2.2,

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_{V_{g_0^{-2}g,\tilde{\alpha}\otimes\rho}}}{\theta_{V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}}\theta_{V_{g,\rho}}} &= \frac{\alpha(g_0^{-2}g)\omega_{\tilde{\alpha}\otimes\rho}(g_0)\omega_{\tilde{\alpha}\otimes\rho}(g_0^{-2}g)}{\alpha(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g_0)\tilde{\alpha}(g_0^{-2})\alpha(g)\omega_\rho(g_0)\omega_\rho(g)} \\
&= \frac{\gamma_{g_0}(g_0^{-2},g)\gamma_{g_0^{-2}}(g_0^{-2},g)\gamma_g(g_0^{-2},g)\omega_\rho(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g)}{\theta_{g_0}(g_0^{-2},g)\theta_{g_0^{-2}g}(g_0^{-2},g)} \\
&= \frac{\theta_{g_0}(g_0^{-2},g)\theta_g(g_0^{-2},g)}{\theta_{g_0^{-2}g}(g_0^{-2},g)}\omega_\rho(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g),
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que pour $h\in G$ on $(\theta_h)_{|Z_G(h)\times Z_G(h)} = (\gamma_h)_{|Z_G(h)\times Z_G(h)}$. En réécrivant tous les 2-cocycles apparaissant en termes du 3-cocycle ω, on obtient

$$\frac{\theta_{V_{g_0^{-2}g,\tilde{\alpha}\otimes\rho}}}{\theta_{V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}}\theta_{V_{g,\rho}}} = \frac{\omega(g_0^{-2},g,g_0^{-2})\omega(g_0^{-2},g_0^{-2}g,g)\omega(g,g_0^{-2},g)}{\omega(g_0^{-2}g,g_0^{-2},g)\omega(g_0^{-2},g,g_0^{-2}g)}\omega_\rho(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g) = \omega_\rho(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g).$$

Ainsi, le caractère de $\mathrm{Gr}(D^\omega(G)\text{-mod})$ défini par $V_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}$ est égal à

$$s^+_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}(V_{g,\rho}) = \alpha(g)\omega_\rho(g_0)\chi_\rho(1)\left|[g]\right|\omega_\rho(g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g),$$

et donc

$$\frac{s^+_{g_0^{-2},\tilde{\alpha}}(V_{g,\rho})}{\dim^-(V_{g,\rho})} = \alpha(g)^2\frac{\omega_\rho(g_0)\omega_\rho(g_0^{-2})}{\omega_\rho(g_0^{-1})}\theta_g(g_0,g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g) = \alpha(g)^2\theta_g(g_0,g_0^{-2})\theta_g(g_0,g_0^{-2})\tilde{\alpha}(g) = 1,$$

par définition de $\tilde{\alpha}$. □

Corollaire A.2.4. *Soient $g_0\in Z(G)$ et une représentation projective de dimension 1 de cocycle θ_{g_0}. La structure pivotale sur la catégorie $D^\omega(G)$-mod définie par g_0 et α est sphérique si et seulement si $g_0^2 = 1$ et $\alpha^2 = 1$.*

Index des notations

$(\cdot,\cdot)$ 88
$\langle (i,j),(k,l)\rangle$ 141
$[I_{1,n}],[I_a],[I_{a^{-1}}]$ 136
$\begin{bmatrix} K_i;c \\ t\end{bmatrix},\begin{bmatrix} L_i;c \\ t\end{bmatrix},\begin{bmatrix} K_i;c;L_i \\ t\end{bmatrix},\begin{bmatrix} z_i;c \\ t\end{bmatrix}$ 103
$[\lambda]$ 16
$[n]_q,[n]_q!,\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q$ 87
$|X|^2$ 50
$\{(i,j),(k,l)\}$ 141
$\bar{\mathbf{1}}$ 55
$\mathbf{1}$ 47

$\mathscr{A}$ 13
$A_{\mathscr{F}},A_{\mathscr{F}}^{\mathrm{abs}},\tilde{A}_{\mathscr{F}}$ 43
$a_{\mathfrak{g}_0,\alpha},a_{\mathfrak{g}_0}$ 61
$\alpha,\alpha^\vee$ 86
$\alpha_{i,j,r},\alpha^\vee_{i,j,r}$ 15
$\alpha_{i,k},\alpha^\vee_{i,k}$ 15
$\alpha_s,\alpha^\vee_s$ 12
a_X 48

