

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivrée par l'**Université de Montpellier**

Préparée au sein de l'école doctorale
Information Structures Systèmes
et de l'unité de recherche
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Spécialité : **Mathématiques et modélisation**

Présentée par **Tuong-Huy Nguyen**

**Cohomologie des variétés de
Coxeter pour le groupe
linéaire : algèbre
d'endomorphismes,
compactification**

Soutenue le 11 décembre 2015 devant le jury composé de :

M. Cédric BONNAFÉ	DR	Université de Montpellier	Directeur
M. Emmanuel LETELLIER	Prof.	Université Paris 7	Rapporteur
M. Toshiaki SHOJI	Prof.	Tongji University	Rapporteur
M. Olivier DUDAS	CR	Université Paris 7	Examineur
M. Nicolas RESSAYRE	Prof.	Université Claude Bernard Lyon 1	Examineur



Résumé

Les variétés de Deligne-Lusztig associées à un élément de Coxeter, dites variétés de Coxeter et notées $\mathbf{Y}(c)$, sont des variétés candidates à réaliser l'équivalence dérivée demandée dans la conjecture de Broué. Cette conjecture implique qu'une telle variété doit avoir une cohomologie disjointe et donne également la description de l'algèbre d'endomorphismes associée.

Dans le cas des groupes linéaires, nous décrivons la cohomologie des variétés de Coxeter et en déduisons que celles-ci vérifient bien les propriétés impliquées par la conjecture de Broué. Pour ce faire, nous montrons qu'il est possible d'appliquer un résultat de « transitivité » permettant de se ramener à des variétés de Coxeter « plus petites » et nous utilisons ensuite un résultat établi par Lusztig sur des variétés notées $\mathbf{X}(c)$, obtenues comme des quotients des variétés $\mathbf{Y}(c)$ par des groupes finis.

Enfin, dans une dernière partie, la description de la cohomologie des variétés de Coxeter nous permet d'obtenir un lien entre la cohomologie de la compactification $\overline{\mathbf{Y}}(c)$ et celle de la compactification $\overline{\mathbf{X}}(c)$.

Abstract

Deligne-Lusztig varieties associated to Coxeter elements, or more simply Coxeter Varieties denoted by $\mathbf{Y}(c)$, are good candidates to realize the derived equivalence needed for the Broué's conjecture. The conjecture implies that the varieties should have disjoint cohomology as well as gives a description of the endomorphisms algebra.

For linear groups, we describe the cohomology of the Coxeter varieties and hence show that it agrees with the conditions implied by Broué's conjecture. To do so, we prove it is possible to apply a « transitivity » result allowing us to restrict to « smaller » Coxeter varieties. Then, we apply a result obtained by Lusztig on varieties $\mathbf{X}(c)$, which are quotient varieties of $\mathbf{Y}(c)$ by some finite groups.

In the last part of the thesis, we use the description of the cohomology of Coxeter varieties to connect the cohomology of the compactification $\overline{\mathbf{Y}}(c)$ and the cohomology of the compactification $\overline{\mathbf{X}}(c)$.

Remerciements

Je souhaite remercier tous ceux qui, de loin comme de près, ont contribué à cette thèse. Me connaissant, j'en omettrai certainement un grand nombre dans les lignes qui suivent ; je m'en excuse par avance.

Je remercie d'abord mon directeur de thèse, Cédric Bonnafé. À la fin de mon M2 à Paris, Michel Broué me l'a recommandé comme « le meilleur directeur », force est de constater qu'il avait raison. De bout en bout, Cédric m'a toujours encouragé, aidé, il n'a jamais hésité à prendre la craie pour m'en expliquer davantage : je suis toujours reparti de nos discussions avec énormément de motivation. Ses qualités pédagogiques, ainsi que sa grande gentillesse font de lui un directeur sans égal.

Je suis extrêmement honoré qu'Emmanuel Letellier et Toshiaki Shoji aient accepté de rapporter mon manuscrit de thèse, qui plus est dans un délai aussi court. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont apporté à mes travaux. La présence dans mon jury d'Olivier Dudas et de Nicolas Ressayre est tout autant un honneur.

Je remercie tous les mathématiciens avec qui j'ai pu partager aux cours de ces années, principalement à Montpellier ou à Paris ; pour l'enseignement tout autant que la recherche. J'ai une grande gratitude pour l'équipe des Groupes Finis de Paris 7 qui m'a toujours accueilli avec bienveillance : Olivier Brunat, Olivier Dudas, François Digne et Jean Michel.

Depuis maintenant deux rentrées, je suis dans l'équipe pédagogique de l'ENS Cachan ; je les remercie de leur accueil chaleureux et de tout le travail qu'ils font auprès des élèves : Frédéric Pascal, Claudine Picaronny, Alain Trouvé pour les plus « grands » et je n'oublie pas mes collègues AGPR (et assimilés) Sandrine, Lionel et mon cobureau Arthur.

Auparavant, mes années à Montpellier n'auraient pas été les mêmes sans mes amis doctorants. Arrivés au même moment que moi, Elsa et Benjamin ont toujours été présents, leur amitié m'est chère. C'est avec une certaine émotion que je me souviens des pistolets NERF, de la cafetière « pourrie », des amandes enrobées de chocolat et enfin des hélicoptères. Arrivés plus tard, Gautier et Mickaël m'ont également beaucoup apporté. Je n'oublie pas non plus Christophe, Myriam, Myriam, Guillaume, Anthony, Etienne, Joubine et Samuel.

Mon passage à l'ENS Rennes m'a aussi marqué et je suis content de compter parmi mes amis toutes les personnes du « forum » : Elise, Naïck, Julien, Vassili, Yohann.

Le sport m'a toujours accompagné durant ces années. Je remercie Marin pour nos séances de badminton à la fac comme au club. Le kin-ball représente une grande partie de ma vie, je remercie particulièrement François, Thierry, Thomas. Avec eux, notamment, je rapporte de mon séjour du Japon des souvenirs inoubliables. Un grand merci à mes amis japonais Micchan, Asumi, Terumi pour leur accueil. Je remercie également mes joueurs et joueuses, c'est un véritable plaisir de les entraîner ; mon émotion est grande lorsque je repense au chemin parcouru.

Enfin, je finis ces longs remerciements en exprimant ma gratitude envers ma famille, nombreux sont ceux qui ont fait le déplacement, je les en remercie chaleureusement. Une mention spéciale pour mẹ Ki et sa cuisine inégalable. Lorsque je pense à ma famille, mes premières pensées vont vers ma grand-mère, bà ngọai, je pense qu'elle serait fière de moi. Ensuite, viennent mes parents ; ils m'ont toujours soutenu et poussé vers le meilleur, je ne serais pas qui je suis sans eux. Mes soeurs également occupent une place particulière, les incroyables talents de pâtissières de chị Lắc et l'affection de Tichou ont toujours été d'un grand réconfort. Je remercie enfin Sonia de m'avoir soutenu jusqu'au bout de cette thèse.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Notations	9
1.2	Conjectures locales-globales	10
1.3	Le cas des groupes réductifs finis	12
1.4	Résultats obtenus dans la thèse	15
2	Variétés de Deligne-Lusztig	17
2.1	Variétés de Deligne-Lusztig	17
2.1.1	Définitions	17
2.1.2	Propriétés générales des variétés de Deligne-Lusztig	19
2.1.3	Conjugaison géométrique et séries de Lusztig	20
2.1.4	Foncteur de Lusztig et transitivité	22
2.1.5	Caractères fantômes et paramétrages des représentations unipotentes	23
2.2	Quelques outils concernant la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig	24
2.2.1	Cohomologie et longueurs	25
2.2.2	Une équivalence de Morita	26
2.2.3	Cohomologie et valeurs propres du Frobenius	27
2.3	Variétés de Deligne-Lusztig associées à un élément de Coxeter	28
2.3.1	Éléments de Coxeter	28
2.3.2	Cohomologie des variétés de Coxeter \mathbf{X}	29
2.4	Variétés de Deligne-Lusztig et compactifications	31
2.4.1	Compactification de \mathbf{X} et cohomologie	31
2.4.2	Compactification de \mathbf{Y}	31
2.4.3	Sous-groupes de tores	33
3	Cohomologie des variétés de Coxeter $\mathbf{Y}(\dot{c})$ pour GL_n	35
3.1	Notations pour le cas GL_n	35
3.2	Quelques généralités dans les groupes linéaires	39
3.2.1	Paramétrage des séries de Lusztig	39
3.2.2	Résultats dans le groupe symétrique	44
3.3	Premiers résultats sur la cohomologie de la variété de Coxeter $\mathbf{Y}(\dot{c})$ pour GL_n	49

3.4	Résultats principaux	50
3.5	Stratégie générale de démonstration	52
3.6	Éléments de preuve du théorème 3.5.5	55
3.7	Calcul des racines de l'unité des valeurs propres	57
3.7.1	Relèvements de Lusztig et séries de Harish-Chandra	57
3.8	Les exemples de GL_4 et GL_6	61
3.8.1	GL_4	62
3.8.2	GL_6	63
4	Description de l'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathbf{G}^F}(\bigoplus_i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})))$	67
4.1	Quelques résultats préliminaires pour la variété de Coxeter	68
4.1.1	Le cas de la variété $\mathbf{X}(c)$	68
4.1.2	Le cas de la variété $\mathbf{Y}(\dot{c})$	68
4.2	Étude d'une sous-algèbre	69
4.3	L'algèbre de groupe du normalisateur $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$	72
4.3.1	Représentations des produits semi-directs	73
4.4	Une application du théorème de déformation de Tits	74
4.4.1	Relations dans \mathcal{A}	74
4.5	Formule explicite d'isomorphisme dans le cas de GL_n (n premier)	80
4.5.1	Le cas $\mathbf{G} = GL_2$	81
4.5.2	Le cas général $\mathbf{G} = GL_n$	82
5	Cohomologie de la compactification $\overline{\mathbf{Y}}(\dot{c})$	87
5.1	Sous-groupes de tores dans le cas $\mathbf{G} = GL_n$ et $w = c$	87
5.2	Cohomologie	91
6	Annexe : Variétés de Deligne-Lusztig dans GL_n et drapeaux	101
	Index des notations	107

Chapitre 1

Introduction

1.1 Notations

Les notations utilisées dans ce manuscrit suivent principalement celles introduites par Bonnafé et Rouquier dans [7] et [5].

Tout au long de ce manuscrit, \mathbf{G} est un groupe réductif connexe défini sur une clôture algébrique \mathbb{F} d'un corps fini à q éléments \mathbb{F}_q ($q = p^r$, p premier) et $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est un endomorphisme de Frobenius de \mathbf{G} . Pour cet endomorphisme, notons δ l'entier minimal tel que F^δ soit un endomorphisme déployé sur \mathbf{G} .

On fixe également un sous-groupe de Borel F -stable \mathbf{B} de \mathbf{G} , $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ un tore maximal F -stable de \mathbf{B} et \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} . Notons $W := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ le groupe de Weyl de \mathbf{G} relativement au choix du tore \mathbf{T} , $X(\mathbf{T})$ (resp. $Y(\mathbf{T})$) le réseau des caractères (resp. des cocaractères) associé à \mathbf{T} , Φ (resp. Φ^\vee) le système de racines (resp. le système des coracines) de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , Δ (resp. Δ^\vee) la base de Φ (resp. Φ^\vee) relativement au choix de \mathbf{B} et enfin Φ_+ (resp. Φ_+^\vee) l'unique système de racines (resp. coracines) contenant Δ (resp. Δ^\vee). Le morphisme F agit sur le groupe de Weyl et stabilise l'ensemble des réflexions de W , on note $\phi : \Phi \rightarrow \Phi$ la bijection telle que $F(\alpha)$ est un multiple positif de $\phi(\alpha)$ (pour tout $\alpha \in \Phi$). On notera $[\Delta/\phi]$ un système de représentants des orbites de Δ sous l'action de ϕ .

Si $\alpha \in \Phi$, on note α^\vee la coracine associée, $s_\alpha \in W$ la réflexion par rapport à α et \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent à 1-paramètre normalisé par \mathbf{T} associé à α , \mathbf{T}_{α^\vee} le sous-tore de \mathbf{T} image de α^\vee et $\mathbf{G}_\alpha := \langle \mathbf{U}_\alpha, \mathbf{U}_{-\alpha} \rangle$ le sous-groupe engendré.

Si on note $S := \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ l'ensemble des racines simples, on définit $\ell : W \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ la fonction de longueur relativement à S ; B le groupe de tresses associé au couple (W, S) dont les générateurs sont $\{\mathbf{s}_\alpha, \alpha \in \Delta\}$. Enfin, considérons $f : B \rightarrow W$ le morphisme canonique : l'unique morphisme tel que $f(\mathbf{s}_\alpha) = s_\alpha$ pour toutes les réflexions associées à des racines simples, et $\sigma : W \rightarrow B$ l'unique application vérifiant $\sigma(s_\alpha) = \mathbf{s}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) et $\sigma(vw) = \sigma(v)\sigma(w)$ si $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$. Il s'agit d'une section de f , à savoir : $f \circ \sigma = id_W$.

Soit η un multiple de δ satisfaisant $(wF)^\eta = F^\eta$ pour tout $w \in W$. On fixe ζ_η

une racine primitive $(q^\eta - 1)$ -ième de l'unité, et pour $w \in W$, on définit :

$$\begin{aligned} N_w : Y(\mathbf{T}) &\longrightarrow \mathbf{T}^{wF} \\ \lambda &\mapsto N_{F^\eta/wF}(\lambda(\zeta_\eta)), \end{aligned}$$

où $N_{F^\eta/wF} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto t \cdot {}^{wF}t \dots ({}^{wF})^{\eta-1}t$.

Remarque 1.1.1. A priori, l'entier η est très grand, et rend donc difficile des calculs explicites. En revanche, remarquons la chose suivante lorsque l'on fixe un élément $w \in W$ d'ordre d et que F est déployé. Comme $d|\eta$, notons $e = \eta/d$, et alors pour $\lambda \in Y(\mathbf{T})$:

$$\begin{aligned} N_{F^\eta/wF}(\lambda(\zeta_\eta)) &= N_{F^{de}/wF}(\lambda(\zeta_\eta)) = N_{F^{de}/F^d} \circ N_{F^d/F^wF}(\lambda(\zeta_\eta)) \\ &= (N_{F^d/F^wF}(\lambda(\zeta_\eta)))^{1+q^d+\dots+q^{(e-1)d}} \\ &= N_{F^d/F^wF}(\lambda(\zeta')), \end{aligned}$$

où $\zeta' = \zeta_\eta^{1+q^d+\dots+q^{(e-1)d}}$ est une racine $q^d - 1$ de l'unité. Ainsi, pour les calculs ultérieurs de N_w ($w \in W$ fixé d'ordre d), on retiendra qu'il n'est pas nécessaire de faire η multiplications, mais qu'il suffit de faire d multiplications en choisissant une racine $(q^d - 1)$ -ième de l'unité plutôt que ζ_η précédemment choisi. A chaque utilisation, nous préciserons la racine de l'unité choisie.

Si $x, w \in W$, on note \preccurlyeq l'ordre de Bruhat : $x \preccurlyeq w$ si x est obtenu à partir d'une écriture réduite de w à laquelle on a enlevé certaines réflexions simples.

Les notations propres au cas $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ sont détaillées en 3.1.

Enfin, si \mathbf{X} est une variété algébrique quasi-projective définie sur \mathbb{F} , on considèrera le complexe de cohomologie à coefficient dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, que l'on écrira plus simplement $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{X})$. De même, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ seront parfois écrits $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{X})$ ou encore H_c^i si la variété est sans ambiguïté. Ce dernier abus de notation sera utilisé avec parcimonie. Enfin, on désigne par $\mathrm{H}_c^\bullet(\mathbf{X})$ la somme directe des groupes de cohomologie : $\mathrm{H}_c^\bullet(\mathbf{X}) = \bigoplus_i \mathrm{H}_c^i(\mathbf{X})$.

Si Γ est un monoïde, notons $\mathcal{R}(\Gamma)$ le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\Gamma$ -modules de dimension finie et $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\Gamma\text{-mod})$ la catégorie dérivée bornée des complexes de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\Gamma$ -modules. Si le monoïde Γ agit sur la variété \mathbf{X} , alors $\mathrm{H}_c^\pm(\mathbf{X})$ désigne la somme alternée des images dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(\Gamma)$: $\mathrm{H}_c^\pm(\mathbf{X}) = \sum_i (-1)^i [\mathrm{H}_c^i(\mathbf{X})]_\Gamma$ où $[-]_\Gamma$ désigne la classe dans $\mathcal{R}(\Gamma)$.

1.2 Conjectures locales-globales

Dans cette partie, nous introduisons des conjectures dites locales-globales concernant les groupes finis. Et nous finissons par faire le lien avec la théorie de Deligne-Lusztig et le cadre dans lequel les travaux de thèse s'inscrivent.

Dans ce qui suit, G est un groupe fini, $\text{Irr}(G)$ est l'ensemble des caractères irréductibles de G (sur un certain corps). Si $\chi \in \text{Irr}(G)$, les relations « numériques » suivantes sont classiques :

$$\chi(1) \text{ divise } |G|, \quad \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Les premières conjectures qui suivent énoncent d'autres résultats « numériques ».

Soit ℓ un nombre premier, et notons

$$\text{Irr}_{\ell'}(G) = \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid \chi(1) \not\equiv 0 \pmod{\ell}\}.$$

Conjecture de McKay ([43] [44] [1]). *Soit P un ℓ -sous-groupe de Sylow de G . Alors :*

$$|\text{Irr}_{\ell'}(G)| = |\text{Irr}_{\ell'}(N_G(P))|.$$

Cette conjecture peut être raffinée au niveau des blocs : soit b un ℓ -bloc, D son groupe de défaut, notons

$$\text{Irr}_{\ell'}(b) = \{\chi \in \text{Irr}(b) \mid \chi(1)_{\ell} = [G : D]_{\ell}\}.$$

Il est clair que si D est un ℓ -sous-groupe de Sylow, $[G : D]_{\ell} = 1$ et alors

$$\text{Irr}_{\ell'}(b) = \{\chi \in \text{Irr}(b) \mid \chi(1)_{\ell} = 1\} = \text{Irr}_{\ell'}(G) \cap \text{Irr}(b).$$

Conjecture d'Alperin-McKay ([1]). *Soit b un ℓ -bloc de G , D son groupe de défaut, et $Br(b)$ son correspondant de Brauer (dans $N_G(D)$). Alors :*

$$|\text{Irr}_{\ell'}(b)| = |\text{Irr}_{\ell'}(Br(b))|.$$

Une autre conjecture s'intéresse à la question de savoir si $\text{Irr}_{\ell'}(b) = \text{Irr}(b)$, il s'agit de la conjecture de hauteur 0 due à Brauer :

Conjecture de Brauer ([9]). *Soit b un ℓ -bloc de G , D son groupe de défaut. Alors :*

$$\text{Irr}_{\ell'}(b) = \text{Irr}(b) \iff D \text{ est abélien.}$$

Remarque 1.2.1. Dans l'article récent [35], le sens de droite à gauche de la conjecture a été démontré par Kessar et Malle. Leur preuve repose sur la réduction de la conjecture aux groupes quasi-simples due à Berger et Knörr [3].

Enfin, la conjecture suivante est due à Alperin et concerne les caractères de Brauer d'un ℓ -bloc dont le groupe défaut est abélien. On note $\text{IBr}(b)$ les caractères de Brauer irréductibles d'un bloc b de G .

Conjecture d'Alperin ([2]). *Soit b un ℓ -bloc de G dont le groupe de défaut D est abélien, on note $Br(b)$ son correspondant de Brauer (dans $N_G(D)$). Alors :*

$$|\text{IBr}(b)| = |\text{IBr}(Br(b))|.$$

Les conjectures précédemment énoncées ont toutes en commun de mettre en évidence un contrôle d'une information « globale » sur un bloc de G par une information « locale » sur un bloc de $N_G(D)$, où D est le groupe de défaut du bloc initial.

Finissons cette partie en énonçant la conjecture de Broué du défaut abélien, dans son énoncé originel, la conjecture porte sur le rapport entre la catégorie des modules sur un bloc (d'un groupe fini) et la catégorie des modules sur le correspondant de Brauer du bloc, dès que le défaut du bloc est abélien. Plus précisément : soit G un groupe fini, b un bloc de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$, de défaut D , $Br(b)$ le correspondant de Brauer de b (il s'agit d'un bloc de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell N_G(D)$).

Conjecture de Broué ([10]). *Si le défaut D est abélien, alors il existe une équivalence dérivée*

$$D^b(b\overline{\mathbb{Z}}_\ell G\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} D^b(Br(b)\overline{\mathbb{Z}}_\ell N_G(D)\text{-mod}).$$

Une telle conjecture aurait de nombreuses conséquences, par exemple, que les blocs ont le même nombre de caractères irréductibles ordinaires, le même nombre de caractères de Brauer irréductibles, des centres isomorphes... Cela permettrait notamment de donner une explication structurelle aux conjectures « locales/globales » de type numérique précédemment énoncées (McKay, Alperin, Brauer).

La conjecture de Broué a été prouvée dans de nombreux cas, les résultats les plus importants étant pour :

- les blocs de défaut cyclique (et G quelconque) [46] [36] [47],
- les ℓ -groupes G résolubles [19] [31],
- les groupes symétriques [16],
- les groupes réductifs finis (sous certaines conditions, voir ci-après)
- les blocs principaux de groupes sporadiques.

Outre la question de l'existence d'une équivalence dérivée, l'un des points critiques est l'obtention du complexe de $b\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$ -modules- $Br(b)\overline{\mathbb{Z}}_\ell N_G(D)$ réalisant l'équivalence dérivée par tensorisation. Une façon « systématique » d'obtenir ce complexe n'a été effectuée que dans la preuve de Chuang et Rouquier pour les groupes symétriques.