$B(\Lambda_i)$ 21

C 110
$\mathscr{C}^A$ 133
$\mathscr{C}^{\langle a\rangle}$ 132
$\hat{\mathscr{C}}$ 78
$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 48
$\mathscr{C}_q$ 98
$\mathscr{C}_{q,\nu}$ 99
$\mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$ 52
$\underline{\mathscr{C}}$ 75
$\mathscr{C}(\xi)$ 142
coev_X 48

$\tilde{C}$ 110
$c_{X,Y}$ 50
$c^{\mathrm{rev}}_{X,Y}$ 52

$\mathscr{D}_y$ 13
$\mathrm{def}(\mathscr{S})$ 40
$D(G)$ 60
$D_{\tilde{G}}(G)$ 150
$D^\omega(G)$ 181
$\dim(\mathscr{C})$ 50
$\dim^+(X),\dim^-(X)$ 50
$\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})$ 88
$\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})_\lambda$ 89
$\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{>0},\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^0,\mathscr{D}_q(\mathfrak{g})^{<0}$ 89
$\mathscr{D}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ 103
$\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ 106
$d(Y)$ 131

E_α 93
E_i 87
$E_i^{(r)}$ 92
$\mathbf{eu}$ 14
$\mathbf{eu}_n$ 16
ev_X 48

F_α 93
$\bar{f}$ 41
f^* 48
F_i 87
$F_i^{(r)}$ 92
$F(\Lambda_{\mathbf{r}})$ 22
$F_R(\Lambda_{\mathbf{r}})$ 23
$f_{M,M'}$ 101
$\mathrm{Fr}(f)$ 42
f_{sp} 42

γ_g 182
$\gamma_L^{\mathrm{Gau}_c(W)}$ 14
$\gamma_L^{\mathbf{JM}_c(d,n)}$ 18
$\gamma_L^{P[D]}$ 10
$\mathrm{Gau}_c(W)$ 13
$G(d,1,n)$ 15
$\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ 51

H_i 15
$H_{i,j,r}$ 15

$I_{1,f}, I_{1,n}$ 136
$I_a, I_{a^{-1}}$ 136
$\mathrm{Irr}(\mathscr{C})$ 48

J 69
J_k 17
$\mathbf{JM}_c(d,n)$ 17

$\Bbbk$ 47
$k_i^{\#}$ 27
$k_{H,i}$ 13
K_i 87

$\Lambda_{\mathbf{r}}$ 22
$\mathscr{L}_i, \mathscr{L}'_i, \mathscr{L}_{i,j}$ 28
$\mathscr{L}^+_{i,j}, \mathscr{L}^-_{i,j}$ 31
L_i 87
$L(\lambda,\mu)$ 99
$L^{\mathrm{res}}(\lambda,\mu)$ 109
$L_\xi(\lambda,\mu)$ 109

$M_{\lambda,\mu}$ 98

${}_{i_0}N_i$ 37
$N_{i,j}^k$ 36
${}_{i_0}N_{i,j}^k$ 37
$N_{X,Y}^Z$ 51

ω_ρ 62

$P, P^+, P^\vee$ 86
ϖ_i 86
Ψ 94
Ψ_ξ 106
$\Psi(Y,\pi), \Psi^{\#}(Y,\pi), \Psi^{\#}(Y,\pi)_0$ 41
$\tilde{P}, \tilde{P}^+$ 98

$Q, Q^+, Q^\vee$ 86

$\mathrm{rg}(\mathscr{S})$ 39
$R_\chi, R_{\chi,a}$ 130
$\mathrm{Réf}(W)$ 12
$\mathbf{r}$ 22
$r_i(x), r'_i(x), \rho_i(y), \rho'_i(y)$ 90

$S_{1,a}$ 132
$\mathbb{S}_{f,g}$ 42
$\mathscr{S}$ 40
$\mathscr{S}_\lambda$ 40
$\mathrm{sdim}(\mathscr{C})$ 70
$\mathbf{S}$ 70
$\mathrm{sGr}(\mathscr{C})$ 78
σ_i^k 15
$s_{i,j,r}$ 15
$S(\Lambda)$ 22
$sN_{X,Y}^Z$ 69
$s_{X,Y}^{\pm} s_X^{\pm}$ 51
$S_{X,Y}^{+,+}, S_{X,Y}^{-,-}, S_{X,Y}^{-,+}$ 52
$S_{X,Y}^{\mathrm{rev},+,+}, S_{X,Y}^{\mathrm{rev},-,-}, S_{X,Y}^{\mathrm{rev},-,+}$ 52
$s\tau^{\pm}(\mathscr{C})$ 72
sVect 68
$s\xi(\mathscr{C})$ 73

T 58
T_a 131
$\mathrm{t}(\mathscr{S})$ 39
$\tau^{\pm}(\mathscr{C},\tilde{\theta}), \tau^{\pm}(\mathscr{C})$ 54
$\mathscr{T}_\xi$ 111
$\mathscr{T}_{\xi,\nu}$ 111
$\mathscr{T}_\xi \rtimes \mathscr{S}$ 113
Θ_μ 94
$\mathfrak{t}$ 17
$\mathbf{T}$ 71
Θ 95
θ_g 181
$\Theta_{M,M'}$ 101
θ_X 50
Θ_ξ 106
$T(\lambda,\mu)$ 109
$\mathrm{Tr}_X^+(f), \mathrm{Tr}_X^-(f)$ 48
$\mathrm{Tr}_{X\otimes Y}^{-,+}(f)$ 49

$\mathrm{Uch}(G(d,1,n))$ 40
$\mathscr{U}_q(\mathfrak{b}^{\pm})$ 87
$\mathscr{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 21
$\mathscr{U}_q^{\mathrm{res}}(\mathfrak{sl}_\infty)^{<0}$ 23
u_X 50

$V_{g,\rho}$ 62
V_λ 16
$V(\Lambda_i)$ 21
$V(\Lambda_{\mathbf{r}})$ 22
$V_{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\mathbf{r}})$ 23
$V_R(\Lambda_{\mathbf{r}})$ 23
$V^{\text{rég}}$ 13

W_H 13
$W_\xi(\lambda,\mu)$ 109

X_α 133
$\bar{X}$ 55
X^* 48
$\xi(\mathscr{C})$ 59

$\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)$ 114
$\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)_\nu$ 115
$\mathbb{Z}(\mathscr{T}_\xi)\rtimes\mathscr{S}$ 115
$\mathscr{Z}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_1)$ 135
$\mathscr{Z}_{\text{sym}}(\mathscr{C})$ 51
$\mathbb{Z}_{\leq i}$ 21

Bibliographie

[AC92] D. ALTSCHÜLER & A. COSTE – « Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds, and topological field theory », *Comm. Math. Phys.* **150** (1992), no. 1, p. 83–107.

[An92] H. H. ANDERSEN – « Tensor products of quantized tilting modules », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 1, p. 149–159.

[BCK17] J. BRUNDAN, J. COMES & J. R. KUJAWA – « A basis theorem for the degenerate affine oriented Brauer-Clifford supercategory », *ArXiv e-prints* (2017), 1706.09999.

[Be12] G. BELLAMY – « The Calogero-Moser partition for $G(m,d,n)$ », *Nagoya Math. J.* **207** (2012), p. 47–77.

[Be14] G. BELLAMY – « Endomorphisms of Verma modules for rational Cherednik algebras », *Transform. Groups* **19** (2014), no. 3, p. 699–720.

[BE17] J. BRUNDAN & A. P. ELLIS – « Monoidal supercategories », *Comm. Math. Phys.* **351** (2017), no. 3, p. 1045–1089.

[BGH⁺17] P. BRUILLARD, C. GALINDO, T. HAGGE, S.-H. NG, J. Y. PLAVNIK, E. C. ROWELL & Z. WANG – « Fermionic modular categories and the 16-fold way », *J. Math. Phys.* **58** (2017), no. 4, p. 041704, 31.

[BK01] B. BAKALOV & A. KIRILLOV, JR. – *Lectures on tensor categories and modular functors*, University Lecture Series, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[BMM99] M. BROUÉ, G. MALLE & J. MICHEL – « Towards spetses I », *Transform. Groups* **4** (1999), no. 2-3, p. 157–218, Dedicated to the memory of Claude Chevalley.