1.3 Le cas des groupes réductifs finis

Dans le cas particulier des groupes réductifs finis, la conjecture de Broué admet une formulation dite « géométrique » énoncée par Broué, Malle et Michel dans [11] et [12].

Fixons ℓ un nombre premier. Soit \mathbf{G} un groupe réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ ($p \neq \ell$), $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius et W le groupe de Weyl associé. Dans le reste de cette section, on ajoute l'hypothèse :

$$\ell \text{ ne divise pas } |W|.$$

On considère alors le groupe réductif fini $G = \mathbf{G}^F$. Pour b un bloc de G , le groupe de défaut D du bloc est alors abélien, ceci découle de l'hypothèse précédente.

Dans un premier temps, au lieu d'étudier le normalisateur du défaut, considérons le centralisateur $C_G(D) \subset N_G(D)$ obtenu comme suit. Par l'hypothèse $\ell \nmid |W|$, $C_G(D) := \mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F -stable et alors $C_G(D) := \mathbf{L}^F$.

Une fois choisi un sous-groupe parabolique \mathbf{P} contenant \mathbf{L} , la théorie de Deligne-Lusztig fournit des G -variétés- $C_G(D) : \mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}$, et donc des complexes de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$ -modules- $\overline{\mathbb{Z}}_\ell C_G(D)$ via le complexe de cohomologie $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$.

Conjecture de Broué (version géométrique) ([12]). *Il existe un sous-groupe parabolique \mathbf{P} dont \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi tel que :*

1. *Le complexe $b\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)Br(b)$ est la restriction d'un complexe de G -modules- $N_G(D)$.*
2. *$b\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)Br(b)$ réalise l'équivalence dérivée par tensorisation.*

La version géométrique de la conjecture de Broué a été démontrée pour le bloc principal dans les cas :

- \mathbf{G} quelconque et $\ell \mid q - 1$ par Puig [45],
- $\mathbf{G}^F = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q), \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ lorsque $\ell \mid q^n - 1$ par Bonnafé et Rouquier [6],
- \mathbf{G} de type B_n, C_n et $\ell \mid q^{2n} - 1$ par Dudas [26].
- (\mathbf{G}, F) un groupe quasi-simple, avec certaines hypothèses sur p et ℓ . C'est une extension du point précédent par Dudas dans [27], [29].

Reprenons la conjecture énoncée au-dessus, si l'on passe au corps des fractions en étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, dans [11] sont données les conséquences suivantes :

- Les groupes de cohomologie $b\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sont deux à deux disjoints : ils n'ont pas de \mathbf{G}^F -modules irréductibles en commun.
- L'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} \left(b \oplus_i \mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right)$ est isomorphe à l'algèbre de bloc $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^F}(D)Br(b)$.

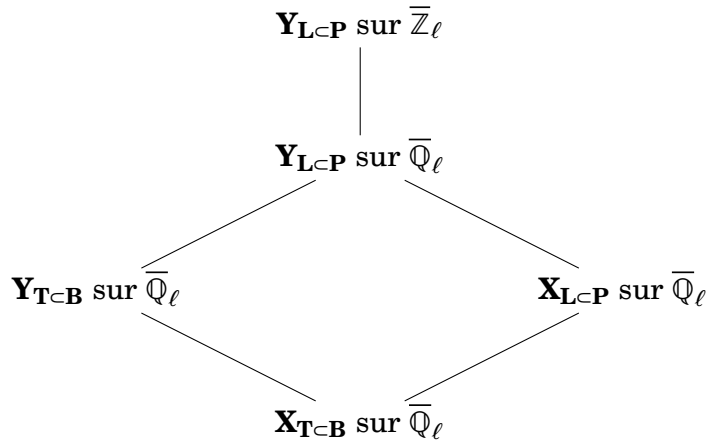
Les deux résultats ne sont pas disjoints. En effet, la disjonction de la cohomologie est un ingrédient important intervenant dans la description de l'algèbre d'endomorphismes. On le verra par la suite au chapitre 4.

Pour le moment, la disjonction de la cohomologie pour une telle variété de Deligne-Lusztig associée à un sous-groupe de Levi, sur un corps de caractéristique positive, semble encore hors de portée (dans les cas généraux), certaines simplifications ont donc été apportées en combinant les points suivants :

- Passer au corps des fractions $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par extension des scalaires.

- Travailler avec un tore au lieu d'un sous-groupe de Levi (et un sous-groupe de Borel au lieu d'un sous-groupe parabolique).
- Se restreindre aux caractères unipotents, ce qui revient à travailler avec une variété \mathbf{X} qui serait un quotient de la variété \mathbf{Y} précédemment mentionnée.

Ces différentes approches qui visent à obtenir des résultats de disjonction sont synthétisées dans le diagramme suivant :



Dans le cas le plus en bas de ce diagramme, le résultat de disjonction a été obtenu pour les variétés suivantes (ce sont des variétés candidates à la réalisation de l'équivalence dérivée). Dans ce qui suit, $\pi = w_0^2$, où w_0 est l'image dans le groupe de tresses B de l'élément de plus grande longueur $w_0 \in W$.

- les variétés associées aux éléments de Coxeter pour un groupe réductif connexe quelconque (Lusztig [39]),
- les variétés associées aux racines n -ième de π dans le type A_n (Digne et Michel [23]),
- les variétés associées aux racines 4-ième de π dans le type D_4 (Digne et Michel [23]),
- les groupes de rang 2 (Digne, Michel et Rouquier [25]).

Dans les cas $\mathbf{X}_{\mathbf{L}<\mathbf{P}}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbf{Y}_{\mathbf{L}<\mathbf{P}}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, le contexte et les conjectures concernant les variétés de Deligne-Lusztig *paraboliques* ont été récemment formulées par Digne et Michel dans [24]. Dans ce même cadre, d'autres travaux récents ont également été menés par Dudas [28] concernant le cas GL_n .

Les travaux dans ce manuscrit ont pour but d'avancer quelques résultats dans la partie la plus à gauche, dans le cas particulier du groupe linéaire.

1.4 Résultats obtenus dans la thèse

Les résultats de cette thèse portent sur le calcul de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig associées à un élément de Coxeter, dans le cas des groupes linéaires ; ainsi que sur les conséquences qui en découlent : pour l'étude de l'algèbre d'endomorphismes de la cohomologie, et pour le calcul de la cohomologie de la compactification de cette variété de Deligne-Lusztig.

Dans ce qui suit, on utilisera les variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{X} et \mathbf{Y} mentionnées dans la section précédente. Lorsque l'on souhaite préciser qu'il s'agit de variétés associées à des éléments de Coxeter, on notera respectivement $\mathbf{X}(c)$ et $\mathbf{Y}(\dot{c})$.

Cohomologie des variétés de Coxeter pour le groupe linéaire

Comme précisé à la section précédente, le calcul de la cohomologie des variétés de Coxeter s'inscrit dans le cadre de la vérification de certaines conséquences des conjectures de Broué (dans sa version géométrique). Notamment le résultat primordial est l'obtention de la disjonction des groupes de cohomologies.

Dans le cadre des variétés de Coxeter $\mathbf{X}(c)$, le résultat avait déjà été obtenu par Lusztig dans [37]. En ce qui concerne les variétés de Coxeter $\mathbf{Y}(\dot{c})$ dont $\mathbf{X}(c)$ est un quotient par un groupe fini (noté ultérieurement \mathbf{T}^{cF}), l'idée est de considérer les parties isotypiques pour l'action de \mathbf{T}^{cF} et de montrer la disjonction des groupes de cohomologies lorsque l'on fixe la partie isotypique. Ceci est précisément formulé dans le théorème 3.4.3.

La démonstration de ce théorème repose bien entendu sur l'utilisation du résultat de disjonction obtenu par Lusztig pour les variétés de Coxeter $\mathbf{X}(c)$ ainsi que sur l'utilisation d'un isomorphisme de « transitivité » permettant de se ramener à l'étude de la cohomologie d'une variété de Coxeter pour un groupe linéaire plus petit.

Etude de l'algèbre d'endomorphismes associée

Comme précisé dans la section 1.3, la disjonction de la cohomologie est un ingrédient majeur pour la mise en place d'un isomorphisme entre l'algèbre d'endomorphismes et l'algèbre de groupe d'un certain normalisateur, via la formule de Mackey.

L'utilisation de cette formule permet de montrer que les dimensions des deux algèbres coïncident. Pour montrer que les algèbres sont isomorphes, il est nécessaire de comparer le paramétrage ainsi que les dimensions des représentations irréductibles des deux algèbres. Pour l'algèbre d'endomorphismes, cela repose sur le théorème 3.4.3, alors que pour l'algèbre de groupe du normalisateur, il s'agit essentiellement de l'étude du produit semi-direct sous-jacent. L'isomorphisme ainsi obtenu est énoncé au théorème 4.3.3.

Dans la section 4.4, l'utilisation du théorème de déformation de Tits permet une description plus précise de cet isomorphisme.

Cohomologie des compactifications des variétés de Coxeter pour le groupe linéaire

Dans [25], Digne, Michel et Rouquier ont étudié en profondeur la cohomologie des compactifications des variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{X} . Ensuite, dans [7], Bonnafé et Rouquier ont introduit une construction explicite des compactifications des variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{Y} .

La dernière partie de cette thèse concerne l'étude de la cohomologie des compactifications des variétés de Coxeter $\mathbf{Y}(c)$ (pour le groupe linéaire).

L'idée sous-jacente est que l'on dispose d'une partition de la compactification à l'aide de sous-variétés s'apparentant à des variétés de Coxeter pour des groupes linéaires plus petits. L'application du théorème 3.4.3 permet alors d'obtenir une comparaison entre la cohomologie des compactifications des variétés de Coxeter $\mathbf{Y}(c)$, et celle des compactifications des variétés de Coxeter $\mathbf{X}(c)$ pour des groupes linéaires plus petits.

Le résultat principal est formulé dans le théorème 5.2.15.

Chapitre 2

Variétés de Deligne-Lusztig

Dans ce chapitre nous donnons des résultats concernant les variétés de Deligne-Lusztig dans un contexte général. On se réfère aux notations énoncées en 1.1.

2.1 Variétés de Deligne-Lusztig

2.1.1 Définitions

On rappelle les définitions des variétés de Deligne-Lusztig ainsi que les premières propriétés classiques qui leur sont associées. Ces résultats et énoncés se trouvent, par exemple, principalement dans [25] ou [8]. Ce sont pour la plupart des constructions visant à généraliser les variétés de Deligne-Lusztig « classiques » introduites par Deligne et Lusztig dans [20].

Pour $w \in W$ et $g\mathbf{B}, h\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$, on écrit $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$. Dans ce cas, on dit que $g\mathbf{B}$ et $h\mathbf{B}$ sont en *position relative* w . De façon similaire, pour $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et $g\mathbf{U}, h\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U}$, on écrit $g\mathbf{U} \xrightarrow{n} h\mathbf{U}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{U}n\mathbf{U}$.

Si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ est une suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et si $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$ est la suite des images dans W , on définit les variétés de Deligne-Lusztig $\mathbf{X}^{\mathbf{G}, F}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{Y}^{\mathbf{G}, F}(\mathbf{n})$ par :

$$\mathbf{Y}^{\mathbf{G}, F}(\mathbf{n}) = \{(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \\ g_1\mathbf{U} \xrightarrow{n_1} g_2\mathbf{U} \xrightarrow{n_2} \dots \xrightarrow{n_{r-1}} g_r\mathbf{U} \xrightarrow{n_r} g_{r+1}\mathbf{U} \text{ et } g_{r+1}\mathbf{U} = F(g_1\mathbf{U})\}$$

et

$$\mathbf{X}^{\mathbf{G}, F}(\mathbf{w}) = \{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \\ g_1\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} g_2\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{r-1}} g_r\mathbf{B} \xrightarrow{w_r} g_{r+1}\mathbf{B} \text{ et } g_{r+1}\mathbf{B} = F(g_1\mathbf{B})\}.$$

Remarque 2.1.1. On notera parfois $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ (resp. $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$) ou $\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{w})$ (resp. $\mathbf{Y}^{\mathbf{G}}(\mathbf{n})$) s'il n'est pas nécessaire de préciser le groupe ou l'endomorphisme de Frobenius.

Notons encore $\mathbf{w} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ la conjugaison par $w_1 \cdots w_r$ et remarquons qu'il existe alors une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ sur $\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$. En effet, si $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ et $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in \mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$, on définit

$$(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \cdot t = (g_1t\mathbf{U}, g_2{}^{n_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r{}^{n_{r-1}\cdots n_1}t\mathbf{U}, g_{r+1}{}^{n_r\cdots n_1}t\mathbf{U}).$$

Il vient immédiatement que si $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in \mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$, alors $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \cdot t \in \mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$. De plus, le morphisme canonique $\mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ induit un isomorphisme

$$\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{w}).$$

Ce qui précède permet de définir les variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{X} et \mathbf{Y} associées à des suites d'éléments du groupe de Weyl, ou du normalisateur du tore, et ce sera la façon la plus aisée de manipuler ces variétés. Comme remarque préliminaire, notons que cette définition ne fournit pas une bijection entre les suites d'éléments et les variétés (que ce soit \mathbf{X} ou \mathbf{Y}). Cela est notamment illustré par le lemme classique suivant (voir par exemple [20, 1.2]).

Lemme 2.1.2. *Supposons que $w = w_1w_2$ avec $\ell(w) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$.*

1. *Si $g\mathbf{B}, h\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$ sont tels que $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$, il existe un unique élément $i\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$ tel que $\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} i\mathbf{B}$ et $i\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} h\mathbf{B}$.*
2. *Réciproquement, si $g\mathbf{B}, h\mathbf{B}, i\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$ sont tels que $g\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} i\mathbf{B}$ et $i\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} h\mathbf{B}$ alors $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$.*

Ainsi, si $w_1, w_2 \in W$ sont tels que $\ell(w_1) + \ell(w_2) = \ell(w_1w_2)$, on dispose d'une identification naturelle

$$\mathbf{X}(w_1, w_2) \simeq \mathbf{X}(w_1w_2).$$

Dans le terme de gauche, on trouve une variété associée à une suite de deux éléments, tandis qu'à droite, on a une variété associée à une suite d'un élément.

Pour s'affranchir de ce type de difficulté, la bonne façon est alors d'utiliser le groupe de tresses associé à W . L'application $\sigma : W \rightarrow B$ peut être étendue en une application $\sigma : W^{\mathbb{N}} \rightarrow B$ grâce à l'égalité

$$\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_r),$$

si $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$.

Ainsi, si \mathbf{n}' est une autre suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ telle que les images définissent une suite \mathbf{w}' vérifiant $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}')$, alors il y a égalité $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} = \mathbf{T}^{\mathbf{w}'^F}$ et des isomorphismes de $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ variétés (resp. \mathbf{G}^F -variétés) :

$$\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n}) \simeq \mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n}') \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{w}) \simeq \mathbf{X}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{w}').$$

Enfin, tout comme l'on a étendu la définition de σ aux suites d'éléments, nous faisons de même pour la longueur ℓ . Si $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$, on définit

$$\ell(\mathbf{w}) = \ell(w_1) + \cdots + \ell(w_r),$$

et pour une suite d'éléments du normalisateur \mathbf{n} , la longueur est définie comme la longueur de la suite des images dans W .

Remarque 2.1.3. Sans rentrer dans les détails précédents, retenons qu'il est possible de se contenter des définitions utilisant les suites d'éléments, en prenant garde de ne « concaténer » deux éléments successifs que si la longueur (dans W) du produit est égal à la somme des longueurs.

Aussi, la définition classique, par exemple pour $\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(w)$ ($w \in W$), s'identifie à la définition généralisée pour une suite à un élément, ou encore à la définition généralisée pour la suite $\mathbf{w} = (s_1, \dots, s_r)$ où $w = s_1 \cdots s_r$ est une écriture réduite dans W .

Remarque 2.1.4. Dans ce manuscrit, les variétés de Deligne-Lusztig associées à une suite d'éléments du normalisateur \mathbf{n} ont été définies comme des \mathbf{G}^F -variétés- $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$. Ceci peut différer de certaines définitions où l'on ne se réfère plus à un tore \mathbf{T} fixé : il est possible de définir des variétés de Deligne-Lusztig associées à tout couple F -stable $(\mathbf{T}', \mathbf{B}')$ où \mathbf{T}' est un tore inclus dans le sous-groupe de Borel \mathbf{B}' . On se ramène alors à la définition précédente en fixant un couple (\mathbf{T}, \mathbf{B}) , puis en utilisant que les tores rationnels maximaux sont paramétrés par les éléments du groupe de Weyl associé au couple (\mathbf{T}, \mathbf{B}) fixé.

Dans certaines situations, le plus souvent liées aux caractères (et non pas aux variétés) de Deligne-Lusztig, l'utilisation de cette définition alternative s'avère légèrement plus aisée (par exemple dans la définition des séries de Lusztig).

2.1.2 Propriétés générales des variétés de Deligne-Lusztig

Nous rappelons brièvement quelques énoncés liés aux variétés de Deligne-Lusztig.

Comme $\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$ est une $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ -variété, on peut définir l'induction de Deligne-Lusztig par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n : D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}\text{-mod}) &\longrightarrow D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}) \\ C &\longmapsto \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}} C. \end{aligned}$$

Ce foncteur induit une application linéaire entre les groupes de Grothendieck des catégories $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}\text{-mod})$ et $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod})$:

$$\mathbf{R}_n : K(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}\text{-mod}) \longrightarrow K(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}),$$

et si l'on se donne $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F})$, $\mathbf{R}_n(\theta)$ est tout simplement le caractère de Deligne-Lusztig « classique » $\mathbf{R}_{\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}}^{\mathbf{G}^F}(\theta)$ (tel qu'il a été introduit initialement par Deligne et Lusztig dans [20]).

Proposition 2.1.5. *Les variétés $\mathbf{X}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$ sont quasi-affines, lisses et purement de dimension $\ell(\mathbf{n}) = \ell(\mathbf{w})$.*

Remarque 2.1.6. Il a été montré dans [20] que lorsque q est suffisamment grand, ces variétés sont affines.

2.1.3 Conjugaison géométrique et séries de Lusztig

Dans la partie précédente, il a été introduit une application linéaire R_n entre les groupes de Grothendieck des catégories $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{wF}\text{-mod})$ et $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod})$, reflet d'un foncteur au niveau des catégories dérivées.

Pour $\theta \in \mathbf{T}^{wF}$ donné, $R_n(\theta)$ est appelé caractère de Deligne-Lusztig. Ces caractères ont été étudiés de façon extensive au cours des années, bien plus que les variétés sous-jacentes. Les principaux résultats se trouvent dans [20], dans [23] ou encore [14]. Dans cette partie, nous omettons les propriétés les plus classiques pour nous concentrer sur les notions de conjugaison géométrique et les séries de Lusztig associées.

On se contente également d'utiliser des suites réduites à un seul élément, et donc les définitions « classiques » de la théorie de Deligne-Lusztig.

Rappelons auparavant une proposition justifiant l'intérêt des caractères de Deligne-Lusztig :

Proposition 2.1.7. *Pour tout $\chi \in \text{Irr}(\mathbf{G}^F)$, il existe un élément $w \in W$ et $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{wF})$ tel que $\langle \chi, R_w(\theta) \rangle \neq 0$.*

Les notions de conjugaison géométrique et de série de Lusztig permettent de répondre à la question réciproque : à quelle condition des caractères $R_w(\theta)$ et $R_{w'}(\theta')$ ont-ils un composant irréductible commun ?

Définition 2.1.8. *Les couples (w, θ) et (w', θ') où w et w' sont des suites finies d'éléments de W et θ (resp. θ') un caractère linéaire de \mathbf{T}^{wF} (resp. de $\mathbf{T}^{w'F}$) sont géométriquement conjugués si les caractères linéaires $\theta \circ N_{F^\eta/w}F$ et $\theta' \circ N_{F^\eta/w'}F$ de \mathbf{T}^{F^η} sont conjugués sous W .*

Le principal intérêt des classes de conjugaison géométrique est alors le suivant :

Théorème 2.1.9 (Deligne-Lusztig). *Si (w, θ) et (w, θ') sont dans deux séries géométriques différentes, alors $R_w(\theta)$ et $R_w(\theta')$ n'ont aucun composant irréductible commun.*

Introduisons désormais des structures duales. Elles nous permettent de paramétrer les classes de conjugaison géométrique d'une autre façon.

Proposition 2.1.10. *Considérons $(\mathbf{G}^*, \mathbf{T}^*, F^*)$ les structures duales de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$. Alors les classes de conjugaison géométrique de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$ sont en bijection avec les classes de conjugaison F^* -stables d'éléments semi-simples de \mathbf{G}^* .*

Remarque 2.1.11. En appliquant le théorème de Lang-Steinberg, on peut remarquer qu'il est suffisant de se contenter des classes de conjugaison F^* -stables d'éléments semi-simples rationnels $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$.

Ainsi, pour un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$, on peut alors définir la série de Lusztig associée, notée $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$, comme l'ensemble des caractères irréductibles

de \mathbf{G}^F apparaissant dans un certain $R_w(\theta)$, où (w, θ) est dans la série géométrique associée à s . On dispose alors d'une partition de $\text{Irr}(\mathbf{G}^F)$:

$$\text{Irr}(\mathbf{G}^F) = \bigsqcup_s \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s),$$

où s parcourt les représentants des classes de conjugaison F^* -stables d'éléments semi-simples dans \mathbf{G}^* .