[BMM14] — , « Split spetses for primitive reflection groups », *Astérisque* (2014), no. 359, p. vi+146.

[Bo64] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308, Hermann, Paris, 1964.

[Bo68] — , *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris, 1968.

[Bo17] C. BONNAFÉ – « On the Calogero-Moser space associated with dihedral groups », *ArXiv e-prints* (2017), 1708.09728.

[Br00] A. BRUGUIÈRES – « Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3 », *Math. Ann.* **316** (2000), no. 2, p. 215–236.

[Br10] M. BROUÉ – *Introduction to complex reflection groups and their braid groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1988, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[BR17a] C. BONNAFÉ & R. ROUQUIER – « An asymptotic cell category for cyclic groups », *ArXiv e-prints* (2017), 1708.09730.

[BR17b] — , « Cherednik algebras and Calogero-Moser cells », *ArXiv e-prints* (2017), 1708.09764, à paraître dans Ann. Math. Blaise Pascal.

[BT] C. BONNAFÉ & U. THIEL – « Calogero-Moser families and cellular characters : comput ational aspects », *in preparation*.

[Ca85] R. W. CARTER – *Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[CGR00] A. COSTE, T. GANNON & P. RUELLE – « Finite group modular data », *Nuclear Phys. B* **581** (2000), no. 3, p. 679–717.

[Ch09] M. CHLOUVERAKI – *Blocks and families for cyclotomic Hecke algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1981, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[CP95] V. CHARI & A. PRESSLEY – *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[CR81] C. W. CURTIS & I. REINER – *Methods of representation theory : With applications to finite groups and orders, pure and applied mathematics, Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.

[Cu05] M. CUNTZ – « Fourier-Matrizen und Ringe mit Basis », Thèse, Universität Kassel, 2005.

[Cu07] — , « Fusion algebras for imprimitive complex reflection groups », *J. Algebra* **311** (2007), no. 1, p. 251–267.

[DL76] P. DELIGNE & G. LUSZTIG – « Representations of reductive groups over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), no. 1, p. 103–161.

[DPR90] R. DIJKGRAAF, V. PASQUIER & P. ROCHE – « Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models », *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.* **18B** (1990), p. 60–72 (1991).

[Dr87] V. G. DRINFELD – « Quantum groups », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 798–820.

[EG02] P. ETINGOF & V. GINZBURG – « Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism », *Invent. Math.* **147** (2002), no. 2, p. 243–348.

[EGNO15] P. ETINGOF, S. GELAKI, D. NIKSHYCH & V. OSTRIK – *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[ENO05] P. ETINGOF, D. NIKSHYCH & V. OSTRIK – « On fusion categories », *Ann. of Math. (2)* **162** (2005), no. 2, p. 581–642.

[EO18] P. ETINGOF & V. OSTRIK – « On semisimplification of tensor categories », *ArXiv e-prints* (2018), 1801.04409.

[Fi96] M. FINKELBERG – « An equivalence of fusion categories », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 2, p. 249–267.

[Ga05] T. GANNON – « Modular data : the algebraic combinatorics of conformal field theory », *J. Algebraic Combin.* **22** (2005), no. 2, p. 211–250.

[GHL+96] M. GECK, G. HISS, F. LÜBECK, G. MALLE & G. PFEIFFER – « CHEVIE—a system for computing and processing generic character tables », *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **7** (1996), no. 3, p. 175–210.

[GJ11] M. GECK & N. JACON – *Representations of Hecke algebras at roots of unity*, Algebra and Applications, vol. 15, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[GM03] M. GECK & G. MALLE – « Fourier transforms and Frobenius eigenvalues for finite Coxeter groups », *J. Algebra* **260** (2003), no. 1, p. 162–193, Special issue celebrating the 80th birthday of Robert Steinberg.

[GM09] I. G. GORDON & M. MARTINO – « Calogero-Moser space, restricted rational Cherednik algebras and two-sided cells », *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no. 2, p. 255–262.

[GM18] A. GRUEN & S. MORRISON – « Computing Modular Data for Pointed Fusion Categories », *ArXiv e-prints* (2018), 1808.05060.

[GN08] S. GELAKI & D. NIKSHYCH – « Nilpotent fusion categories », *Adv. Math.* **217** (2008), no. 3, p. 1053–1071.

[Go03] I. GORDON – « Baby Verma modules for rational Cherednik algebras », *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), no. 3, p. 321–336.

[HH92] P. N. HOFFMAN & J. F. HUMPHREYS – *Projective representations of the symmetric groups : Q-functions and shifted tableaux*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.

[Ja96] J. C. JANTZEN – *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Ka91] M. KASHIWARA – « On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras », *Duke Math. J.* **63** (1991), no. 2, p. 465–516.

[Ka95] C. KASSEL – *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ke05] G. M. KELLY – « Basic concepts of enriched category theory », *Repr. Theory Appl. Categ.* (2005), no. 10, p. vi+137.

[KL79] D. KAZHDAN & G. LUSZTIG – « Representations of Coxeter groups and Hecke algebras », *Invent. Math.* **53** (1979), no. 2, p. 165–184.

[KN94] M. KASHIWARA & T. NAKASHIMA – « Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras », *J. Algebra* **165** (1994), no. 2, p. 295–345.

[KS97] A. KLIMYK & K. SCHMÜDGEN – *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[La18a] A. LACABANNE – « Drinfeld double of quantum groups, tilting modules and $\mathbb{Z}$-modular data associated to complex reflection groups », *ArXiv e-prints* (2018), 1807.00770.

[La18b] — , « Slightly degenerate categories and $\mathbb{Z}$-modular data », *ArXiv e-prints* (2018), 1807.00766.

[LM04] B. LECLERC & H. MIYACHI – « Constructible characters and canonical bases », *J. Algebra* **277** (2004), no. 1, p. 298–317.

[LT00] B. LECLERC & P. TOFFIN – « A simple algorithm for computing the global crystal basis of an irreducible $U_q(\mathrm{sl}_n)$-module », *Internat. J. Algebra Comput.* **10** (2000), no. 2, p. 191–208.

[Lu79] G. LUSZTIG – « Unipotent representations of a finite Chevalley group of type E_8 », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **30** (1979), no. 119, p. 315–338.

[Lu84] — , *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, vol. 107, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.

[Lu90a] — , « Canonical bases arising from quantized enveloping algebras », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 2, p. 447–498.

[Lu90b] — , « Quantum groups at roots of 1 », *Geom. Dedicata* **35** (1990), no. 1-3, p. 89–113.

[Lu94] — , « Exotic Fourier transform », *Duke Math. J.* **73** (1994), no. 1, p. 227–241, 243–248, With an appendix by Gunter Malle.

[Lu03] — , *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM Monograph Series, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Lu10] — , *Introduction to quantum groups*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2010.

[Ma95] G. MALLE – « Unipotente Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen », *J. Algebra* **177** (1995), no. 3, p. 768–826.

[Ma14] M. MARTINO – « Blocks of restricted rational Cherednik algebras for $G(m,d,n)$ », *J. Algebra* **397** (2014), p. 209–224.

[Mi15] J. MICHEL – « The development version of the `chevie` package of gap3 », *J. Algebra* **435** (2015), p. 308–336.

[Mü00] M. MÜGER – « Galois theory for braided tensor categories and the modular closure », *Adv. Math.* **150** (2000), no. 2, p. 151–201.

[Mü03] — , « On the structure of modular categories », *Proc. London Math. Soc. (3)* **87** (2003), no. 2, p. 291–308.

[Ro90] M. ROSSO – « Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **23** (1990), no. 3, p. 445–467.

[Ro06] E. C. ROWELL – « From quantum groups to unitary modular tensor categories », in *Representations of algebraic groups, quantum groups, and Lie algebras*, Contemp. Math., vol. 413, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, p. 215–230.

[Ro08] R. ROUQUIER – « q-Schur algebras and complex reflection groups », *Mosc. Math. J.* **8** (2008), no. 1, p. 119–158, 184.

[Sa06] S. F. SAWIN – « Quantum groups at roots of unity and modularity », *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), no. 10, p. 1245–1277.

[ST54] G. C. SHEPHARD & J. A. TODD – « Finite unitary reflection groups », *Canadian J. Math.* **6** (1954), p. 274–304.