On en vient alors au théorème principal de Lusztig, réduisant l'étude des séries géométriques à celle du caractère trivial. Dans ce qui suit, le théorème est formulé dans le cas où $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi \mathbf{L}^* de \mathbf{G}^* . On note \mathbf{L} le sous-groupe de Levi de \mathbf{G} , dual de \mathbf{L}^* . C'est le cas qui nous intéressera en particulier pour $\mathbf{G} = \text{GL}_n$.

Théorème 2.1.12. *Soit $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ semi-simple. L'induction $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ réalise une bijection*

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s) \simeq \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1).$$

Si on suit le développement fait dans [21] pour montrer le théorème précédent, remarquons l'utilisation de la proposition suivante. Cette proposition aura son utilité propre comme on l'explique dessous.

Proposition 2.1.13. *Soit s un élément central de \mathbf{G}^{*F^*} . Alors :*

1. *Il existe un caractère linéaire $\hat{s} \in \text{Irr}(\mathbf{G}^F)$ tel que, pour tout élément $w \in W$, le couple $(w, \hat{s}|_{\mathbf{T}^{wF}})$ est dans la série géométrique définie par s .*
2. *Le produit tensoriel avec \hat{s} définit une bijection*

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s).$$

Remarque 2.1.14. Dans l'assertion 1. de la proposition ci-dessus, remarquons que la restriction de \hat{s} à \mathbf{T}^{wF} a bien un sens. En effet, comme $s \in Z(\mathbf{G}^{*F^*})$, on a $s \in \mathbf{T}^{*wF^*}$ pour tout $w \in W$ (avec \mathbf{T}^* tore dual de \mathbf{T}). Le point crucial est de démontrer que le caractère \hat{s} ne dépend pas du tore utilisé pour sa construction. Ceci est détaillé dans la preuve de la proposition [21, 13.30].

De la proposition 2.1.13, remarquons que lorsque l'on regarde un caractère $R_w(\theta)$ (ou alors de façon équivalente la partie θ -isotypique de la cohomologie de la variété $\mathbf{Y}(w)$) où θ est dans une série géométrique associée à un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^*$ central (via la proposition 2.1.10), on pourra alors se ramener à l'étude de $R_w(1)$ (ou de la cohomologie de la variété $\mathbf{X}(w)$). Par exemple, le calcul des caractères de Deligne-Lusztig de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ fait dans [21, §15] utilise cette bijection.

2.1.4 Foncteur de Lusztig et transitivité

Nous introduisons maintenant une variante du foncteur d'induction de Deligne-Lusztig qui nous permettra d'établir un résultat de transitivité hautement important pour le reste du manuscrit.

On se référera à [5] pour les différentes constructions et le lien entre les deux points de vue exposés. La plupart du temps, nous privilégierons le premier point de vue qui utilise des structures standards. Cependant, certains résultats, comme le théorème B' de [5], s'énoncent de façon plus agréable avec le second point de vue.

Premier point de vue avec les structures standards

Soit I une partie de Δ . On note W_I le sous-groupe de W engendré par les réflexions simples s_α ($\alpha \in I$), \mathbf{P}_I le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ de \mathbf{G} , \mathbf{V}_I le radical unipotent de \mathbf{P}_I et \mathbf{L}_I le complément de Levi de \mathbf{V}_I contenant \mathbf{T} . On note également $\mathbf{B}_I = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}_I$, c'est un sous-groupe de Borel de \mathbf{L}_I , et \mathbf{U}_I son radical unipotent. Avec ces notations, on a :

$$F(\mathbf{P}_I) = \mathbf{P}_{\phi(I)}, F(\mathbf{V}_I) = \mathbf{V}_{\phi(I)}, F(\mathbf{L}_I) = \mathbf{L}_{\phi(I)}, F(\mathbf{B}_I) = \mathbf{B}_{\phi(I)}, F(\mathbf{U}_I) = \mathbf{U}_{\phi(I)}.$$

Choisissons un élément $v \in W$ tel que $v\phi(I) = I$, avec un tel choix, $\dot{v}F$ normalise \mathbf{L}_I et on définit :

$$\mathbf{Y}_{I,v} := \{g\mathbf{V}_I \in \mathbf{G}/\mathbf{V}_I, g^{-1}F(g) \in \mathbf{V}_I \dot{v}F(\mathbf{V}_I)\}.$$

C'est une $\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}_I^{\dot{v}F}$ -variété de dimension $\ell(v)$ sur laquelle \mathbf{G}^F agit par multiplication à gauche, et $\mathbf{L}_I^{\dot{v}F}$ agit par multiplication à droite. On peut alors définir un foncteur d'induction :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{I,v} : D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}_I^{\dot{v}F}\text{-mod}) &\longrightarrow D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}) \\ C &\longmapsto \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}_{I,v}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}_I^{\dot{v}F}} C. \end{aligned}$$

On vient ensuite au résultat essentiel de transitivité. Soit $v = s_1 \cdots s_r$ ($s_i \in S$, $\ell(v) = r$) une écriture réduite et $\mathbf{v} = (s_1, \dots, s_r)$ le r -uplet associé.

Soit $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ une suite d'éléments de W_I . Il existe un isomorphisme de $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^{\mathbf{w}\mathbf{v}F}$ -variétés

$$\mathbf{Y}_{I,v} \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{v}F}} \mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, \dot{v}F}(\mathbf{w}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Y}^{\mathbf{G}, F}(\mathbf{w}\mathbf{v}). \quad (2.1.15)$$

Ce qui fournit un isomorphisme de foncteurs : $\mathcal{R}_{I,v} \circ \mathcal{R}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{L}_I, \dot{v}F} \simeq \mathcal{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\mathbf{G}, F}$.

Second point de vue

Dans cette sous-partie, soit \mathbf{P} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} de radical unipotent \mathbf{V} , avec un complément de Levi F -stable \mathbf{L} . On définit :

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} := \{g\mathbf{V} \in \mathbf{G}/\mathbf{V}, g^{-1}F(g) \in \mathbf{V} \cdot F(\mathbf{V})\}.$$

Il s'agit d'une \mathbf{G}^F -variété- \mathbf{L}^F pour les actions de multiplication à gauche et à droite. De même que ci-dessus, on définit un foncteur d'induction :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbf{L}<\mathbf{P}} : D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F\text{-mod}) &\longrightarrow D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}) \\ C &\longmapsto \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} C. \end{aligned}$$

Faisons maintenant le lien avec le premier point de vue et rappelons la construction permettant de ramener tout sous-groupe de Levi F -stable, \mathbf{L} , contenu dans un sous-groupe parabolique \mathbf{P} , à des structures « standards ».

Dans ce qui suit, nous suivons [5, 11.2]. Il existe un élément $x_1 \in \mathbf{G}$ tel que ${}^{x_1}(\mathbf{L}_I, \mathbf{P}_I) = (\mathbf{L}, \mathbf{P})$. Posons alors $v_1 = x_1^{-1}F(x_1)$. Puisque \mathbf{L} est F -stable, on a ${}^{v_1}F\mathbf{L}_I = \mathbf{L}_I$, il existe donc $a \in \mathbf{L}_I$ tel que ${}^{av_1}F(\mathbf{T}, \mathbf{B}_I) = (\mathbf{T}, \mathbf{B}_I)$. Notons alors v l'image de $av_1 \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ dans le groupe de Weyl W . Quitte à modifier a , on peut supposer $av_1 = \dot{v}$. Il reste encore maintenant à modifier x_1 en un élément x satisfaisant $x^{-1}F(x) = \dot{v}$. Pour ce faire, par le théorème de Lang-Steinberg, choisissons $b \in \mathbf{L}_I$ tel que $b^{-1}v_1F(b) = a$, et alors, en posant $x = x_1b$ on trouve $x^{-1}F(x) = av_1 = \dot{v}$.

En résumé, les éléments $v \in W$ (avec un relèvement \dot{v} fixé) et $x \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ ainsi construits satisfont :

- $x^{-1}F(x) = \dot{v}$ et ${}^{\dot{v}}F(\mathbf{T}, \mathbf{B}_I) = (\mathbf{T}, \mathbf{B}_I)$,
- ${}^x(\mathbf{L}_I, \mathbf{P}_I) = (\mathbf{L}, \mathbf{P})$,
- l'application $x : \mathbf{L}_I \rightarrow \mathbf{L}$, $g \mapsto {}^xg$ induit un isomorphisme $\mathbf{L}_I^{\dot{v}F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}^F$.

Cette construction permet alors de relier les deux points de vue car l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} &\longrightarrow \mathbf{Y}_{I,v} \\ g\mathbf{V} &\longmapsto gx\mathbf{V}, \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbf{G}^F -variétés- \mathbf{L}^F (la variété $\mathbf{Y}_{I,v}$ étant vue comme une variété- \mathbf{L}^F par l'isomorphisme x^{-1}). Cela donne lieu au diagramme commutatif suivant permettant de jongler entre les différents foncteurs d'induction :

$$\begin{array}{ccc} D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F\text{-mod}) & \xrightarrow[\sim]{x_*} & D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}_I^{\dot{v}F}\text{-mod}) \\ & \searrow \mathcal{R}_{\mathbf{L}<\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} & \swarrow \mathcal{R}_{I,v} \\ & D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}) & \end{array}$$

Dans ce diagramme, x_* désigne l'équivalence de catégorie induite par l'isomorphisme x entre les groupes finis.

2.1.5 Caractères fantômes et paramétrages des représentations unipotentes

Dans cette sous-partie, nous introduisons les caractères fantômes. Ceux-ci nous sont utiles pour paramétrer les caractères unipotents en type A . Ce pa-

ramétrage sera utilisé pour caractériser les caractères unipotents apparaissant dans la cohomologie des variétés de Coxeter \mathbf{X} pour GL_n . Cette caractérisation est donnée à la fin de la partie 2.3.2.

Rappelons que les tores maximaux F -stables sont paramétrés par les classes de conjugaison de W . On renvoie le lecteur à [22] ou [14] pour les propriétés essentielles des tores de type $w \in W$.

Pour tout $w \in W$, notons $R_w = R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1_{\mathbf{T}_w})$ où \mathbf{T}_w est un tore maximal F -stable de type w relativement à \mathbf{T} (déjà fixé auparavant). Nous introduisons maintenant des fonctions appelées *caractères fantômes*. On rappelle que l'endomorphisme de Frobenius agit sur W et donc sur les caractères irréductibles de W . Considérons un caractère irréductible F -stable de W , $\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F$, alors, il existe une extension de χ , notée $\tilde{\chi}$ au produit semi-direct $W \rtimes \langle F \rangle$. En effet, cela résulte de la théorie de Clifford, voir par exemple la proposition [32, 19.13], le quotient de $W \rtimes \langle F \rangle$ par W étant cyclique.

On définit alors la fonction :

$$R_\chi = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \tilde{\chi}(wF) R_w. \quad (2.1.16)$$

Remarquons que la définition précédente dépend du choix de l'extension $\tilde{\chi}$. Le théorème ci-dessous justifie l'intérêt des caractères fantômes et utilise le choix d'une extension appelée « extension préférée » par Lusztig dans [40, 17.2].

Théorème 2.1.17 (Lusztig-Srinivasan [42]). *Soit \mathbf{G} un groupe réductif connexe dont le graphe de Coxeter est une union disjointe $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_s$ où chaque graphe Γ_i est de type A_m pour un certain entier m (dépendant de i). Alors les caractères fantômes R_χ ($\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F$) sont des caractères irréductibles de \mathbf{G}^F et l'application $\chi \mapsto R_\chi$ est une bijection entre $\mathrm{Irr}(W)^F$ et les classes d'isomorphismes des représentations unipotentes de \mathbf{G}^F .*

Remarque 2.1.18. Le résultat précédent n'est valable que pour des groupes dont les composantes quasi-simples sont de type A . En général, les caractères fantômes ne sont pas irréductibles et le paramétrage des caractères irréductibles apparaissant dans un caractère fantôme donné, fait appel à la théorie de Kazhdan-Lusztig, et à l'introduction de cellules bilatères dans le groupe de Weyl.

2.2 Quelques outils concernant la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

Dans cette partie, nous rappelons certaines propriétés utiles pour déterminer les groupes de cohomologie d'une variété de Deligne-Lusztig.

2.2.1 Cohomologie et longueurs

Dans les premiers résultats, la motivation est de pouvoir se ramener au calcul de la cohomologie pour des variétés associées à des éléments de plus courte longueur.

Les deux premières propositions sont classiques (déjà obtenues dans [20]) et fournissent le lien entre deux variétés associées à des éléments conjugués par une réflexion simple.

Proposition 2.2.1. *Supposons que F agisse trivialement sur W . Si $\ell(sws) = \ell(w)$ ($w \in W, s \in S$), alors il existe une équivalence de sites étales :*

$$\mathbf{Y}(\dot{s}\dot{w}\dot{s}^{-1}) \underset{\text{étale}}{\simeq} \mathbf{Y}(\dot{w}).$$

Démonstration. Supposons $sw > w$.

- Si $ws > s$, comme $\ell(sws) = \ell(w)$, du [20, Lemme 1.6.4], il vient $sws = w$, d'où le résultat.
- Si $ws < s$, alors on peut écrire $w = w_1s$ avec $\ell(w_1s) = \ell(w_1) + 1$. Alors, $sws = sw_1$ et comme $\ell(w_1s) = \ell(w_1) + 1 = \ell(sw_1)$, de la même façon qu'en [20, 1.6], $\mathbf{Y}(\dot{s}\dot{w}_1) \simeq \mathbf{Y}(\dot{w}_1\dot{s})$. Le lemme est ainsi prouvé.

Le cas $sw < w$ se traite de façon semblable. □

Pour la seconde proposition, nous utilisons la forme énoncée dans [8, Lemme 2.5].

Proposition 2.2.2. *Considérons les suites d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$, $\mathbf{n} := (n_1, n_2, \dots, n_r)$ et $\mathbf{n}' := (n_2, \dots, n_r, F(n_1))$; l'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(n_1, n_2, \dots, n_r) &\longrightarrow \mathbf{Y}(n_2, \dots, n_r, F(n_1)) \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r-1}\mathbf{U}) &\longmapsto (g_2\mathbf{U}, \dots, F(g_1)\mathbf{U}) \end{aligned}$$

induit une équivalence de sites étales. De plus, il s'agit d'un morphisme de \mathbf{G}^F -variétés- \mathbf{T}^{wF} , où $\mathbf{Y}(n_2, \dots, n_r, F(n_1))$ est une variété- \mathbf{T}^{wF} via l'isomorphisme $n_1 : \mathbf{T}_1^{n_1^{-1}wF(n_1)F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{wF}$. Ceci donne lieu au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}_1^{n_1^{-1}wF(n_1)F}\text{-mod}) & \xrightarrow{(n_1)_*} & D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{wF}\text{-mod}) \\ & \searrow \mathcal{R}_{\mathbf{n}'} & \swarrow \mathcal{R}_{\mathbf{n}} \\ & D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod}) & \end{array}$$

Dans le cas particulier où F agit trivialement sur les éléments du groupe de Weyl, on en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Supposons que F agisse trivialement sur W . Si $\ell(sws) = \ell(w) + 2$ ($w \in W, s \in S$), alors*

$$\mathbf{Y}(\dot{s}\dot{w}\dot{s}^{-1}) = \mathbf{Y}(\dot{s}, \dot{w}, \dot{s}^{-1}) \underset{\text{étale}}{\simeq} \mathbf{Y}(\dot{s}^{-1}, \dot{s}, \dot{w}).$$

Il s'agit d'un morphisme de \mathbf{G}^F -variétés- \mathbf{T}^{swsF} en voyant $\mathbf{Y}(s^{-1}, \dot{s}, \dot{w})$ comme une variété- \mathbf{T}^{swsF} via l'isomorphisme $s_* : \mathbf{T}^{wF} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{swsF}$.

Par la suite, on utilisera souvent ce dernier résultat en combinaison avec le résultat qui suit. Ce dernier est introduit par Bonnafé, Rouquier et Dat dans [8].

Un point de notation : pour θ un caractère de \mathbf{T}^{wF} , on note $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta}$ le \mathbf{T}^{wF} -module de dimension 1 sur lequel \mathbf{T}^{wF} agit par θ .

Proposition 2.2.4. *Notons $s = s_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) et supposons que θ est un caractère de \mathbf{T}^{wF} tel que $\theta(N_w(\alpha^\vee)) \neq 1$. Notons également d_θ le plus entier tel que $F^{d_\theta}(\theta) = \theta$.*

Alors, dans la catégorie dérivée $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F\text{-mod-}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{wF} \rtimes (F^{d_\theta}))$:

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(s^{-1}, \dot{s}, \dot{w})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{w}))[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta}.$$

2.2.2 Une équivalence de Morita

Rappelons maintenant le théorème suivant qui établit une équivalence de Morita. Le résultat a été énoncé originellement par Lusztig (voir [38, Proposition 10]). En revanche, la présentation et les notations utilisées ci-dessous sont celles de Bonnafé et Rouquier ([6, Théorème B']). L'apport de ces derniers a été d'obtenir cette équivalence de Morita sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ alors que le résultat de Lusztig se place sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Bien que le résultat ne soit utilisé que sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dans ce manuscrit, nous conservons la présentation de Bonnafé et Rouquier.

Pour le contexte et les notations utiles à ce théorème, on se référera à [5, 9.2, 9.3 et §10]. Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi F -stable de \mathbf{G} , inclus dans un sous-groupe parabolique \mathbf{P} . On considère \mathbf{L}^* un sous-groupe de Levi F^* -stable d'un sous-groupe parabolique de \mathbf{G}^* , dual de \mathbf{L} . A tout élément semi-simple $s \in \mathbf{L}^{*F^*} \subset \mathbf{G}^{*F^*}$ correspond bijectivement une série géométrique de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$, mais également de $(\mathbf{L}, \mathbf{T}, F)$ (voir 2.1.10). Pour θ un caractère de \mathbf{G}^F , notons \mathbf{e}_θ l'idempotent de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F$ associé. Définissons alors les éléments suivants comme les sommes des idempotents associés aux séries géométriques précédentes :

$$\mathbf{e}_s^{\mathbf{G}^F} := \sum_{\theta \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)} \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_s^{\mathbf{L}^F} := \sum_{\theta \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, s)} \mathbf{e}_\theta.$$

Théorème B'. *Soit s un élément semi-simple de \mathbf{L}^{*F^*} tel que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$. Alors le foncteur $\mathcal{R}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ induit une équivalence de Morita entre les algèbres $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F \mathbf{e}_s^{\mathbf{L}^F}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F \mathbf{e}_s^{\mathbf{G}^F}$.*

Plus précisément, le complexe $\mathcal{R}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F \mathbf{e}_s^{\mathbf{L}^F}$ n'a de cohomologie qu'en degré $r = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{V} \cap {}^F \mathbf{V}$ et son r -ième bimodule de cohomologie induit l'équivalence de Morita décrite.

Remarque 2.2.5. Par la suite, nous travaillerons en nous ramenant à des structures standards. A travers l'isomorphisme x introduit à la fin de 2.1.4, la conclusion du théorème B' devient alors que le foncteur $\mathcal{R}_{I, \nu}$ induit une équivalence de Morita entre la partie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}_I^{\dot{\nu}F}$ associée à une série géométrique de $(\mathbf{L}_I, \mathbf{T}, \dot{\nu}F)$ et la partie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F$ associée à la série géométrique correspondante dans $(\mathbf{G}, \mathbf{T}, F)$.

2.2.3 Cohomologie et valeurs propres du Frobenius

Dans cette sous-partie, rappelons une partie de la proposition [39, 2.20] énoncée par Lusztig, nous en aurons besoin pour la seconde partie du théorème 3.4.3.

Auparavant, fixons une fois pour toutes une racine carrée de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, notée \sqrt{q} . Et pour tout entier i , $q^{i/2}$ désigne $(\sqrt{q})^i$.

Dans la proposition [39, 2.20] énoncée par Lusztig, il est montré qu'à toute représentation irréductible ρ est associée une valeur propre d'une puissance du Frobenius stabilisant la partie ρ -isotypique d'un groupe de cohomologie dans lequel ρ apparaît; et que de plus, cette valeur propre s'écrit comme le produit d'une racine de l'unité et d'une puissance de q .

Introduisons quelques notations pour être plus précis. Soit $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ un relevé *cohérent* de $w \in W$, $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{wF})$ et d le plus petit multiple de δ tel que F^d stabilise θ .

Le choix d'un relèvement particulier de W via un relèvement *cohérent* a été formulé par Lusztig dans [39, 1.23]. On reviendra sur ce point dans la section 3.7.

Considérons les ensembles :

$$\mathcal{E}_{n,\theta} = \{\rho \text{ irréductible, } \langle \rho, \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(n))_\theta \rangle \neq 0 \text{ (pour un certain } i)\},$$

$$\mathcal{E}_{w,\theta} = \bigcup_{n_1, \bar{n}_1 \in wW(\theta)} \mathcal{E}_{n_1,\theta},$$

cette union n'étant pas nécessairement disjointe, et les n_1 étant des relèvements cohérents également.

Proposition 2.2.6 (Lusztig, [39]). *Il existe une injection*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{w,\theta} &\rightarrow \{\text{racines de l'unité de } \overline{\mathbb{Q}}_\ell\}, \\ \rho &\mapsto \lambda_\rho \end{aligned}$$

telle que, si $\langle \rho, \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(n))_\theta \rangle \neq 0$ (pour un certain entier i), alors :

- $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(n))_{\theta,\rho}$ est F^d -stable,
- les valeurs propres de F^d sur $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(n))_{\theta,\rho}$ sont de la forme $\lambda_\rho q^{d\frac{m}{2}}$, pour un certain entier naturel m .

Pour ce qui suit, fixons $w \in W$ et un représentant $\dot{w} \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. D'après le résultat précédent, pour caractériser la cohomologie de $\mathbf{Y}(\dot{w})$, il est utile de calculer les valeurs propres du Frobenius (ou plutôt d'une puissance du Frobenius) sur les parties isotypiques (pour l'action du tore). Ce qui suit a pour but d'expliquer le rapport entre le choix du représentant \dot{w} et les valeurs propres du Frobenius.

Il est bien connu que le choix du représentant de w ne modifie pas la variété de Deligne-Lusztig, ou plus précisément (voir [5, 5.5]) : pour deux représentants \dot{w} et $\dot{w}t$ ($t \in \mathbf{T}$), il existe un isomorphisme canonique de \mathbf{G}^F -variétés- \mathbf{T}^{wF} donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\dot{w}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Y}(\dot{wt}) \\ g\mathbf{U} & \xrightarrow{\quad} & g\tau^{-1}\mathbf{U}, \end{array}$$

où $\tau \in \mathbf{T}$ est tel que $\tau^{-1w}F(\tau) = {}^w t$; un tel τ existe par le théorème de Lang-Steinberg.

En revanche, l'action du Frobenius et donc les valeurs propres du Frobenius vont être modifiées.

Plus précisément, supposons qu'il existe un entier k tel que $F^k(\dot{w}) = \dot{w}$ et $F^k(\dot{wt}) = \dot{wt}$ (c'est-à-dire $F^k(t) = t$). Si F^k est l'endomorphisme de Frobenius sur la variété de gauche, F^k agit sur la variété de droite en étant tordu par l'isomorphisme précédent. Ceci est formulé plus explicitement dans la proposition suivante pour chaque composante isotypique.

Proposition 2.2.7. *Soit $\theta \in \mathbf{T}^{wF}$. Avec les notations qui précèdent, F^k agit sur la partie θ -isotypique de la cohomologie de $\mathbf{Y}(\dot{wt})$ par multiplication par $\theta(F^k(\tau)\tau^{-1})$ de l'action de F^k sur la cohomologie de $\mathbf{Y}(\dot{w})$.*

Plus précisément, si l'on note $\varphi_\theta : \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{w}))_\theta \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{wt}))_\theta$ l'isomorphisme induit par l'isomorphisme entre les variétés, alors $\varphi_\theta \circ F^k \circ \varphi_\theta^{-1} = \theta(F^k(\tau)\tau^{-1}) \circ F^k$.

Démonstration. Remarquons déjà que l'on a bien $F^k(\tau)\tau^{-1} \in \mathbf{T}^{wF}$ car $\tau^{-1w}F\tau = {}^w t \in \mathbf{T}^{F^k}$. Notons f l'isomorphisme de variétés précédemment introduit, $f : \mathbf{Y}(\dot{w}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Y}(\dot{wt})$. Alors l'endomorphisme de Frobenius agit sur $\mathbf{Y}(\dot{wt})$ par $f \circ F^k \circ f^{-1}$, on obtient alors pour $g\mathbf{U} \in \mathbf{Y}(\dot{wt})$, $f \circ F^k \circ f^{-1}(g\mathbf{U}) = F^k(g)F^k(\tau)\tau^{-1}\mathbf{U}$. On en déduit le résultat lorsque l'on considère une composante θ -isotypique. \square

Des exemples seront ensuite traités dans le cas des groupes linéaires au lemme 3.7.5.

2.3 Variétés de Deligne-Lusztig associées à un élément de Coxeter

Les variétés associées à un élément de Coxeter sont les objets d'étude principaux de cette thèse. Nous rappellerons la définition ainsi que des propriétés importantes, notamment cohomologiques, propres aux variétés de Coxeter.

2.3.1 Eléments de Coxeter

On rappelle avant de commencer que l'endomorphisme de Frobenius agit via ϕ sur l'ensemble des racines simples Δ .

Définition 2.3.1. *Pour tous systèmes de représentants $[\Delta/\phi] = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ des orbites de racines simples sous l'action de ϕ , le produit $c = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ est appelé élément de Coxeter de la paire (W, F) .*

Les caractérisations suivantes des éléments de Coxeter sont dues à Springer dans [48].

Considérons le groupe de Weyl en terme de groupe de réflexion, introduisons alors l'automorphisme $q^{-1}F \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, avec $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} X(\mathbf{T})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel sur lequel W agit naturellement (cet automorphisme est noté σ dans [48, §7]). Cet automorphisme est d'ordre δ et normalise W (δ étant la plus petite puissance telle que \mathbf{G} admette une structure déployée pour F^δ). En utilisant cet automorphisme et plus précisément l'automorphisme linéaire $c \cdot q^{-1}F = q^{-1}cF$ de V , on peut formuler plus facilement certaines propriétés des éléments de Coxeter. Le théorème suivant est dû à Springer [48, §7]. La valeur h utilisée ci-dessous est définie par $h := h_0\delta$, où h_0 est le nombre de Coxeter de \mathbf{G} relativement à F , suivant les notations de Lusztig [39, 1.13].

Théorème 2.3.2 (Springer). *Supposons W irréductible et c un élément de Coxeter de la paire (W, F) . Alors :*

1. *L'élément $q^{-1}cF$ est h -régulier (admet un vecteur propre régulier dont la valeur propre associée est une racine primitive h -ième de l'unité).*
2. *Les éléments de la forme $q^{-1}c'F$ sont tous conjugués, ce qui implique que les c' tels que $q^{-1}c'F$ admette une valeur propre d'ordre h sont, eux, tous F -conjugués.*
3. *L'élément $q^{-1}cF$ est d'ordre h , il permute les racines en $\frac{|\Phi|}{h}$ orbites de longueur h .*
4. *Le centralisateur de $c\sigma$ dans W est donné par :*

$$C_W(q^{-1}cF) = \langle (q^{-1}cF)^\delta \rangle,$$

où l'on rappelle que $(q^{-1}cF)^\delta = cF(c) \cdots F^{\delta-1}(c)$.

Le tableau suivant récapitule les valeurs du nombre de Coxeter h_0 pour chaque type de groupe, on rappelle que l'égalité $h_0 = |W^{cF}|$ est vérifiée pour le nombre de Coxeter. On s'intéressera tout particulièrement aux groupes de type A_n (ou plutôt A_{n-1}) par la suite.

type	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	G_2
h_0	$n+1$	$2n$	$2n-2$	12	18	30	12	6

2.3.2 Cohomologie des variétés de Coxeter \mathbf{X}

Dans cette partie, nous donnons les résultats obtenus concernant la cohomologie des variétés de Coxeter.

D'une façon générale, le cas de la variété \mathbf{X} a souvent été bien mieux compris que celui de la variété \mathbf{Y} . Dans le cadre ordinaire, il s'agit avant tout de l'article [37] de Lusztig. Dans celui-ci, le calcul de la cohomologie est effectué pour des groupes de tous types.

Théorème 2.3.3 (Lusztig). F^δ est un automorphisme semi-simple de $\bigoplus_i H_c^i(\mathbf{X}(c))$; il admet h_0 valeurs propres distinctes (h_0 étant le nombre de Coxeter associé au groupe) et les sous-espaces propres sont des \mathbf{G}^F -modules irréductibles, deux à deux non isomorphes.

De plus, on dispose de tableaux donnant la répartition des valeurs propres, ainsi que leur valeur, dans les groupes de cohomologie. Voici par exemple ceux des groupes de Coxeter de type A_n , B_n et D_n .

$$\begin{array}{l}
 A_n : \begin{array}{c|c|c|c} H_c^n & H_c^{n+1} & \dots & H_c^{2n} \\ \hline 1 & q & \dots & q^n \end{array} \\
 B_n : \begin{array}{c|c|c|c|c|c} H_c^n & H_c^{n+1} & \dots & H_c^{2n-2} & H_c^{2n-1} & H_c^{2n} \\ \hline 1 & q & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} & q^n \\ -q & -q^2 & \dots & -q^{n-1} & & \end{array} \\
 D_n : \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} H_c^n & H_c^{n+1} & \dots & H_c^{2n-4} & H_c^{2n-3} & H_c^{2n-2} & H_c^{2n-1} & H_c^{2n} \\ \hline 1 & q & \dots & q^{n-4} & q^{n-3} & q^{n-2} & q^{n-1} & q^n \\ -q^2 & -q^3 & \dots & -q^{n-2} & & & & \end{array}
 \end{array}$$

Soulignons que le résultat précédent est tout à fait remarquable. En effet d'une façon générale, la cohomologie alternée d'une variété de Deligne-Lusztig est plus facilement accessible : c'est toute la théorie dite des caractères de Deligne-Lusztig. En revanche, obtenir des informations sur les groupes de cohomologie individuels ainsi que sur l'endomorphisme de Frobenius agissant dessus est une question nettement plus difficile. En dehors du résultat précédent de Lusztig sur les variétés de Coxeter, et de l'étude de certains petits cas, peu de faits généraux ont été établis. L'article de Digne, Michel et Rouquier [25] a ouvert la voie à un certain nombre d'articles de Digne et Michel calculant complètement la cohomologie de certaines variétés \mathbf{X} , [23].

Le théorème précédent admet comme corollaire le résultat ci-dessous qui prendra son importance par la suite, notamment dans le chapitre 4.

Proposition 2.3.4. L'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^\bullet(\mathbf{X}(c)))$ s'identifie à l'algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\langle F^\delta \rangle$.

En effet, tout \mathbf{G}^F -module simple de $H_c^\bullet(\mathbf{X}(c))$ est un espace propre de F^δ et ceux-ci sont tous distincts. Donc tout \mathbf{G}^F -endomorphisme de $H_c^\bullet(\mathbf{X}(c))$ est bien un polynôme en F^δ : il suffit d'utiliser une interpolation polynomiale associant la valeur de l'endomorphisme sur un \mathbf{G}^F -module simple à la valeur propre de F^δ correspondant à ce \mathbf{G}^F -module simple. Remarquons que cela utilise très fortement le résultat de disjonction de la cohomologie, comme précisé dans [23, §4].

Pour finir cette section, mettons en avant la proposition suivante intervenant dans la preuve du théorème 2.3.3 de Lusztig. Si J est une partie ϕ -stable des racines simples, alors le sous-groupe parabolique standard \mathbf{P}_J et le complément de Levi \mathbf{L}_J associés sont tous les deux F -stables. Rappelons que l'on obtient un

élément de Coxeter c_J du couple (W_J, F) en enlevant de c les réflexions associées aux racines simples n'appartenant pas à J . Enfin, on note $n_J := |J/\phi|$ le nombre de ϕ -orbites dans J , en particulier, si $J = \Delta$ alors $n_\Delta = r$ (voir la définition 2.3.1).

Proposition 2.3.5. *Soit J une partie ϕ -stable de Δ . et M_0 un \mathbf{L}_J^F -module irréductible cuspidal de $H_c^{|J|}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_J))$. Notons $H_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))[M_0]$ la somme des sous- \mathbf{G}^F -modules de $H_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))$ apparaissant dans l'induction parabolique $\text{Ind}_{P_J^F}^{\mathbf{G}^F} M_0$, alors :*

$$\langle H_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))[M_0], \text{Ind}_{P_J^F}^{\mathbf{G}^F} (H_c^{n_J}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_J))[M_0]) \rangle = \binom{r - n_J}{i - r}.$$

Remarque 2.3.6. — Cette proposition se simplifie nettement si ϕ agit trivialement sur les racines simples. Ce sera le cas dans le groupe linéaire pour l'endomorphisme de Frobenius standard. En particulier, dans ce cas, n_J est alors le cardinal $|J|$ de la partie.

— Cette proposition est l'ingrédient principal permettant de paramétrer les représentations unipotentes apparaissant dans la cohomologie de $\mathbf{X}^{\text{GL}_n}(c)$. Ceci est fait à la sous-section 3.2.1.

2.4 Variétés de Deligne-Lusztig et compactifications

2.4.1 Compactification de \mathbf{X} et cohomologie

Comme pour les autres aspects portant sur les variétés de Deligne-Lusztig, la détermination de la cohomologie des compactifications des variétés de Deligne-Lusztig a été étudiée plus en profondeur pour les variétés \mathbf{X} : il s'agit essentiellement de l'article de Digne, Michel et Rouquier [25].

Dans cet article, outre la compactification « classique » selon Bott-Samelson-Demazure-Hansen, la théorie des variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{X} associées à des éléments \mathbf{w} d'un groupe de tresses complété \underline{B}^+ a été développée. L'utilisation de ce groupe de tresses complété est le reflet de compactifications partielles.

2.4.2 Compactification de \mathbf{Y}

La construction suivante est faite pour un groupe réductif connexe \mathbf{G} quelconque. Nous reprenons également le formalisme des suites d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ ou W , ces suites sont désignées par des lettres grasses.

Notation 2.4.1. Dans toute la sous-section, nous fixons une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de racines simples de Δ et pour $1 \leq i \leq r$ on écrit pour simplifier $s_i = s_{\alpha_i}$ et $\dot{s}_i = \dot{s}_{\alpha_i}$. On considère alors les suites d'éléments :

$$\dot{\mathbf{w}} = (\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_r) \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = (s_1, \dots, s_r).$$

Enfin, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ sont deux suites d'éléments de $S \cup \{1\}$ de même longueur, nous écrirons $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ si pour tout $1 \leq i \leq r$, $x_i = 1$ ou y_i . Dans ce cas, on introduit l'ensemble d'entiers $I_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} := \{1 \leq i \leq r, x_i = 1\}$. On en profite également pour rappeler la définition du sous-réseau $Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}}$:

$$Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} := \sum_{i \in I_{\mathbf{x}, \mathbf{w}}} \mathbb{Z} s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee).$$

Dans [20, 9.11] Deligne et Lusztig ont construit une compactification lisse $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ à la Bott-Demazure-Samelson-Hansen ; puis dans [5], Bonnafé et Rouquier ont construit explicitement la normalisation de $\overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})$ de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}})$: c'est l'unique variété normale Z contenant $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}})$ comme sous-variété ouverte dense et munie d'un morphisme fini $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : Z \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ prolongeant le morphisme quotient par $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$, $\pi_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$; la situation est résumée dans le diagramme suivant, qui est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}}) \\ \downarrow \text{!/}\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} & & \downarrow \text{!/}\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \end{array}$$

Le principal théorème démontré dans [5] est le suivant :

Théorème 2.4.2. 1. La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})$ est une variété projective, normale, rationnellement lisse, de lieu singulier contenu dans

$$\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1} \left(\bigcup_{\substack{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w} \\ |I_{\mathbf{x}, \mathbf{w}}| \geq 2}} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right).$$

2. La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})$ est munie d'une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ prolongeant l'action sur $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}})$ et telle que $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}$ induit un isomorphisme

$$\overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}}) / \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}).$$

3. Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, le stabilisateur dans $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ d'un élément de $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ est égal à $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}})$.

4. Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, alors il existe un morphisme canonique $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}}) \rightarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}}) & \xrightarrow{i_{\mathbf{x}}} & \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \\ & \searrow \text{!/}\mathbf{T}^{\mathbf{x}F} = \pi_{\mathbf{x}} & \downarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}} \\ & & \mathbf{X}(\mathbf{x}) \end{array}$$

et induisant un isomorphisme

$$\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}})/N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \xrightarrow{\sim} \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})).$$

Au cours de la description explicite de la compactification, Bonnafé et Rouquier ont introduit des sous-variétés lisses $\bar{\mathbf{Y}}_I(\dot{\mathbf{w}})$ ($I \subset \{1, \dots, \ell(\mathbf{w})\}$) satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$, $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \bar{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x},\mathbf{w}}}(\dot{\mathbf{w}})$.
2. On dispose d'une partition de la compactification :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}}) = \bigsqcup_{I \subset \{1, \dots, \ell(\mathbf{w})\}} \bar{\mathbf{Y}}_I(\dot{\mathbf{w}}).$$

Aussi, en utilisant le dernier isomorphisme mentionné au théorème précédent, on déduit une nouvelle écriture de cette partition sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}}) = \bigsqcup_{\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}} \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}})/N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}). \quad (2.4.3)$$

Remarque 2.4.4. Tout comme dans le cas des variétés \mathbf{X} , il est possible de définir des compactifications partielles en adaptant très légèrement la construction faite par Bonnafé et Rouquier. Cet aspect n'est pas détaillé dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'à la compactification globale de $\mathbf{Y}(\dot{c})$.

2.4.3 Sous-groupes de tores

Dans cette sous-section, nous étudierons plus en détails les sous-groupes de la forme $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$. Les résultats sont énoncés pour \mathbf{G} réductif connexe quelconque. L'application des résultats de cette sous-section aux groupes linéaires, et pour \mathbf{w} correspondant à un élément de Coxeter, est notre objectif. Cela sera effectué à la section 5.1.

Pour motiver l'étude des sous-groupes $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$, commençons par réécrire la partition 2.4.3 avec des notations légèrement plus agréables pour la suite. Toute sous-suite $\mathbf{x} \preceq \mathbf{w}$ est obtenue à partir de \mathbf{w} en remplaçant un certain nombre de réflexions simples par 1. Si I désigne l'ensemble des indices des réflexions simples enlevées, c'est-à-dire $I = I_{\mathbf{x},\mathbf{w}}$, on écrit $\mathbf{x} = \mathbf{w}_I$. La partition 2.4.3 se réécrit alors :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}}) = \bigsqcup_{I \subset \{1, \dots, \ell(\mathbf{w})\}} \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}_I)/N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I}).$$

Si l'on suppose que F agit trivialement sur les s_i (ce sera effectivement le cas dans la section 5.1), sur la variété $\bar{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})$, on dispose d'une action de $\mathbf{G}^F \times (\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \rtimes \langle F \rangle)$, il en va de même sur chacun des morceaux de la partition de droite. En effet, d'après la proposition [7, 4.4], pour tout sous-suite \mathbf{w}_I de \mathbf{w} , il existe un isomorphisme

$$r_I : \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}/N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathbf{w}_I^F}/N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I}).$$

Si l'on note $\kappa_{\mathbf{w},I} : \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \rightarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}/N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})$ le morphisme de passage au quotient, alors $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}_I)/N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})$ est vu comme une $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -variété via $r_I \circ \kappa_{\mathbf{w},I}$.

De cette dernière partition, on obtient finalement une formule donnant la cohomologie alternée de la compactification. Par la remarque que l'on vient de faire, cette formule est à valeurs dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(\mathbf{G}^F \times (\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \rtimes \langle F \rangle))$:

$$H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})) = \sum_{I \subset \{1, \dots, \ell(\mathbf{w})\}} H_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}_I))^{N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})}. \quad (2.4.5)$$

Puisque nous souhaitons prendre les parties θ -isotypiques (pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F})$) de ces cohomologies alternées, il faut être précis concernant ce qu'il se passe dans le membre de droite et cela requiert à nouveau l'utilisation de l'isomorphisme $r_I : \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}/N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathbf{w}_I F}/N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})$.

Notation 2.4.6. L'isomorphisme r_I induit clairement une bijection entre les caractères de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ triviaux sur $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})$ et les caractères de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}_I F}$ triviaux sur $N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})$. Par la suite, on utilisera cette bijection avec la notation $\theta \mapsto \theta_I$.

Remarquons, de plus, que : $d_{\theta_I} = d_\theta$.

On en déduit la proposition suivante permettant de déterminer la partie θ -isotypique du membre de droite dans l'équation 2.4.5.

Proposition 2.4.7. Pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F})$:

$$(H_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}_I))^{N_{\mathbf{w}_I}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I})})_\theta = \begin{cases} H_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{w}}_I))_{\theta_I} & \text{si } \theta \text{ est trivial sur } N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{w}_I}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Chapitre 3

Cohomologie des variétés de Coxeter $Y(\dot{c})$ pour GL_n

3.1 Notations pour le cas GL_n

Notations générales

Dans cette partie, nous reprenons les notations précédentes en nous réduisant au cas $\mathbf{G} = GL_n$ et pour l'endomorphisme de Frobenius F standard (élévation à la puissance q des entrées de la matrice). On prend les conventions suivantes :

- \mathbf{B} le sous-groupe de Borel constitué des matrices triangulaires supérieures,
- \mathbf{T} le tore des matrices diagonales,
- \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} constitué des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale,
- Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, $\alpha_{i,j}$ les racines relatives à \mathbf{T} définies par $\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i t_j^{-1}$. Les racines duales associées sont notées $\alpha_{i,j}^\vee$, et $s_{\alpha_{i,j}}$ désigne la réflexion relativement à la racine $\alpha_{i,j}$.
- L'endomorphisme de Frobenius F est déployé ($\delta = 1$). L'action est donc triviale sur le groupe de Weyl (relativement à $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$), lui-même identifié au groupe des permutations \mathfrak{S}_n via l'application $(i, j) \mapsto s_{\alpha_{i,j}}$. On note s_i les transpositions $(i, i+1)$ ($i = 1, \dots, n-1$) et $c_n := s_1 \dots s_{n-1}$ (ou c s'il n'y a pas d'ambiguïté) un élément de Coxeter associé au couple (W, F) (voir 2.3.1).
- Sauf mention contraire, θ désignera toujours un élément de $\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ et on note d_θ, e_θ les entiers définis par :
$$d_\theta \text{ est le plus petit entier tel que } F^{d_\theta}(\theta) = \theta^{q^{d_\theta}} = \theta; e_\theta = n/d_\theta.$$
- $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ un élément semi-simple associé à la classe de conjugaison géométrique de θ . Cet élément s est choisi à \mathbf{G}^{F^*} -conjugaison près, comme GL_n est à centre connexe.

Considérons le morphisme $p_1 : \mathbf{T} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{p_1} & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & t_1. \end{array}$$

Celui-ci induit un isomorphisme $p_1 : \mathbf{T}^{cF} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^n}^\times$ dont l'inverse est donné par $p_1^{-1} : t \mapsto \mathrm{diag}(t, t^q, \dots, t^{q^{n-1}})$. Cet isomorphisme de groupe permet de construire des caractères de la façon suivante :

- Si θ est un caractère de \mathbf{T}^{cF} , alors $(p_1)_*(\theta) = \theta \circ p_1^{-1}$ est un caractère de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$,
- Si θ' est un caractère de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$, alors $(p_1)^*(\theta') = \theta' \circ p_1$ est un caractère de \mathbf{T}^{cF} .