[Ta92] T. TANISAKI – « Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras », in *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, p. 941–961.

[Th14] U. THIEL – « A counter-example to Martino's conjecture about generic Calogero-Moser families », *Algebr. Represent. Theory* **17** (2014), no. 5, p. 1323–1348.

[Tu10] V. TURAEV – *Homotopy quantum field theory*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 10, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010, Appendix 5 by Michael Müger and Appendices 6 and 7 by Alexis Virelizier.

[Wi96] S. J. WITHERSPOON – « The representation ring of the quantum double of a finite group », *J. Algebra* **179** (1996), no. 1, p. 305–329.

Abstract. This work is a contribution to the categorification of $\mathbb{Z}$-modular data and deals mainly with $\mathbb{Z}$-modular data arising from complex reflection groups, as well as cellular characters for these groups. In his classification of representations of finite groups of Lie type, Lusztig defines a nonabelian Fourier transform, and associate a $\mathbb{N}$-modular datum to each family of unipotent characters. In a generalization of Lusztig's theory to Spetses, Broué, Malle and Michel construct $\mathbb{Z}$-modular data associated to some complex reflection groups. We first give an categorical explanation of some of these $\mathbb{Z}$-modular data in terms of representation of the Drinfeld double of a finite group. We had to endow he category of representation with a non-spherical structure. The study of slightly degenerate categories shows that they naturally give rise to $\mathbb{Z}$-modular data. In order to construct some examples, we consider an extension of the fusion categories associated to $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$, where $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra and ξ a root of unity. These categories are constructed as semisimplification of the category of tilting modules of $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$, which is a central extension of $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$. If $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, we show that this category is related to some $\mathbb{Z}$-modular data associated to the complex reflection group $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Exceptional complex reflection groups are also considered and many different categories appear in the categorification of the associated $\mathbb{Z}$-modular data : modules categories over twisted Drinfeld doubles as well as some subcategories of fusion categories of tilting modules over $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ in type A and B.

Keywords. complex reflection groups, $\mathbb{Z}$-modular data, braided categories, slightly degenerate categories, representation of quantum groups

---

Résumé. Cette thèse porte sur l'étude des données $\mathbb{Z}$-modulaires et leur catégorification, et particulièrement sur des données $\mathbb{Z}$-modulaires reliées aux groupes de réflexions complexes, ainsi que sur la notion de caractère cellulaire pour ces derniers. Dans sa classification des caractères des groupes finis de type de Lie, Lusztig décrit une transformée de Fourier non abélienne et définit des données $\mathbb{N}$-modulaires pour chaque famille de caractères unipotents. Dans des tentatives de généralisation aux Spetses, Broué, Malle et Michel introduisent des données $\mathbb{Z}$-modulaires. On commence par donner une explication catégorique de certaines de ces données via la catégorie des représentations du double de Drinfeld d'un groupe fini, que l'on munit d'une structure pivotale non sphérique. Une étude approfondie de la notion de catégorie de fusion pivotale et légèrement dégénérée montre que l'on peut ainsi produire des données $\mathbb{Z}$-modulaires. Afin de construire des exemples de telles catégories, on considère des extensions des catégories de fusion associées à $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, et ξ une racine de l'unité. Ces dernières sont construites comme des semi-simplifications de la catégorie des modules basculants de l'algèbre $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$, qui est une extension centrale de $\mathscr{U}_\xi(\mathfrak{g})$. Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, on relie cette catégorie à une des données $\mathbb{Z}$-modulaires associée au groupe de réflexions complexes $G\left(d,1,\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Les groupes de réflexions exceptionnels sont également étudiés, et les catégorifications des données $\mathbb{Z}$-modulaires associées font apparaître diverses catégories : des catégories de représentations de doubles de Drinfeld tordus ainsi que des sous-catégories des catégories de fusion des modules basculants en $\mathscr{D}_\xi(\mathfrak{g})$ en type A et B.

Mots-clefs. groupes de réflexions complexes, données $\mathbb{Z}$-modulaires, catégories tressées, catégories légèrement dégénérées, représentations de groupes quantiques

Mathematics Subject Classification. 18D10 - 20G42 - 20F55