Les deux applications sont clairement inverses l'une de l'autre et définissent donc une bijection :

$$(p_1)_* : \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_{q^n}^\times).$$

On fixe également une fois pour toute un générateur ζ de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$, c'est-à-dire une racine $(q^n - 1)$ -ème de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Lien entre le centralisateur $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ et les structures « standards »

D'une façon générale, lorsque toutes les racines de \mathbf{G} ont la même longueur, on peut définir le centralisateur $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ de la façon suivante (voir [20, 5.19]). C'est bien entendu le cas des groupes linéaires et nous utilisons donc la définition qui suit.

Définition 3.1.1. Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$. On définit le centralisateur $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ comme le groupe réductif cF -stable engendré par \mathbf{T} et les sous-groupes à 1-paramètre \mathbf{U}_α (relatifs à \mathbf{T}) tels que θ (vu comme un caractère $Y(\mathbf{T})$) soit trivial sur α^\vee .

Cette dernière condition s'exprime plus simplement par $\theta(N_c(\alpha^\vee)) = 1$.

Dans cette définition, un caractère de $\mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ est vu comme un caractère de $Y(\mathbf{T})$ via la suite exacte (voir par exemple [20, 5.2.3] ou [13, 8.11]) :

$$1 \longrightarrow Y(\mathbf{T}) \xrightarrow{cF-1} Y(\mathbf{T}) \xrightarrow{N_c} \mathbf{T}^{cF} \longrightarrow 1.$$

Cela nous permet de préciser le centralisateur de θ par la proposition :

Proposition 3.1.2. Le centralisateur $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ est le groupe réductif cF -stable engendré par \mathbf{T} et les sous-groupes à 1-paramètre $\mathbf{U}_{\alpha_{i,j}}$ (relatifs à \mathbf{T}) où $|i - j|$ est divisible par d_θ .

Démonstration. Au vu de la définition précédente, il suffit de déterminer les entiers i, j tels que $\theta \circ N_c$ est trivial sur $\alpha_{i,j}^\vee$, la racine duale de $\alpha_{i,j}$.

Notons $D_{i,j} = \alpha_{i,j}^\vee(\zeta)$ (ζ la racine $(q^n - 1)$ -ième de l'unité précédemment fixée). Les seuls coefficients diagonaux non égaux à 1 sont ζ et ζ^{-1} en position i et j . Alors :

$$p_1(D_{i,j} \cdot {}^{cF}D_{i,j} \cdots ({}^{cF})^{n-1}D_{i,j}) = \zeta^{q^{n-i+1} - q^{n-j+1}}.$$

En factorisant $q^{n-i+1} - q^{n-j+1}$ par $q^{|i-j|} - 1$, on en déduit que $(p_1)_*(\theta)$ est trivial sur cet élément si et seulement si d_θ divise $|i - j|$. \square

Corollaire 3.1.3. *Le sous-groupe de Levi cF -stable $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ est conjugué au sous-groupe de Levi standard $\mathbf{L}_I = (\mathrm{GL}_{e_\theta})^{d_\theta}$.*

Dans la suite, on notera $x \in \mathbf{G}$ un élément réalisant cette conjugaison.

Nous souhaitons déterminer l'élément v , introduit à la fin de la section 2.1.4, qui fait le lien entre les structures « non-standards » et « standards ». Cet élément sera notamment nécessaire pour utiliser la formule de transitivité 2.1.15.

Au vu de la « méthode » pour déterminer v expliquée à la fin de la section 2.1.4, le contexte est celui d'un groupe de Levi F -stable (noté \mathbf{L} en 2.1.4). Remarquons que puisque nous avons fait le choix de fixer un tore F -stable, \mathbf{T} , quitte à modifier l'endomorphisme de Frobenius, cela contrevient quelque peu à notre choix : nous ne pouvons pas travailler directement avec $C_{\mathbf{G}}(\theta)$ (comme introduit ci-dessus), mais il est nécessaire d'utiliser une version F -stable de ce sous-groupe de Levi (ce dernier étant, pour sa part, cF -stable).

Nous utilisons donc le vocabulaire des tores F -stables de type $w \in W$ relativement à un tore \mathbf{T} fixé (voir [22] ou [14]), appliqué à $w = c$ (l'élément de Coxeter). Rappelons qu'un tel tore de type c , noté \mathbf{T}_c , vérifie qu'il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{T}_c = {}^g\mathbf{T}$ et $g^{-1}F(g) \in c\mathbf{T}$. En particulier, la conjugaison par g (notée encore g) réalise un isomorphisme de groupes finis : $\mathbf{T}_c^{cF} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_c^F$. De la même façon que pour p_1 précédemment, on peut construire un caractère $\theta_{\mathbf{T}_c}$ induit par θ via g par :

$$\theta_{\mathbf{T}_c} := \theta \circ g^{-1}$$

et considérer son centralisateur $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_c, \theta_{\mathbf{T}_c}) := {}^g C_{\mathbf{G}}(\theta)$. Puis via le corollaire 3.1.3, on obtient $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_c, \theta_{\mathbf{T}_c}) = {}^{g^x}\mathbf{L}_I$.

Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.1.4. *Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_c^{cF})$. Alors l'élément v décrit à la fin de 2.1.4, relativement au sous-groupe de Levi $C_{\mathbf{G}}(\theta)$, est précisément la permutation :*

$$v_\theta := (1, e_\theta + 1, 2e_\theta + 1, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 1)(2, e_\theta + 2, 2e_\theta + 2, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 2) \cdots \\ \cdots (e_\theta, 2e_\theta, 3e_\theta, \dots, d_\theta e_\theta).$$

Démonstration. La preuve se calque sur la présentation faite à la fin de la section 2.1.4. Avec les notations précédant la proposition, le sous-groupe de Levi F -stable $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_c, \theta_{\mathbf{T}_c})$ satisfait à : $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_c, \theta_{\mathbf{T}_c}) = {}^{g^x}\mathbf{L}_I$. On peut donc définir un élément $\dot{v}_1 \in \mathbf{G}$ par $\dot{v}_1^{-1}F(\dot{v}_1) = (gx)^{-1}F(gx)$. Et alors :

$$v_1 = x^{-1}cx$$

dans le groupe de Weyl. Les deux lemmes suivants viennent alors conclure la preuve de cette proposition.

Lemme 3.1.5. *Par le corollaire 3.1.3, on peut choisir pour élément x la permutation*

$$x : k \mapsto \begin{cases} (r-1)d_\theta + (q+1) & \text{si } e_\theta \nmid k \text{ et } k = qe_\theta + r \text{ la division euclidienne,} \\ n - d_\theta + k' & \text{si } k = k'e_\theta \text{ (pour } k' = 1, \dots, d_\theta). \end{cases}$$

La permutation inverse, x^{-1} , est alors définie par :

$$x^{-1} : l \mapsto \begin{cases} (r'-1)e_\theta + (q'+1) & \text{si } d_\theta \nmid l \text{ et } l = q'd_\theta + r' \text{ la division euclidienne,} \\ n - e_\theta + l' & \text{si } l = l'd_\theta \text{ (pour } l' = 1, \dots, e_\theta). \end{cases}$$

Démonstration. Le corollaire 3.1.3 nous donne les sous-groupes $\mathbf{U}_{\alpha_{i,j}}$ intervenant dans $C_{\mathbf{G}}(\theta)$: ce sont ceux tels que d_θ divise $|i-j|$. En conjuguant par la permutation x ci-dessus, on a bien regroupé, à i fixé ($i = 1, \dots, d_\theta$), les sous-groupes $\mathbf{U}_{\alpha_{kd_\theta+i, ld_\theta+i}}$ avec $k \neq l$ dans $\{1, \dots, e_\theta - 1\}$ en un bloc GL_{e_θ} . On vérifie ensuite, que l'expression de x^{-1} donnée est bien l'inverse de la permutation x . \square

On déduit du lemme précédant l'expression

$$\begin{aligned} x^{-1}cx = & (1, e_\theta + 1, 2e_\theta + 1, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 1, \\ & 2, e_\theta + 2, 2e_\theta + 2, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 2, \dots \\ & \dots, e_\theta, 2e_\theta, 3e_\theta, \dots, d_\theta e_\theta). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Lemme 3.1.7. *Un élément a (voir 2.1.4) corrigeant v_1 en $v_\theta = av_1$ tel que $v_\theta F$ stabilise $(\mathbf{T}, \mathbf{B}_I)$ est $a = (1, 2, \dots, e_\theta)^{-1}$.*

Démonstration. La preuve de ce lemme sera faite dans la proposition 3.2.14. \square

En admettant temporairement ce résultat, on trouve alors :

$$\begin{aligned} v_\theta = av_1 = & (1, e_\theta + 1, 2e_\theta + 1, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 1)(2, e_\theta + 2, 2e_\theta + 2, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 2) \cdots \\ & \cdots (e_\theta, 2e_\theta, 3e_\theta, \dots, d_\theta e_\theta). \end{aligned}$$

\square

Retenons que cet élément v_θ permet de ramener notre étude, quitte à modifier le morphisme F , à celle de structures dites « standards ».

Remarque 3.1.8. Remarquons les faits suivants, qui auront une importance dans la suite.

1. Donnons des notations plus précises pour l'élément $x^{-1}cx$ considéré en 3.1.6 : on notera $c_{n, e_\theta} \in W$:

$$\begin{aligned} c_{n, e_\theta} := c_{e_\theta} v_\theta = & (1, e_\theta + 1, 2e_\theta + 1, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 1, \\ & 2, e_\theta + 2, 2e_\theta + 2, \dots, (d_\theta - 1)e_\theta + 2, \\ & \vdots \\ & e_\theta, 2e_\theta, 3e_\theta, \dots, d_\theta e_\theta). \end{aligned}$$

2. La longueur de v_θ vaut : $\ell(v) = e_\theta(n - e_\theta)$ (voir 3.2.2).

3.2 Quelques généralités dans les groupes linéaires

3.2.1 Paramétrage des séries de Lusztig

Caractères fantômes et représentations unipotentes

Puisque F est déployé, la formule 2.1.16 définissant les caractères fantômes se simplifie et s'applique à tout caractère irréductible de W par

$$R_\chi = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi(w) R_w.$$

Remarquons que $R_{1_W} = 1_{\mathbf{G}^F}$ et $R_{\mathrm{sgn}} = \mathrm{St}_{\mathbf{G}}$; ceci provenant de formules classiques pour les caractères de Deligne-Lusztig (voir par exemple [14]). De plus, il est possible de définir les R_χ pour une fonction centrale quelconque. On aura besoin de ce dernier point dans le point 2. de la proposition 3.2.1.

De l'orthogonalité des caractères de Deligne-Lusztig, on obtient $\langle R_w, R_\chi \rangle = \chi(w)$ et de l'orthogonalité des caractères de W , il vient la formule d'inversion

$$R_w = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(w) R_\chi.$$

Pour les résultats suivants, on renvoie au livre de Digne et Michel [22].

Proposition 3.2.1. 1. *L'ensemble des fonctions $\{R_\chi, \chi \in \mathrm{Irr}(W)\}$ est orthonormal.*

2. *Soit \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de GL_n diagonal par blocs, pour toute fonction de classes f sur $W_{\mathbf{L}}$, on a $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(R_f) = R_{\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}}^{W_{\mathbf{G}}}(f)}$.*

Ce dernier résultat sera notamment utile pour calculer des induits de Deligne-Lusztig en se ramenant à l'étude d'un induit au niveau des groupes de Weyl.

Remarquons désormais que le théorème 2.1.17 énoncé par Lusztig et Srinivasan s'applique et nous fournit une paramétrisation des classes d'isomorphisme des représentations unipotentes de \mathbf{G}^F par les caractères irréductibles du groupe de Weyl. Ceci est réalisé grâce à l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(W) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ \chi & \longmapsto & R_\chi. \end{array}$$

Utilisons maintenant l'isomorphisme $W \simeq \mathfrak{S}_n$ obtenu via l'application $(i, j) \mapsto s_{\alpha_{i,j}}$. Il est classique que les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n soient en bijection avec les partitions de n (voir par exemple [34]). Notons $\mathrm{Part}(n)$ l'ensemble des partitions de n , on peut donc compléter la bijection précédente par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Part}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(W) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ & & \chi & \longmapsto & R_\chi \\ \lambda & \longmapsto & \alpha_\lambda & & \end{array}$$

On peut résumer cela dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *Pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, les classes d'isomorphisme des représentations unipotentes de \mathbf{G}^F sont paramétrées par les partitions de n via les bijections ci-dessus. Pour $\lambda \vdash n$, on note $\lambda \mapsto \rho_\lambda$ ce paramétrage.*

Si nécessaire, on écrira $\rho_\lambda^{\mathbf{G}}$ pour spécifier le groupe.

Paramétrage des représentations unipotentes associées à $\mathbf{X}(c)$

Le théorème 2.3.3 énoncé par Lusztig fournit une description de la cohomologie de la variété $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)$ en terme de \mathbf{G}^F -modules- $\langle F \rangle$. De plus, on sait que les représentations irréductibles de \mathbf{G}^F apparaissant dans cette cohomologie sont des représentations unipotentes de \mathbf{G}^F : elles correspondent donc à certaines partitions de n via le paramétrage donné à la proposition 3.2.2.

Le théorème 3.2.7 caractérise les partitions en question.

Le lemme ci-dessous montre que les seules représentations unipotentes de \mathbf{G}^F intervenant dans la cohomologie sont celles associées à des partitions en crochet.

Lemme 3.2.3. *Les représentations unipotentes intervenant dans la cohomologie de $\mathbf{X}(c)$ sont les $\rho_{[k, 1^{n-k}]}$ pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. Par le résultat de disjonction dû à Lusztig, dire qu'une représentation de \mathbf{G}^F apparaît dans la cohomologie de $\mathbf{X}(c)$ est équivalent à dire que celle-ci apparaît dans R_c .

Reprenons alors la formule d'inversion exprimant l'induit R_w en fonction des caractères fantômes R_χ pour $w = c$, l'élément de Coxeter de GL_n (pour l'endomorphisme de Frobenius standard) : $R_c = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(c) R_\chi$, aussi les seuls caractères R_χ apparaissant sont ceux tels que $\chi(c) \neq 0$. Or, en utilisant la formule de Murnaghan-Nakayama (voir [34]) appliquée au cycle $c = (1, \dots, n)$, on trouve que $\chi(c) \neq 0$ si et seulement si la partition associée à χ est un crochet, et dans ce cas, $\chi(c) = (-1)^k$ où k est la hauteur de ce crochet. \square

Il reste encore à placer les différentes représentations paramétrées par les crochets $[k, 1^{n-k}]$ (pour $k = 0, \dots, n$) dans les différents groupes de cohomologie. Etant donné que chacun de ces groupes correspond à une représentation irréductible de \mathbf{G}^F , on place une seule représentation unipotente $\rho_{[k, 1^{n-k}]}$ par groupe de cohomologie. Les résultats qui suivent reposent principalement sur la proposition [37, 6.13.1] que l'on a énoncé en 2.3.5. On en rappelle une version adaptée à GL_n ci-dessous :

Proposition 3.2.4. *Soit J une partie des racines simples Δ . $\mathbf{P}_J = \mathbf{L}_J \mathbf{U}_J$ les sous-groupes standards associés. Alors :*

$$\langle \mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c)), \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}_J}^{\mathbf{G}^F} \mathbf{H}_c^{|J|}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_j)) \rangle = \begin{pmatrix} n-1-|J| \\ i-n+1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Les adaptations de l'égalité issue de la proposition 2.3.5 au cas du groupe linéaire sont les suivantes :

- Le rang de GL_n est $r = n - 1$.
- Puisque F est déployé, il n'y a plus de limitation sur la partie J des racines simples et $n_J = |J|$ comme déjà souligné dans la remarque succédant à la proposition 2.3.5.
- Les termes $[M_0]$, où M_0 est un \mathbf{L}_J^F -module cuspidal de $\mathbf{H}_c^{|J|}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_j))$, ont disparu. En effet, $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))$ étant un \mathbf{G}^F -module simple, on a soit $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))[M_0] = \{0\}$, soit $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))[M_0] = \mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c))$ (ceci étant réalisé pour un unique M_0).

□

Commençons par quelques résultats qui aideront à comprendre le raisonnement par récurrence à venir.

Supposons le résultat vrai pour le groupe $\mathbf{L}_J = \mathrm{GL}_{n-1} \times (\mathrm{GL}_1)$ (on a $|J| = n - 2$), c'est licite car F est déployé : dans $\mathbf{H}_c^{|J|}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_j)) \simeq \mathbf{H}_c^{n-2}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{n-1}}(c_{n-1}))$, on trouve par hypothèse la représentation unipotente $\rho_{[1^{n-1}]}$. Or, l'induit parabolique correspond à l'induit $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}$ au niveau des groupes de Weyl et l'on a :

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-1}]} = \chi_{[1^n]} + \chi_{[2, 1^{n-2}]},$$

on en déduit que les partitions paramétrant les représentations unipotentes apparaissant dans $\mathbf{H}_c^{n-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c))$ et $\mathbf{H}_c^n(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c))$ ne peuvent être que $[1^n]$ et $[2, 1^{n-2}]$ (mais on ne sait pas encore dans quel ordre) :

$$\rho_{[1^n]}, \rho_{[2, 1^{n-2}]} \text{ apparaissent dans } \mathbf{H}_c^{n-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)), \mathbf{H}_c^n(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)).$$

Procédons au même raisonnement en supposant le résultat vrai pour $\mathbf{L}_J = \mathrm{GL}_{n-2} \times (\mathrm{GL}_1)^2$ (et donc $|J| = n - 3$) : les valeurs du coefficient binomial précédent sont alors respectivement 1, 2 et 1 pour $i = n - 1, n$ et $n + 1$. Or :

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-2}]} = \chi_{[1^n]} + 2\chi_{[2, 1^{n-2}]} + \chi_{[3, 1^{n-3}]} + \chi_{[2, 2, 1^{n-4}]}.$$

Le dernier terme n'étant pas associé à un crochet, on sait déjà qu'il n'apparaît pas dans un groupe de cohomologie de $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)$, on ne le prend donc pas en compte. Grâce à la multiplicité 2 qui apparaît, on en déduit la répartition suivante des représentations unipotentes dans les premiers groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_c^{n-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)), \rho_{[1^n]} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{H}_c^n(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)), \rho_{[2, 1^{n-2}]} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{H}_c^{n+1}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)), \rho_{[3, 1^{n-3}]} \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Comme on le voit sur ces premiers raisonnements, pour obtenir un résultat général il est nécessaire de connaître l'induit $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-m}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-m}]}$ (pour un entier $0 \leq m \leq n$) et plus précisément, la multiplicité des caractères χ_λ dans cet induit, où λ est un crochet $[k, 1^{n-k}]$ ($k = 1, \dots, m+1$).

Lemme 3.2.5. *Pour $k = 1, \dots, m+1$ la multiplicité de $\chi_{[k, 1^{n-k}]}$ dans $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-m}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-m}]}$ est :*

$$\langle \chi_{[k, 1^{n-k}]}, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-m}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-m}]} \rangle = \binom{m}{k-1}.$$

Démonstration. En travaillant avec les tableaux de Young, le résultat est aisé. On souhaite ajouter m cases à $[1^{n-m}]$ et obtenir un crochet : on peut donc ajouter soit des cases en bas de la première colonne, soit des cases à droite sur la première ligne. Pour obtenir un crochet $[k, 1^{n-k}]$, il faut ajouter $m - k + 1$ cases à la première colonne et $k - 1$ cases sur la première ligne. On en déduit le résultat attendu. \square

Pour être cohérent avec les notations dans la proposition 2.3.5, faisons le changement de variable $m = n - 1 - u$, alors pour $k = 1, \dots, n - u$

$$\langle \chi_{[k, 1^{n-k}]}, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_u}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^u]} \rangle = \binom{n-1-u}{k-1}. \quad (3.2.6)$$

En particulier, pour $k = n - u$, $\chi_{[n-u, 1^u]}$ apparaît avec une multiplicité 1 dans l'induit.

On dispose désormais de tous les résultats nécessaires à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.2.7. *Les groupes de cohomologie de la variété de Coxeter pour GL_n sont non triviaux pour les degrés :*

$$i = n - 1, \dots, 2(n - 1).$$

Un paramétrage des représentations unipotentes apparaissant dans la cohomologie est donné par les partitions en crochet de n . Pour $i = n - 1, \dots, 2(n - 1)$:

$$\langle \mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}(c)), \rho_{[i-(n-1)+1, 1^{2(n-1)-i}]} \rangle = 1.$$

Le tableau suivant récapitule la situation en donnant la cohomologie, le paramétrage du caractère, ainsi que la valeur propre du Frobenius.

	\mathbf{H}_c^{n-1}	\mathbf{H}_c^n	...	$\mathbf{H}_c^{2(n-1)}$
<i>paramétrage de la rep. irr. unip.</i>	$[1^n]$	$[2, 1^{n-2}]$...	$[n]$
<i>valeur propre de F</i>	1	q	...	q^{n-1}

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ est explicité dans [4, 4.1.4].

Montrons alors par récurrence sur $j = 0, \dots, n - 1$ que :

$$\langle \mathrm{H}_c^{(n-1)+j}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c)), \rho_{[j+1, 1^{n-j-1}]} \rangle = 1.$$

Le résultat a déjà été prouvé pour $j = 0, 1, 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang j et reprenons la formule 3.2.6 pour $u = n - j - 2$. Lorsque $k = 1, \dots, j + 2$:

$$\langle \chi_{[k, 1^{n-k}]}, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-j}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-j}]} \rangle = \binom{j+1}{k-1},$$

en utilisant la proposition 3.2.4 :

$$\langle \chi_{[k, 1^{n-k}]}, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-j}}^{\mathfrak{S}_n} \chi_{[1^{n-j}]} \rangle = \langle \mathrm{H}_c^{(n-1)+(k-1)}(\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c)), \mathrm{Ind}_{P_j^F}^{\mathbf{G}^F} (\mathrm{H}_c^{|J|}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_J}(c_j))) \rangle,$$

où $\mathbf{L}_J = \mathrm{GL}_{n-j-1} \times (\mathrm{GL}_1)^{j+1}$ et donc $|J| = n - j - 2$. Pour les entiers $k = 1, \dots, j + 1$ cela ne nous apprend rien de nouveau, mais pour $k = j + 2$, on trouve que $\rho_{[j+2, 1^{n-j-2}]}$ apparaît dans $\mathrm{H}_c^{(n-1)+(j+1)}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(c))$ (avec multiplicité 1). Cela conclut donc cette récurrence.

Ce qui précède établit que le paramétrage est bien celui souhaité pour la cohomologie de la variété de Coxeter pour GL_n et le théorème est ainsi démontré par récurrence. □

Paramétrage pour les autres séries

On établit maintenant un cadre pour paramétrer les autres familles de représentations irréductibles. On rappelle que l'on dispose d'une partition de $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$ en séries de Lusztig $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$ où $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ est un représentant des classes de conjugaison F^* -stables d'éléments semi-simples du groupe dual.

Le théorème 2.1.12 permet de ramener l'étude d'une telle série à celle des représentations unipotentes du centralisateur $\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$. Le centralisateur $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est lui-même un groupe réductif dont le groupe de Weyl est $W(s) = \{w \in W, {}^w s = s\}$. Dans le cas où \mathbf{G} est le groupe linéaire, le centralisateur de s s'identifie au centralisateur du caractère $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ de la série géométrique associée, le groupe de Weyl relatif s'identifiant alors à $W(\theta) = \{w \in W, {}^w \theta = \theta\}$. Le centralisateur de θ étant isomorphe à $(\mathrm{GL}_{e_\theta})^{d_\theta}$, le théorème de Lusztig et Srinivasan (rappelé en 2.1.17) s'applique et on dispose alors d'un paramétrage des représentations unipotentes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Irr}(W(\theta))^F & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}}(\theta)^F, 1) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \theta) \\ \chi & \longmapsto & R_\chi & \longmapsto & R_{C_{\mathbf{G}}(\theta)}^{\mathbf{G}} R_\chi \otimes \hat{\theta} \end{array}$$

Il faut souligner que l'on n'est plus dans le cas où F est déployé : le groupe de Weyl $W(\theta)$ est isomorphe à $(\mathfrak{S}_{e_\theta})^{d_\theta}$ et F agit en permutant les composantes

de ce produit. Les représentations irréductibles de ce produit sont de la forme $\alpha_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \alpha_{d_\theta}$ avec α_i des représentations irréductibles de \mathfrak{S}_{e_θ} . En effet, le résultat suivant (voir par exemple [17, 10.33]) s'applique car $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est algébriquement clos de caractéristique 0.

Lemme 3.2.8. *Soient G et H des groupes finis et K un corps tel que les K -algèbres KG et KH sont déployées semi-simples. Notons \boxtimes le produit externe de représentations. Alors :*

1. Pour ρ_G (resp. ρ_H) une représentation irréductible de G (resp. H) sur K , $\rho_G \boxtimes \rho_H$ est une représentation irréductible de $G \times H$ sur K
2. Toute représentation irréductible de $G \times H$ sur K est de la forme précédente. De plus, les facteurs ρ_G et ρ_H sont alors uniques à isomorphisme près.

Maintenant, sur $(\mathfrak{S}_{e_\theta})^{d_\theta}$, comme F agit en permutant les d_θ composantes, un caractère irréductible F -stable de $W(\theta)$ est donc de la forme $\chi = \alpha \boxtimes \cdots \boxtimes \alpha$ avec α un caractère irréductible de \mathfrak{S}_{e_θ} . Comme les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_{e_θ} sont en bijection avec les partitions de e_θ , on obtient un paramétrage des représentations de la série $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \theta)$ à l'aide des partitions de e_θ .

Proposition 3.2.9. *Les représentations de la série $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \theta)$ sont paramétrées par les partitions de e_θ . Cela est réalisé via les bijections suivantes :*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Part}(e_\theta) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_{e_\theta}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(W(\theta))^F & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}}(\theta)^F, 1) \simeq \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \theta) \\ & & & & \chi & \longmapsto & R_\chi \longmapsto R_{C_{\mathbf{G}}(\theta)}^\mathbf{G} R_\chi \otimes \hat{\theta} \\ & & \alpha & \longmapsto & \alpha \boxtimes \cdots \boxtimes \alpha & & \\ \lambda & \longmapsto & \alpha_\lambda & & & & \end{array}$$

Ce paramétrage sera noté $\lambda \mapsto \rho_{\theta, \lambda}$.

Si nécessaire, on écrira $\rho_{\theta, \lambda}^\mathbf{G}$ pour spécifier le groupe.

Remarque 3.2.10. Le précédent raisonnement, permettant le paramétrage d'une série de Lusztig par les représentations irréductibles F -stables du groupe de Weyl relatif, suit la preuve du théorème [42, 3.2] de Lusztig et Srinivasan.

Ainsi, d'après la proposition précédente, les représentations de \mathbf{G}^F apparaissant dans la partie θ -isotypique de cohomologie de la variété de Coxeter \mathbf{Y} pour GL_n sont nécessairement paramétrées par certaines partitions de e_θ . Nous souhaitons préciser cela et donner une caractérisation semblable à celle obtenue dans le théorème 3.2.7, le résultat sera énoncé dans le théorème 3.4.3.

3.2.2 Résultats dans le groupe symétrique

Dans cette sous-section, nous faisons l'étude combinatoire de certaines permutations. Les propriétés ci-dessous interviendront dans la section 3.6.

Dans cette sous-section, on suppose $n = de$.

Définition 3.2.11. *Considérons la permutation v définie par :*

$$v := (1, e+1, 2e+1, \dots, (d-1)e+1)(2, e+2, 2e+2, \dots, (d-1)e+2) \cdots \\ \cdots (e, 2e, 3e, \dots, de).$$

Proposition 3.2.12. *La longueur de v est $\ell(v) = e(n-e)$.*

Démonstration. Comptons les inversions de couples d'entiers. On remarque déjà que si $b = (d-1)e+1, (d-1)e+2, \dots, de$ (c'est-à-dire que b est à l'extrémité d'un des cycles) alors il y a $n-e$ couples d'entiers (a, b) (avec $a < b$) s'inversant. En effet, pour $b = (d-1)e+k$ (pour un certain $1 \leq k \leq e$), parmi les $b-1 = (d-1)e+k-1$ couples (a, b) à considérer, seuls ceux pour $a = (d-1)e+j$ avec $1 \leq j \leq k-1$ ne s'inversent pas : il y a donc $(b-1) - (k-1) = n-e$ inversions. Et donc $e(n-e)$ inversions.

Ensuite, on peut montrer que si b n'est pas à l'extrémité d'un des cycles, il n'y a pas d'inversion. Réécrivons ci-dessous le cycle v avec, dans la partie encadrée, les nombres inférieurs strictement à b (par exemple b est dans le deuxième cycle).

$$\begin{array}{ccccccc} (1 & e+1 & \cdots & b-1 & b-1+e & \cdots & (d-1)e+1) \\ (2 & e+2 & \cdots & b & b+e & \cdots & (d-1)e+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (e & 2e & \cdots & b+(e-2) & \cdots & \cdots & de) \end{array}$$

Or, appliquer v à un entier (qui n'est pas à l'extrémité de droite) revient à le décaler vers la droite, notamment $v \cdot b = b+e$ et tous les entiers dans la partie encadrée sont décalés vers des entiers inférieurs à $v \cdot b$. Il n'y a donc aucune inversion. \square

Définition 3.2.13. *Définissons une permutation $c_{n,e}$ par $c_{n,e} = (1, 2, \dots, e)v$ et plus explicitement :*

$$c_{n,e} = (1, e+1, 2e+1, \dots, (d-1)e+1, \\ 2, e+2, 2e+2, \dots, (d-1)e+2, \\ \vdots \\ e, 2e, 3e, \dots, de).$$

Nous prouvons désormais le lemme 3.1.7. Il suffit de connaître l'image de certaines racines simples positives sous l'action de $(1, 2, \dots, e)^{-1}c_{n,e}$, ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2.14. *L'action de $c_e^{-1}c_{n,e} = (1, 2, \dots, e)^{-1}c_{n,e}$ sur les racines simples positives satisfait aux propriétés suivantes :*

- Pour k fixé ($k = 1, \dots, d-2$), les racines simples positives $\alpha_{i,j}$ où $ke+1 \leq i < j \leq (k+1)e$ sont envoyées sur les racines simples positives $\alpha_{i',j'}$ où $(k+1)e+1 \leq i' < j' \leq (k+2)e$.

- Les racines simples positives $\alpha_{i,j}$ où $(d-1)e+1 \leq i < j \leq n$ sont envoyées sur les racines simples positives $\alpha_{i',j'}$ où $1 \leq i' < j' \leq e$.

Démonstration. Pour la première partie du lemme, c'est le même raisonnement que dans la proposition 3.2.12 : on exprime explicitement $c_{n,e}$ comme un tableau (ou une matrice) de taille $e \times d$ et appliquer $c_{n,e}$ à un entier revient à le décaler vers la droite (voir la preuve de 3.2.12). Il n'y a donc pas d'inversion de couple d'entiers, l'image des racines positives reste des racines positives. Ensuite, appliquer c_e^{-1} ne modifie pas la racine positive.

Pour la seconde partie du lemme, c'est véritablement là où intervient c_e^{-1} . Il y a deux cas :

- Si $(d-1)e+1 \leq i < j \leq n-1$, alors : $c_{n,e} \cdot \alpha_{i,j} = \alpha_{i',j'}$ avec $2 \leq i' < j' \leq e$. Et ensuite, $c_e^{-1} \cdot \alpha_{i',j'} = \alpha_{i'-1,j'-1}$ qui est toujours une racine simple positive.
- Si $(d-1)e+1 \leq i \leq n-1$ et $j = n$. Alors : $c_{n,e} \cdot \alpha_{i,n} = \alpha_{i',1}$ avec $2 \leq i' \leq e$ et $c_e^{-1} \cdot \alpha_{i',1} = \alpha_{i'-1,e}$ qui est à nouveau une racine simple positive.

Dans tous les cas, la permutation $c_e^{-1}c_{n,e}$ stabilise les racines simples positives utilisées dans la définition de \mathbf{L}_I (voir les notations de 3.1.3) et on peut choisir $\alpha = c_e^{-1}$. \square

La permutation $c_{n,e}$ est un cycle de taille n , il est donc conjugué au cycle $c_n = (1, 2, \dots, n)$. Dans la proposition suivante, nous construisons par récurrence une transposition conjuguant $c_{n,e}$ à c_n .

On donne auparavant quelques notations. Pour $i < j$, on note $c_{[i,j]} = s_i \cdots s_{j-1}$ le cycle $(i, i+1, \dots, j-1, j)$, et $c_{[j,i]} = s_{j-1} \cdots s_i$ le cycle $(j, j-1, \dots, i+1, i)$. Plus simplement, on retiendra que $c_{[i,j]}$ désigne le cycle de i à j , la suite des nombres entre i et j pouvant être croissante ou décroissante. Il sera parfois plus judicieux de laisser visible les réflexions simples utilisées et nous conserverons donc plutôt dans ces cas l'écriture $s_i \cdots s_{j-1}$ ou $s_{j-1} \cdots s_i$.

Si $c = (i_1, \dots, i_s), c' = (n_1, \dots, n_r)$ sont des cycles à supports disjoints, alors l'écriture $c \bullet c'$ désigne le cycle formé par la concaténation des deux supports (dans un groupe de permutation adéquat) : $c \bullet c' := (i_1, \dots, i_s, n_1, \dots, n_r)$.

Proposition 3.2.15. *On peut choisir une permutation $x_{n,e}$ conjuguant $c_{n,e}$ et c_n peut être définie par récurrence de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} x_{n,e} &= x_{n-d,e-1} \cdot (s_{n-d} \cdots s_e) \cdots (s_{n-(k+1)} \cdots s_{n-ke}) \cdots (s_{n-2} \cdots s_{n-e}) \\ &= x_{n-d,e-1} \cdot c_{[n-d+1,e]} \cdots c_{[n-(k+1)+1,n-ke]} \cdots c_{[n-1,n-e]}. \end{aligned}$$

où $x_{n-d,e-1}$ est la permutation telle que $x_{n-d,e-1}(c_{n-d,e-1}) = c_{n-d}$; $c_{n-d,e-1}$ étant défini en 3.2.13. Autrement dit,

$$c_{[n-d+1,e]} \cdots c_{[n-1,n-e]} c_{n,e} = c_{n-d,e-1} \bullet c_{[n-d+1,n]},$$

et

$$x_{n-d,e-1}(c_{n-d,e-1} \bullet c_{[n-d+1,n]}) = (x_{n-d,e-1} c_{n-d,e-1}) \bullet c_{[n-d+1,n]}.$$

Démonstration. On montre la proposition par récurrence.

Notons Σ_k le produit des k premiers termes les plus à droite définissant $x_{n,e}$, $\Sigma_k := c_{[n-(k+1)+1, n-ke]} \cdots c_{[n-1, n-e]}$. On prouve d'abord par récurrence sur $k = 1, \dots, d-1$ que :

$$\Sigma_k c_{n,e} = \begin{array}{cccccccc} (1, & \dots & \dots & n-(k+2)e+1, & n-(k+1)e+1, & n-ke, & \dots & n-e-(k-1), \\ 2, & \dots & \dots & n-(k+2)e+2, & n-(k+1)e+2, & n-ke+1, & \dots & n-e-(k-2), \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e-1, & \dots & \dots & n-(k+2)e+(e-1), & n-(k+1)e+(e-1), & n-ke+(e-2), & \dots & n-k-1, \\ e, & \dots & n-(k+2)e, & n-(k+1)e, & n-k, & n-k+1, & \dots & n) \end{array}$$

colonne inchangées après conjugaison par Σ_k ,
sauf sur la dernière ligne
 k colonnes modifiées
après conjugaison par Σ_k

Alors, par un simple calcul, en conjuguant l'égalité précédente par $c_{[n-k+1, n-(k+1)e]} = (n-k-1, \dots, n-(k+1)e)$ on obtient le résultat souhaité. \square

En utilisant la décomposition précédente de $x_{n,e}$, nous calculons de quelle façon la conjugaison par $x_{n,e}$ modifie les longueurs entre $c_{n,e}$ et c_n : cela signifie qu'à chaque conjugaison par une réflexion simple de $x_{n,e}$, nous souhaitons savoir si la longueur reste stationnaire, augmente ou alors diminue (de 2).

Proposition 3.2.16. *Considérons la décomposition précédemment établie*

$$x_{n,e} = x_{n-d, e-1} \cdot (s_{n-d} \cdots s_e)(s_{n-d+1} \cdots s_{2e}) \cdots (s_{n-2} \cdots s_{n-e}),$$

on dispose des assertions suivantes :

1. La conjugaison de $c_{n,e}$ par $\Sigma_{d-2} := (s_{n-d+1} \cdots s_{2e}) \cdots (s_{n-2} \cdots s_{n-e})$ ne modifie pas la longueur.
2. Puis, la conjugaison de $\Sigma_{d-2} c_{n,e}$ par $(s_{n-d} \cdots s_e)$ fait diminuer la longueur de $2(n-d-e+1)$. Plus précisément, les conjugaisons successives par s_e , puis s_{e+1} , et jusqu'à s_{n-d} , diminuent la longueur par 2 à chaque fois.

Démonstration. Pour la première assertion, montrons que pour $k = 1, \dots, d-3$ et $j = 0, \dots, (k+1)e - (k+2)$:

$$\ell(s_{n-(k+1)e+j} \cdots s_{n-(k+1)e} \cdot \Sigma_k c_{n,e}) = \ell(c_{n,e}).$$

Pour cette égalité, on utilise la forme explicite de $\Sigma_k c_{n,e}$ dans la preuve de la proposition précédente, et on remarque que :

- $(s_{n-(k+1)e+j} \cdots s_{n-(k+1)e} \cdot \Sigma_k c_{n,e}) \cdot \alpha_{n-(k+1)e+j+1, n-(k+1)e+j+2} = \alpha_{n-k, m}$, où m est un certain entier strictement plus petit que $n-k$. En effet, comme $j = 0, \dots, (k+1)e - (k+2)$, alors $n-(k+1)e+j+2 \neq n-k+1, \dots, n$. Ainsi, $\alpha_{n-k, m} \in \Phi^-$.

- $(s_{n-(k+1)e+j} \cdots s_{n-(k+1)e} \cdot \Sigma^k c_{n,e})^{-1} \cdot \alpha_{n-(k+1)e+j+1, n-(k+1)e+j+2} = \alpha_{n-(k+2)e, m'}$, où m' est un certain entier strictement plus grand que $n - (k+2)e$. En effet, remarquons que la position de l'entier $n - (k+1)e + j + 2$ dans le cycle $s_{n-(k+1)e+j} \cdots s_{n-(k+1)e} \cdot \Sigma^k c_{n,e}$ est la même que la position de l'entier $n - (k+1)e + j + 2$ dans le cycle $\Sigma^k c_{n,e}$. Aussi, comme $j = 0, \dots, (k+1)e - (k+2)$ l'entier $n - (k+1)e + j + 2$ se trouve quelque part parmi les entrées encadrées du cycle suivant. Ainsi, l'entier m' est bien strictement plus grand que $n - (k+2)e + 1$ et donc $\alpha_{n-(k+2)e, m'} \in \Phi^+$.

$\Sigma^k c_{n,e} =$

$$\begin{pmatrix} 1, & \dots & \dots & n-(k+2)e+1, & n-(k+1)e+1, & n-ke, & \dots & n-e-(k-1), \\ 2, & \dots & \dots & n-(k+2)e+2, & n-(k+1)e+2, & n-ke+1, & \dots & n-e-(k-2), \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e-1, & \dots & \dots & n-(k+2)e+(e-1), & n-(k+1)e+(e-1), & n-ke+(e-2), & \dots & n-k-1, \\ e, & \dots & n-(k+2)e, & n-(k+1)e, & n-k, & n-k+1, & \dots & n \end{pmatrix}$$

Pour la seconde partie de la proposition, écrivons explicitement la permutation $\Sigma^{d-2} c_{n,e}$:

$$\begin{pmatrix} 1, & e+1, & 2e, & 3e-1, & \dots & n-e-d+3, \\ 2, & e+2, & 2e+1 & 3e, & \dots & n-e-d+4, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e-1, & e+(e-1), & 2e+(e-2) & 3e+(e-3), & \dots & n-d+1, \\ e, & n-d+2, & n-d+3, & n-d+4, & \dots & n \end{pmatrix}$$

Alors, pour $j = 0, \dots, n-d-e-1$:

$$\ell(s_{e+j+1} s_{e+j} \cdots s_e \cdot \Sigma^{d-2} c_{n,e}) = \ell(s_{e+j} \cdots s_e \cdot \Sigma^{d-2} c_{n,e}) - 2.$$

En effet, il suffit de reprendre les mêmes raisonnements que précédemment et on trouve pour $j = 0, \dots, n-d-e-1$:

- $(s_{e+j} \cdots s_e \cdot \Sigma^{d-2} c_{n,e}) \cdot \alpha_{e+j+1, e+j+2} = \alpha_{n-d+2, m}$, où m est un certain entier strictement plus petit que $n-d+2$; cette racine est donc dans Φ^- ,
- $(s_{e+j} \cdots s_e \cdot \Sigma^{d-2} c_{n,e})^{-1} \cdot \alpha_{e+j+1, e+j+2} = \alpha_{n-d+1, m'}$, où m' est un certain entier strictement plus petit que $n-(k+2)e$; cette racine est également dans Φ^- .

□

Remarque 3.2.17. Pour retrouver, d'une autre manière, le fait que la longueur ne change que lorsque l'on conjugue par $s_{n-d} \cdots s_e$, il suffit de calculer les longueurs des éléments $c_{n,e}$ et $\Sigma^{d-2} c_{n,e} = c_{n-d, e-1} \bullet c_{[n-d+1, n]}$ (en regardant par exemple le nombre d'inversions de couples d'entiers) et on trouve :

$$\ell(c_{n,e}) - \ell(\Sigma^{d-2} c_{n,e}) = 2(d-1)(e-1).$$

Or, l'entier $(d-1)(e-1)$ est précisément le nombre de transpositions dans le produit $s_{n-d} \cdots s_e$. On en déduit que la longueur diminue de 2 à chaque conjugaison par une transposition du produit $s_{n-d} \cdots s_e$.

Corollaire 3.2.18. *En suivant toutes les étapes de conjugaison, de $c_n = x_{n,e} c_{n,e}$ à $c_{n,e}$, la longueur a augmenté de 2 exactement $\frac{(n-e)(e-1)}{2}$ fois. Autrement dit :*

$$\ell(c_{n,e}) = \ell(c_n) - (n-e)(e-1).$$

Démonstration. On utilise la proposition précédente. Etant donné une décomposition $x_{n,e} = x_{n-d,e-1} \cdot (s_{n-d} \cdots s_e)(s_{n-d+1} \cdots s_{2e}) \cdots (s_{n-2} \cdots s_{n-e})$, la longueur n'augmente que lorsqu'on conjugue par s_e, \dots, s_{n-d} (i.e. $(d-1)(e-1)$ fois). Alors, par récurrence, le nombre total de fois où la longueur augmentera est :

$$(d-1)(e-1) + (d-1)(e-1) + \cdots + (d-1) = \frac{(d-1)e(e-1)}{2} = \frac{(n-e)(e-1)}{2}.$$

□

3.3 Premiers résultats sur la cohomologie de la variété de Coxeter $\mathbf{Y}(\dot{c})$ pour GL_n

Dans cette partie, nous rappelons les résultats déjà connus portant sur la cohomologie de la variété de Coxeter \mathbf{Y} pour GL_n . Ces résultats sont principalement dus à Lusztig, Digne, Michel et enfin Bonnafé, Rouquier et Dat dans un contexte modulaire.

Si la cohomologie des variétés de Coxeter $\mathbf{X}(c)$ a été entièrement décrite par Lusztig (et donc plus particulièrement pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$), de nombreuses questions restent encore en suspens concernant les variétés de Coxeter $\mathbf{Y}(\dot{c})$ (pour GL_n et donc a fortiori pour \mathbf{G} quelconque). En effet, sur cette dernière variété, l'ajout de l'action du tore \mathbf{T}^{cF} complique les choses. Si l'on suit la définition des caractères de Deligne-Lusztig, pour un choix d'un caractère $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$, il est essentiel d'étudier les parties θ -isotypiques des groupes de cohomologie.

Dans l'étude précédente des variétés $\mathbf{X}(c)$, un rôle central a été occupé par l'étude de l'action de l'endomorphisme de Frobenius F (on rappelle que l'on travaille dans le cas déployé, sinon il faudrait considérer F^δ) sur la cohomologie. Pour les parties θ -isotypiques, la tâche semble déjà plus ardue : les caractères θ n'étant pas nécessairement F -stables, les parties isotypiques $H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$ ne sont pas F -stables. En revanche, pour un caractère θ du tore, la partie θ -isotypique est munie d'une action du morphisme F^{d_θ} (d_θ étant l'entier défini en 3.1).

Selon le choix du caractère θ et donc de l'entier d_θ associé, les résultats suivants ont été obtenus.

Cas $d_\theta = 1$

C'est un cas particulier du théorème énoncé par Lusztig portant sur la cohomologie de variété $\mathbf{X}^{\mathbf{G}}(c)$, voir 2.3.2. En effet, comme signalé en 2.1.13, l'étude de la cohomologie $\mathrm{H}_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$ se ramène à l'étude de la cohomologie $\mathrm{H}_c^*(\mathbf{X}(c))$.

Faisons figurer à nouveau le tableau résumant le calcul de la cohomologie dans le cas $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ et pour l'endomorphisme de Frobenius usuel qui est alors déployé.

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{H}_c^{n-1} & \mathrm{H}_c^n & \dots & \mathrm{H}_c^{2(n-1)} \\ \hline 1 & q & \dots & q^{n-1} \end{array}$$

Cas $d_\theta = n$

Ce cas a été traité par Deligne et Lusztig dans [20] puis par Digne et Michel dans [21]. Deligne et Lusztig ont montré que la cohomologie de la variété de Coxeter est concentrée en degré $n - 1$ et $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$ est une représentation irréductible. Puis Digne et Michel ont montré que la valeur propre de F^n associée est $(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ pour le choix d'un représentant de c par une matrice de permutation \dot{c}^u (voir 2.2.3).

D'une certaine façon, seuls les « cas extrêmes » des diviseurs de n ont été traités pour le moment : le cas $d_\theta = n$ uniquement pour GL_n et le cas $d_\theta = 1$ pour un groupe quelconque. L'objectif principal de cette thèse porte sur l'étude des cas intermédiaires pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ et d un diviseur de n associé à un caractère $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{c^F})$.

Cette étude portera sur la description de la partie θ -isotypique de la cohomologie en terme de \mathbf{G}^F -modules- $\mathbf{T}^{c^F} \rtimes \langle F \rangle$.

3.4 Résultats principaux

Les résultats principaux de ce chapitre permettent le calcul explicite de la cohomologie de la variété de Coxeter $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c})$ (pour n quelconque). Ces résultats reposent sur les résultats obtenus auparavant par Lusztig [37] et Digne et Michel [21] que l'on vient d'expliciter.

On retrouve notamment les résultats importants que sont la disjonction de la cohomologie et le calcul des valeurs propres du Frobenius. Cela nous mènera, dans les chapitres qui suivent, à une description de l'algèbre d'endomorphismes ainsi qu'une description de la cohomologie de la compactification.

Rappel des notations

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ muni d'un endomorphisme de Frobenius déployé (élévation à la puissance q). S'il n'y a pas d'ambiguïté, les variétés de

Deligne-Lusztig seront notées \mathbf{X} et \mathbf{Y} à la place de $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n, F}$ et de $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n, F}$. Enfin, $c_n = (1, 2, \dots, n)$ est l'élément de Coxeter associé au couple (W, F) . S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe de base, cet élément sera noté c .

Rappelons que des permutations v_θ , $c_{n, e_\theta} = c_{e_\theta} v_\theta$ et x_{n, e_θ} ont été définies dans la section 3.2.2 et satisfont la relation de conjugaison $x_{n, e_\theta} c_{n, e_\theta} = c_n$. Comme F agit trivialement sur W , l'application de conjugaison par x_{n, e_θ} , notée également $x_{n, e_\theta} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, induit un isomorphisme de groupes finis :

$$x_{n, e_\theta} : \mathbf{T}^{c_{e_\theta} v_\theta F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{c_n F},$$

cela fournit alors des équivalences de catégories :

$$(x_{n, e_\theta})_* : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{c_{e_\theta} v_\theta F}\text{-mod} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{c_n F}\text{-mod}$$

et

$$(x_{n, e_\theta})_* : (\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{c_{e_\theta} v_\theta F})\text{-bimod} \xrightarrow{\sim} (\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{c_n F})\text{-bimod}.$$

Le premier théorème donne un isomorphisme entre les parties θ -isotypiques de deux variétés de Deligne-Lusztig. Il aura pour finalité d'être appliqué en association avec le résultat de transitivité (voir 2.1.4).

Théorème 3.4.1. *L'application successive des propositions 2.2.1, 2.2.3 et 2.2.4 fournit un isomorphisme de \mathbf{G}^F -modules- $\langle F^{d_\theta} \rangle$ entre les parties θ -isotypiques des groupes de cohomologie :*

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_n))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^{i+2m}(\mathbf{Y}(\dot{c}_{e_\theta} \dot{v}_\theta))_\theta \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{avec } m = \frac{(e_\theta - 1)(n - e_\theta)}{2}.$$

Remarque 3.4.2. Au vu des équivalences de catégories précédant le théorème 3.4.1, on voit le groupe de cohomologie $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_{e_\theta} \dot{v}_\theta))$ comme un \mathbf{G}^F -module- $\mathbf{T}^{c_n F}$ via $(x_{n, e_\theta})_*$ et prendre sa partie θ -isotypique, avec θ un caractère de $\mathbf{T}^{c_n F}$, a bien un sens.

Ce résultat préparatoire permet de montrer le théorème suivant, théorème donnant exactement les groupes de cohomologie de la variété de Coxeter \mathbf{Y} . On y fournit une description en \mathbf{G}^F -modules- $\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F \rangle$ de la cohomologie.

Pour $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on notera $[\xi]$ le $\langle F \rangle$ -module de dimension 1 sur lequel F agit multiplicativement par ξ .

Théorème 3.4.3. *Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$. La description en \mathbf{G}^F -modules- $\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F \rangle$ de la partie θ -isotypique de la cohomologie de $\mathbf{Y}(\dot{c})$ est décrite par le tableau suivant, où l'on a fait figurer :*

- les seuls groupes de cohomologie non triviaux,
- la valeur propre de l'endomorphisme de Frobenius F^{d_θ} sur chaque groupe de cohomologie,

— le paramétrage à l'aide des partitions de e_θ des représentations irréductibles intervenant dans chaque groupe de cohomologie.

	$(\mathbf{H}_c^{n-1})_\theta$	$(\mathbf{H}_c^n)_\theta$...	$(\mathbf{H}_c^{(n-1)+(e_\theta-1)})_\theta$...	$(\mathbf{H}_c^{2(n-1)})_\theta$
$\frac{F(\theta)=\theta}{d_\theta=1, e_\theta=n}$	$[1] \bullet \rho_{\theta, [1^n]}$	$[q] \bullet \rho_{\theta, [2, 1^{n-2}]}$...	$[q^{e_\theta-1}] \bullet \rho_{\theta, [e_\theta, 1^{n-e_\theta}]}$...	$[q^{n-1}] \bullet \rho_{\theta, [n]}$
⋮						
$\frac{F^d(\theta)=\theta}{d_\theta=d, e_\theta=e}$	$[(-1)^{n-e} q^{\frac{d(n-e)}{2}}] \bullet \rho_{\theta, [1^e]}$	$[(-1)^{n-e} q^{\frac{d(n-e)}{2}+d}] \bullet \rho_{\theta, [2, 1^{e-2}]}$...	$[(-1)^{n-e} q^{\frac{d(n-e)}{2}+d(e-1)}] \bullet \rho_{\theta, [e]}$		
⋮						
$\frac{F^n(\theta)=\theta}{d_\theta=n, e_\theta=1}$	$[(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}}] \bullet \rho_{\theta, [1]}$					

De plus, F envoie la composante θ -isotypique de la cohomologie sur la composante $\theta^{q^{d_\theta-1}}$ -isotypique : $F(\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta) = \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_{\theta^{q^{d_\theta-1}}}$.

- Remarque 3.4.4.** 1. La notation \bullet est utilisée pour ne pas avoir de confusion avec une éventuelle multiplicité d'une représentation donnée.
2. Les cas « extrêmes » $d_\theta = n, e_\theta = 1$ et $d_\theta = 1, e_\theta = n$ ont été obtenus respectivement par Digne-Michel [21] (avec une légère reformulation de Wang [49, 4.2.8]) et par Lusztig [37].

3.5 Stratégie générale de démonstration

Dans cette partie, nous décrivons les arguments et les raisonnements permettant de prouver les théorèmes précédents. Pour les résultats élémentaires, des preuves sont données dans cette même partie ; les preuves des résultats plus techniques seront faites dans les parties suivantes du manuscrit.

Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{c_n F})$. Considérons désormais les éléments $c_{e_\theta} = s_1 \cdots s_{e_\theta-1}$, v_θ , et la partie $I \subset \Delta$ (I dépendant de θ) préalablement définis en 3.1.4. L'isomorphisme de \mathbf{G}^F -variétés- $\mathbf{T}^{c_{e_\theta} v_\theta F}$ de la formule de transitivité 2.1.15 devient :

$$\mathbf{Y}_{I, v_\theta} \times_{\mathbf{L}_I^{v_\theta F}} \mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, \dot{v}_\theta F}(\dot{c}_{e_\theta}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Y}^{\mathbf{G}, F}(\dot{c}_{e_\theta} \dot{v}_\theta). \quad (3.5.1)$$

Par la remarque 3.4.2, il est licite de prendre les parties θ -isotypiques des groupes de cohomologie associés, et comme la partie θ -isotypique de la cohomologie de \mathbf{Y}_{I, v_θ} est concentrée en degré $\ell(v_\theta)$ (voir le théorème B' en 2.2.2), on obtient :

$$\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G}, F}(\dot{c}_{e_\theta} \dot{v}_\theta))_\theta \simeq \mathbf{H}_c^{\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}_{I, v_\theta}) \otimes_{\mathbf{L}_I^{v_\theta F}} \mathbf{H}_c^{i-\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, \dot{v}_\theta F}(\dot{c}_{e_\theta}))_\theta. \quad (3.5.2)$$

Désormais, afin de prouver le théorème 3.4.1, nous utilisons les propositions de la sous-section 3.2.2.

Dans la proposition 3.2.15, nous explicitons une permutation x_{n, e_θ} conjuguant $c_{e_\theta} v_\theta =: c_{n, e_\theta}$ en c_n . Notons $x_{n, e_\theta} = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ une expression réduite. Un

point crucial consiste en la comparaison des longueurs des éléments de la suite ci-dessous :

$$c_n := s_{i_1} \cdots s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad s_{i_2} \cdots s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad \dots \quad s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad c_{n, e_\theta}. \quad (3.5.3)$$

La proposition suivante résulte de la proposition 3.2.16.

Proposition 3.5.4. *En lisant les éléments de gauche à droite, entre deux éléments successifs, la suite des longueurs reste stationnaire ou augmente de 2. Autrement dit, pour $k = 1, \dots, r$:*

$$\ell(s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r} c_{n, e_\theta}) = \ell(s_{i_k} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r} c_{n, e_\theta}) \quad \text{ou} \quad \ell(s_{i_k} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r} c_{n, e_\theta}) - 2.$$

Ce résultat étant démontré, nous utilisons les résultats 2.2.1 et 2.2.3 reliant la différence de longueur d'une étape à la suivante aux variétés de Deligne-Lusztig associées.

- Lorsque la longueur reste la même d'un élément à l'autre de notre suite 3.5.3, on applique la proposition 2.2.1.
- Lorsque la longueur augmente de 2 entre deux éléments de la suite, nous utilisons la proposition 2.2.3 et la remarque succédant à la proposition 2.2.4. Les arguments justifiant l'application de la proposition 2.2.3 et 2.2.4 se trouvent à la section 3.6.

L'application répétée de ce raisonnement fournit alors le théorème suivant, dont le théorème 3.4.1 découle, en considérant les groupes de cohomologie des complexes.

On rappelle que $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta}$ désigne le \mathbf{T}^{cF} -module de dimension 1 sur lequel \mathbf{T}^{cF} agit par θ .

Théorème 3.5.5. *Il existe un isomorphisme dans la catégorie dérivée des bimodules $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F \text{-mod-} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F^{d_\theta} \rangle)$:*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_n)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{n, e_\theta}))[2m](m) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta},$$

$$\text{avec } m = \frac{(e_\theta - 1)(n - e_\theta)}{2}.$$

Remarque 3.5.6. — A première vue, la formule semble inversée par rapport à la proposition 2.2.4, concernant le décalage et le twist. Il faut en fait se rappeler que le raisonnement itéré utilise l'équivalence de site étale $\mathbf{Y}(\dot{s}^{-1}, \dot{w}, \dot{s}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}, \dot{s}, \dot{w})$, valable lorsque $\ell(sws) = \ell(w) + 2$. Ainsi, à chaque fois que l'on itérera la proposition 2.2.4, le décalage et le twist $[-2](-1)$ se trouvent du côté de l'élément de plus petite longueur ; dans le théorème ci-dessus, c_n est de plus petite longueur que c_{n, e_θ} , tout est donc finalement cohérent.

- Il est important de se souvenir que l'élément \dot{c}_{n, e_θ} dépend du caractère θ : l'isomorphisme précédent n'est pas vrai en dehors de la partie θ -isotypique.

- Prendre la partie θ -isotypique du membre de droite a bien un sens, on l'a déjà remarqué à plusieurs reprises, via la remarque 3.4.2.

Il vient alors le corollaire suivant en combinant l'isomorphisme 3.5.2 et le théorème 3.5.5. Les notations utilisées sont toujours celles précédant la formule de transitivité 3.5.1. En particulier, la partie I dépend du caractère θ .

Corollaire 3.5.7. *La tensorisation par le \mathbf{G}^F -module- $\mathbf{L}_I^{\dot{v}F}$, $\mathrm{H}_c^{\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}_{I,v_\theta})$, réalise un isomorphisme de \mathbf{G}^F -modules- $\langle F^{d_\theta} \rangle$ entre les parties θ -isotypiques :*

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\dot{c}_n))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^{\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}_{I,v_\theta}) \otimes_{\mathbf{L}_I^{\dot{v}_\theta F}} \mathrm{H}_c^{i+2m-\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I,\dot{v}_\theta F}(\dot{c}_{e_\theta}))_\theta (m).$$

De ce corollaire, en utilisant l'équivalence de Morita donnée par le théorème B' (voir 2.2.2), on déduit par récurrence que les parties θ -isotypiques $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\dot{c}_n))_\theta$ sont des \mathbf{G}^F -modules irréductibles : c'est ce que l'on souhaitait dans la première partie du théorème 3.4.3. En effet, comme $\mathbf{L}_I \simeq C_{\mathbf{G}}(\theta)$, le caractère θ satisfait alors $(\dot{v}_\theta F)(\theta) = \theta$, et l'on se ramène au cas des caractères unipotents déjà traité par Lusztig¹, c'est-à-dire aux groupes de cohomologie $\mathrm{H}_c^{i+2m-\ell(v)}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_I,\dot{v}F}(c_{e_\theta}))$. L'irréductibilité ainsi que le paramétrage découle alors des théorèmes rappelés en 2.3.3 et 3.2.7.

Enfin, il est possible de calculer la valeur de la puissance de q en utilisant les résultats [41, 6.6] et [37, 6.1, 7.3] de Lusztig. Le calcul précis sera réalisé dans la section 3.6.

Concernant la racine de l'unité, nous allons suivre une stratégie différente pour la déterminer, en suivant les résultats [39, 11.3, 6.4] de Lusztig rappelés à la proposition 2.2.6. Ces résultats établissent que la racine de l'unité ne change pas à l'intérieur d'une série de Harish-Chandra. Cependant, cette invariance dépend étroitement du choix du relèvement \dot{c} utilisé pour définir les différentes variétés de Deligne-Lusztig : il est nécessaire d'utiliser tout du long un « *relèvement cohérent* » comme défini par Lusztig en [39, 1.23].

Tout d'abord, définissons une nouvelle permutation c_0 par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} c_0 &:= c_n \cdot (n, n - d_\theta, \dots, 2d_\theta, d_\theta) \\ &= (1, 2, \dots, d_\theta)(d_\theta + 1, d_\theta + 2, \dots, 2d_\theta) \cdots (n - d_\theta + 1, n - d_\theta + 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Comme $w := (n, n - d_\theta, \dots, 2d_\theta, d_\theta) \in W(\theta)$, en utilisant ce qui a été dit dans la proposition 2.2.6, au lieu de considérer l'action du morphisme F^{d_θ} sur $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n,F}(\dot{c}_n))_\theta$, il suffit de calculer son action sur $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n,F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta$, où \dot{c}_0^{Lu} est un relèvement défini par Lusztig en utilisant le *relèvement cohérent* précédemment mentionné. Ce relèvement sera construit en section 3.7.

Le principal intérêt à introduire l'élément \dot{c}_0^{Lu} réside dans le fait que ce dernier est contenu dans un sous-groupe de Levi standard F -stable, $\mathbf{L}_0 = (\mathrm{GL}_{d_\theta})^{e_\theta}$.

1. La série géométrique de θ correspond à un élément central de \mathbf{L}_I^* .

Ainsi, l'induction de Harish-Chandra donne :

$$H_c^i(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta = R_{\mathbf{L}_0}^G H_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_0, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta,$$

et sur $H_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_0, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta$, les résultats de Digne-Michel [21] permettent de calculer la valeur propre du morphisme F^{d_θ} , et plus particulièrement de calculer la racine de l'unité qui nous intéresse. En effet, cela résulte du fait que le caractère θ est maintenant en position générale pour le couple (\mathbf{L}_0, F) .

Enfin, remarquons qu'en tant qu'endomorphismes de $\mathbf{Y}(\dot{c})$, F et $t \in \mathbf{T}^{cF}$ satisfont la relation de commutation $F \circ t = t^q \circ F$ et donc F envoie la partie θ -isotypique de la cohomologie sur la partie $\theta^{q^{n-1}}$ -isotypique de la cohomologie. En effet, si $u \in H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$, pour $t \in \mathbf{T}^{cF}$ quelconque :

$$t \cdot F(u) = (t^{q^{n-1}})^q \circ F(u) = F \circ t^{q^{n-1}}(u) = \theta^{q^{n-1}}(t)F(u).$$

3.6 Éléments de preuve du théorème 3.5.5

Rappelons que les permutations c_n et $c_{e_\theta} \nu_\theta =: c_{n, e_\theta}$ sont conjuguées. Une permutation x_{n, e_θ} réalisant la conjugaison a été construite par récurrence à la proposition 3.2.15. La formule de récurrence est rappelée ci-dessous :

$$x_{n, e_\theta} = x_{n-d_\theta, e_\theta-1} \cdot (s_{n-d_\theta} \cdots s_{e_\theta}) \cdots (s_{n-(k+1)} \cdots s_{n-ke_\theta}) \cdots (s_{n-2} \cdots s_{n-e_\theta}).$$

Pour montrer le théorème 3.4.3, il reste à prouver que pour chaque étape où la longueur augmente dans la suite 3.5.3, il est possible d'appliquer la proposition 2.2.4. Rappelons que la proposition 3.2.16 montre que la longueur n'augmente que lorsque l'on conjugue par les réflexions de la parenthèse la plus à gauche : $(s_{n-d_\theta} \cdots s_{e_\theta})$. Cela signifie que l'on souhaite comparer les cohomologies des variétés $\mathbf{Y}(s^{e_\theta+j} \omega_j)$ et $\mathbf{Y}(\omega_j)$, où $\omega_j := s^{e_\theta+j-1} \cdots s^{e_\theta} \cdot \Sigma_{d_\theta-2} c_{n, e_\theta}$ ($0 \leq j \leq n-d_\theta-e_\theta$), en appliquant la proposition 2.2.4.

Retenons que

$$\ell(s^{e_\theta+j} \omega_j) + 2 = \ell(\omega_j),$$

et qu'il existe donc une identification puis une équivalence de site étale :

$$\mathbf{Y}(\omega_j) = \mathbf{Y}(\dot{s}_{e_\theta+j}, \overline{s^{e_\theta+j} \omega_j}, \dot{s}_{e_\theta+j}) \xrightarrow[\text{étale}]{} \mathbf{Y}(\dot{s}_{e_\theta+j}, \dot{s}_{e_\theta+j}, \overline{s^{e_\theta+j} \omega_j}).$$

Aussi, pour appliquer le résultat 2.2.4, nous avons besoin de la proposition suivante. Utilisons la remarque 1.1.1, et remarquons que c_{n, e_θ} ainsi que tous ses conjugués sont d'ordre n (car il s'agit de n -cycles).

Pour $j = 0, \dots, n-d_\theta-e_\theta$ notons $\omega_j := s^{e_\theta+j-1} \cdots s^{e_\theta} \cdot \Sigma_{d_\theta-2} c_{n, e_\theta}$, alors par définition :

$$N^{s^{e_\theta+j} \omega_j}(\mathbf{Y}_{s_{e_\theta+j} s^{e_\theta+j} \omega_j, s^{e_\theta+j} \omega_j}) := \langle N_{F^n / s^{e_\theta+j} \omega_j F}(\alpha_{e_\theta+j, e_\theta+j+1}^\vee(\zeta)) \rangle.$$

La proposition suivante explicite le terme de droite.

Proposition 3.6.1. *L'image par la projection sur la première composante est :*

$$N_{F^n / \mathcal{F}^{e_\theta+j} \omega_j F}(\alpha_{e_\theta+j, e_\theta+j+1}^\vee(\zeta)) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{-q^{d_\theta} + q^{d_\theta u - v}} \rangle,$$

où $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \{0, \dots, d_\theta - 1\}$.

Et alors, pour $j = 0, \dots, n - d_\theta - e_\theta$:

$$\theta(N_{F^n / \mathcal{F}^{e_\theta+j} \omega_j F}(\alpha_{e_\theta+j, e_\theta+j+1}^\vee(\zeta))) \neq 1.$$

Démonstration. L'élément $\alpha_{e_\theta+j, e_\theta+j+1}^\vee(\zeta)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \dots, \zeta, \zeta^{-1}, \dots, 1)$ où les seuls termes non égaux à 1 sont ζ et ζ^{-1} en position $e_\theta + j$ et $e_\theta + j + 1$. Dans le cycle $s_{e_\theta+j-1} \dots s_{e_\theta} \Sigma_{d_\theta-2} c_{n, e_\theta}$, le terme $e_\theta + j + 1$ est en bas à gauche (dans une écriture explicite du cycle comme dans la preuve de la proposition 3.2.16) et par un simple calcul :

$$p_1(N_{F^n / \omega_j F}(\mathrm{diag}(1, \dots, \zeta^{-1}, 1, \dots, 1))) = \zeta^{-q^{d_\theta}}.$$

Notons ensuite (a, b) la position du terme $e_\theta + j$ lorsque l'on regarde le cycle $\Sigma_{d_\theta-2} c_{n, e_\theta}$ comme une matrice de taille $e_\theta \times d_\theta$ (cf. la forme explicite du cycle dans la preuve de la proposition 3.2.16). Comme $e_\theta + j$ ne se trouve pas dans la première colonne, $b \geq 2$. Mais alors :

$$p_1(N_{F^n / \omega_j F}(\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \zeta, \dots, 1))) = \zeta^{q^{d_\theta(a-1) + (d_\theta - b + 1)}},$$

et comme $b \geq 2$, on a $d_\theta - b + 1 < d_\theta$.

Il vient alors, $(p_1)_*(\theta)(\zeta^{-q^{d_\theta} + q^{d_\theta u - v}}) = (p_1)_*(\theta)(\zeta^{q^v}) \neq 1$ car $v < d_\theta$. \square

On en déduit alors l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\omega_j)) = \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{s}_{e_\theta+j}, \dot{s}_{e_\theta+j}, \overline{s_{e_\theta+j} \omega_j})) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_{e_\theta+j} \omega_j}))[-2](-1).$$

Si l'on répète cela à chaque modification de la longueur, on obtient le corollaire suivant (en appliquant le corollaire 3.2.18).

Corollaire 3.6.2. *Lorsque l'on parcourt de gauche à droite la suite, à chaque fois que la longueur augmente :*

$$c_n := s_{i_1} \dots s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad s_{i_2} \dots s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad \dots \quad s_{i_r} c_{n, e_\theta}, \quad c_{n, e_\theta} \quad (3.6.3)$$

il est possible d'appliquer la proposition 2.2.3 suivie de la proposition 2.2.4. Ceci est fait exactement $\frac{(n-e_\theta)(e_\theta-1)}{2}$ fois. On notera m cet entier.

Le corollaire 3.5.7 ayant été démontré, nous l'utilisons maintenant pour calculer la puissance de q^{d_θ} dans la valeur propre de l'endomorphisme de Frobenius. Rappelons l'isomorphisme de $\mathbf{G}^F \times \langle F^{d_\theta} \rangle$ -modules :

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\dot{c}_n))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^{\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}_{I,v_\theta}) \otimes_{\mathbf{L}_I^{\dot{v}_\theta F}} \mathrm{H}_c^{i+2m-\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I,\dot{v}_\theta F}(\dot{c}_{e_\theta}))_\theta (m).$$

En utilisant le résultat [41, 6.6], la puissance de q^{d_θ} dans la valeur propre sur $\mathrm{H}_c^{\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}_{I,v_\theta})$ est $q^{d_\theta \frac{\ell(v_\theta)}{2}}$.

La puissance de q^{d_θ} dans la valeur propre sur $\mathrm{H}_c^{i+2m-\ell(v_\theta)}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I,\dot{v}_\theta F}(\dot{c}_{e_\theta}))_\theta$ est la même que celle sur $\mathrm{H}_c^{i+2m-\ell(v_\theta)}(\mathbf{X}^{\mathbf{L}_I,\dot{v}_\theta F}(c_{e_\theta}))$ car $\mathbf{L}_I \simeq C_{\mathbf{G}}(\theta)$ et $\dot{v}_\theta F(\theta) = \theta$. Or, d'après [37, 6.1, 7.3] cette puissance est $q^{d_\theta(i+2m-\ell(v_\theta)-(e_\theta-1))}$, car $\mathbf{L}_I \simeq (\mathrm{GL}_{e_\theta})^{d_\theta}$ et c_{e_θ} est bien l'élément de Coxeter associé à $(\mathbf{L}_I, \dot{v}_\theta F)$.

En prenant en compte le twist de Tate, et aussi que $\ell(v_\theta) = e_\theta(n - e_\theta)$ et $m = \frac{(n-e_\theta)(e_\theta-1)}{2}$, on en déduit que la puissance de q^{d_θ} dans la valeur propre de F^{d_θ} sur $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\dot{c}_n))_\theta$ (pour $i = n-1, \dots, (n-1) + (e_\theta-1)$) est :

$$q^{d_\theta \frac{\ell(v_\theta)}{2}} \times q^{d_\theta(i+2m-\ell(v_\theta)-(e_\theta-1))} \times q^{-d_\theta m} = q^{d_\theta(i-(n-1)+\frac{n-e_\theta}{2})}.$$

Remarque 3.6.4. — La puissance de q se réécrit également $q^{d_\theta(i-(n-1)+e_\theta \frac{d_\theta(d_\theta-1)}{2})}$, c'est donc une puissance entière de q .

- Le cas particulier où $d_\theta = n, e_\theta = 1$ a déjà été traité par Digne et Michel dans [21]; la cohomologie de la variété est concentrée en degré $n-1$ et la puissance de q^n dans la valeur propre de l'endomorphisme de Frobenius est $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- Le cas particulier $d_\theta = 1, e_\theta = n$ a été traité par Lusztig dans [37]; la cohomologie de la variété se trouve dans les degrés $n-1, \dots, 2n-2$ et sur le i -ième groupe de cohomologie, la puissance de q dans la valeur propre de l'endomorphisme de Frobenius est $q^{i-(n-1)}$.

3.7 Calcul des racines de l'unité des valeurs propres

3.7.1 Relèvements de Lusztig et séries de Harish-Chandra

On rappelle la définition de la permutation $c_0 = c_n w$ avec

$$w := (n, n-d_\theta, \dots, 2d_\theta, d_\theta) \in W(\theta)$$

qui a été introduite dans la section 3.5. Par ce qui a été expliqué à la fin de cette même section, on est ramené à déterminer la racine de l'unité dans la valeur

propre de l'endomorphisme de Frobenius (d'une puissance de celui-ci) agissant sur

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta = \mathrm{R}_{\mathbf{L}_0}^{\mathbf{G}} \mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_0, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta,$$

et même plus particulièrement sur

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_0, F}(\dot{c}_0^{Lu}))_\theta,$$

en raison de l'invariance de cette racine de l'unité à l'intérieur d'une série de Harish-Chandra ; à la condition de travailler avec des relèvements bien choisis (voir 2.2.6).

Un relèvement dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ satisfaisant aux bonnes conditions définies par Lusztig est obtenu en prenant

$$\dot{c}_0^{Lu} = \dot{c}_n^u \cdot \dot{w}^{coh},$$

où :

- \dot{c}_n^u est le relèvement usuel de c_n à l'aide d'une matrice de permutation (avec seulement des 1 comme coefficients non nuls de la matrice),
- \dot{w}^{coh} est un relèvement cohérent (« *coherent lift* » en anglais dans [39]) de w . C'est-à-dire qu'il s'agit d'un produit de relèvements \dot{s}_i ($s_i := s_{\alpha_i}$ $\alpha_i \in \Delta$), avec la condition $\dot{s}_i \in \langle \mathbf{U}_{\alpha_i}, \mathbf{U}_{-\alpha_i} \rangle$.

Proposition 3.7.1. *Le relèvement de Lusztig, \dot{c}_0^{Lu} , est donné par la matrice $n \times n$ constituée de e_θ blocs diagonaux ci-dessous :*

$$\dot{c}_0^{Lu} = \begin{pmatrix} \boxed{\dot{c}_{d_\theta}''} & & & & \\ & \boxed{\dot{c}_{d_\theta}'} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\dot{c}_{d_\theta}'} \end{pmatrix},$$

où \dot{c}_{d_θ}'' est le relèvement de $c_{d_\theta} := (1, \dots, d_\theta)$ par la matrice

$$\dot{c}_{d_\theta}'' = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^{n-d_\theta} \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tandis que \dot{c}_{d_θ}' correspond à la matrice :

$$\dot{c}_{d_\theta}' = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^{d_\theta} \\ -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Par définition, $w = (n, n - d_\theta, n - 2d_\theta, \dots, d_\theta)$. Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'une décomposition en produit de transpositions :

$$\begin{aligned} w = & (s_{n-d_\theta} \cdots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_{n-d_\theta}) \\ & (s_{n-2d_\theta} \cdots s_{n-d_\theta-2} s_{n-d_\theta-1} s_{n-d_\theta-2} \cdots s_{n-2d_\theta}) \cdots \\ & \cdots (s_{d_\theta} \cdots s_{2d_\theta-2} s_{2d_\theta-1} s_{2d_\theta-2} \cdots s_{d_\theta}). \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Pour $i = 1, \dots, n - 1$, choisissons des relèvements cohérents pour les transpositions s_i par les matrices $n \times n$:

$$\hat{s}_i = \begin{pmatrix} & & & i & i+1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \langle \mathbf{U}_{\alpha_i}, \mathbf{U}_{-\alpha_i} \rangle.$$

Par une récurrence immédiate (sur k) on prouve les faits suivants pour $k < j$.

Notons $M(k, j) := \hat{s}_k \hat{s}_{k+1} \cdots \hat{s}_{j-1} \hat{s}_j \hat{s}_{j-1} \cdots \hat{s}_{k+1} \hat{s}_k$, alors :

$$— M(k, j)_{k, j+1} = 1,$$

$$— \forall l = k + 1, \dots, j, M(k, j)_{l, l} = -1,$$

$$— M(k, j)_{j+1, k} = (-1)^{j-k+1},$$

— pour les autres colonnes, c'est-à-dire celles en dehors de $k, \dots, j + 1$, les coefficients de la matrice sont ceux de I_n (1 sur le terme diagonal, 0 ailleurs).

Ainsi, après multiplication, le relèvement de Lusztig $\hat{c}_0^{Lu} = \hat{c}_n^u \cdot M(n - d_\theta, n - 1) M(n - 2d_\theta, n - d_\theta - 1) \cdots M(d_\theta, 2d_\theta - 1)$ a la forme attendue. \square

Puisque $\mathbf{L}_0 = (\mathrm{GL}_{d_\theta})^{e_\theta}$, par la formule de Künneth, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_0, F}, (\hat{c}_0^{Lu}))_\theta &= \mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{(\mathrm{GL}_{d_\theta})^{e_\theta}}(\hat{c}''_{d_\theta}, \hat{c}'_{d_\theta}, \dots, \hat{c}'_{d_\theta}))_{\theta_{(\mathrm{GL}_{d_\theta})^{e_\theta}}} \\ &\simeq \bigoplus_{i_1 + \dots + i_{e_\theta} = k} \mathbf{H}_c^{i_1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\hat{c}''_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}} \otimes \mathbf{H}_c^{i_2}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\hat{c}'_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{H}_c^{i_{e_\theta}}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\hat{c}'_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}}, \end{aligned}$$

où $\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}$ est induit par θ sur chacun des blocs GL_{d_θ} . Or, $\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}$ est un caractère en position générale (cf. la définition de d_θ), et donc, pour chaque terme de la somme directe dans le membre de droite, la cohomologie est concentrée en degré

$d_\theta - 1$. Il suit que la cohomologie du terme de gauche est uniquement concentrée en degré $n - e_\theta$ et plus précisément :

$$\begin{aligned} & \mathrm{H}_c^{n-e_\theta}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}})^{e_\theta}(\dot{c}''_{d_\theta}, \dot{c}'_{d_\theta}, \dots, \dot{c}'_{d_\theta})_\theta \\ & \simeq \mathrm{H}_c^{d_\theta-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\dot{c}''_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}} \otimes \mathrm{H}_c^{d_\theta-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\dot{c}'_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}} \otimes \dots \otimes \mathrm{H}_c^{d_\theta-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{d_\theta}}(\dot{c}'_{d_\theta}))_{\theta_{\mathrm{GL}_{d_\theta}}}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Il reste désormais à déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius sur chacun des facteurs du produit tensoriel à droite. Pour cela nous utilisons la proposition 2.2.7.

Nous nous reposons sur le résultat suivant de Digne et Michel, énoncé sur GL_n , où l'on choisit comme relèvement de c_n la matrice $n \times n$:

$$\dot{c}_n^{DM} = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.7.4 (Digne et Michel, [21]). *Soit $\theta \in \mathbf{T}^{cF}$ telle que $d_\theta = n$. La partie θ -isotypique de la cohomologie de la variété $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c}^{DM})$ est concentrée en degré $n - 1$ et $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}^{DM}))_\theta$ est une représentation irréductible. La valeur propre de F^n est $(-1)^{n-1}\theta(-1)^{n-1}q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

En appliquant ce résultat, nous calculons les valeurs propres de F^n sur $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}''_n))_\theta$ et $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}'_n))_\theta$ avec les éléments \dot{c}''_n et \dot{c}'_n définis comme suit : pour k un entier naturel quelconque,

$$\dot{c}''_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^{k-n} \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{c}'_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^n \\ -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.7.5. *Avec les notations de la proposition précédente,*

1. *La racine de l'unité de F^n agissant sur $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c}''_n))_\theta$ est $(-1)^{n-1}\theta(-1)^{k-n}$.*
2. *La racine de l'unité de F^n agissant sur $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c}'_n))_{\theta_{\mathrm{GL}_n}}$ est $(-1)^{n-1}\theta(-1)$.*

Démonstration. Dans les raisonnements qui suivent, on suppose que q n'est pas une puissance de 2, sinon le résultat est évident car $-1 = 1$ en caractéristique égale à 2.

Selon la proposition 2.2.7, il suffit de calculer $\tau \in \mathbf{T}$ tel que $\tau^{-1c}F(\tau) = {}^c t$, où $t \in \mathbf{T}$ satisfait $\dot{c}^{DM} = \dot{c}'' t$ ou $\dot{c}^{DM} = \dot{c}' t$. Il nous suffira ensuite de calculer $\theta(F^n(\tau)\tau^{-1})$ pour conclure.

1. Notons $t'' := \mathrm{diag}(1, \dots, 1, (-1)^{k-1})$ satisfaisant $\dot{c}^{DM} = \dot{c}'' t''$. Alors par un simple calcul, un élément τ tel que $\tau^{-1c} F(\tau) = {}^c(t^u)$ est de la forme $\tau = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ où

$$a_i = (-1)^{q^{i-1}(k-1)} a^{q^i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \text{avec} \quad a^{q^n} = (-1)^{q^n(k-1)} a.$$

Et alors :

$$F^n(\tau)\tau^{-1} \xrightarrow{p_1} (-1)^{(k-1)(q^n+q^{n-1}+1)} = (-1)^{k-1},$$

où p_1 désigne la projection sur la première composante. Aussi, on en déduit que la valeur propre de F^n sur $H_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}^u))_\theta$ est :

$$\theta(-1)^{k-1} \times (-1)^{n-1} \theta(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1} \theta(-1)^{k-n} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2. Notons $t' := \mathrm{diag}(-1, \dots, -1)$ satisfaisant $\dot{c}^{DM} = \dot{c}' t'$. Alors par un simple calcul, un élément τ tel que $\tau^{-1c} F(\tau) = {}^c(t')$ est de la forme $\tau = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ où

$$a_i = (-1)^i a^{q^i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \text{avec} \quad a^{q^n} = (-1)^n a,$$

notamment en utilisant q impair. Et alors :

$$F^n(\tau)\tau^{-1} \xrightarrow{p_1} (-1)^{(n-1)(q^n+q^{n-1}+1)} = (-1)^n,$$

où p_1 désigne la projection sur la première composante. Aussi, on en déduit que la valeur propre de F^n sur $H_c^{n-1}(\mathbf{Y}(\dot{c}'))_\theta$ est :

$$\theta(-1)^n \times (-1)^{n-1} \theta(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1} \theta(-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

□

Ces résultats conduisent finalement à la proposition suivante :

Proposition 3.7.6. *La racine de l'unité dans la valeur propre du morphisme F^{d_θ} sur $H_c^{n-e_\theta}(\mathbf{Y}^{(\mathrm{GL}_{d_\theta})^{e_\theta}}(\dot{c}''_{d_\theta}, \dot{c}'_{d_\theta}, \dots, \dot{c}'_{d_\theta}))_\theta$ est*

$$\epsilon = (-1)^{n-e_\theta}.$$

Démonstration. Utilisons le lemme précédent avec GL_{d_θ} au lieu de GL_n puis en choisissant $k = n$. Par multiplication des valeurs propres, la racine de l'unité cherchée est $(-1)^{d_\theta-1} \theta(-1)^{n-d_\theta} \times [(-1)^{d_\theta-1} \theta(-1)]^{e_\theta-1} = (-1)^{n-e_\theta} \theta(-1)^{(d_\theta-1)(e_\theta-1)} = (-1)^{n-e_\theta}$ comme $\theta^{q^{d_\theta}} = \theta$.

□

3.8 Les exemples de GL_4 et GL_6

Dans cette section, nous illustrons la méthode employée pour démontrer le théorème 3.4.1 pour GL_4 et GL_6 .

3.8.1 GL_4

Le plus petit exemple d'un cas intermédiaire intervient pour GL_4 et θ un caractère satisfaisant $d_\theta = 2$.

En prenant en compte les résultats de Lusztig et de Digne-Michel, le seul cas restant à traiter est celui d'un caractère θ satisfaisant $d_\theta = 2$. Avec les notations précédentes, on a :

- $c_4 = (1, 2, 3, 4)$ de longueur 3,
- $v = (1, 3)(2, 4)$ de longueur 4 et $c_{4,2} := c_2 v = (1, 2)v$, de longueur 5, est tel que $c_4 = (2, 3)c_{4,2}(2, 3)$.

On souhaite relier la partie θ -isotypique de la cohomologie de $\mathbf{Y}(\dot{c}_4)$ avec celle de $\mathbf{Y}(\dot{c}_2 \dot{v})$.

Comme $\ell(c_{4,2}) := \ell(s_2 c_4 s_2) = \ell(c_4) + 2$, $\mathbf{Y}(\dot{c}_{4,2}) := \mathbf{Y}(s_2 \dot{c}_4 s_2)$ s'identifie à $\mathbf{Y}(s_2, \dot{c}_2 \dot{v}, s_2)$ et il existe une équivalence de site étale

$$\mathbf{Y}(\dot{c}_{4,2}) = \mathbf{Y}(s_2, \dot{c}_4, s_2) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(s_2, s_2, \dot{c}_4).$$

Pour continuer dans l'étude de la cohomologie de la variété de droite, rappelons l'expression de la racine duale α_2^\vee .

$$\alpha_2^\vee : t \mapsto \mathrm{diag}(1, t, t^{-1}, 1).$$

Cela nous permet de faire le calcul des sous-groupes $N_{c_4}(\mathbb{Z}\alpha_2^\vee)$. Soit ζ une racine primitive 4-ième de l'unité, alors :

$$N_{c_4}(\mathbb{Z}\alpha_2^\vee) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{q^3 - q^2} \rangle,$$

et donc θ n'est pas trivial sur ce sous-groupe (car $d_\theta = 2$) : le résultat de Bonnafé et Rouquier s'applique et l'on obtient l'isomorphisme suivant dans la catégorie dérivée des $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^{cF} \times \langle F^2 \rangle$ -modules :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{4,2})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta} = \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(s_2, \dot{c}_4, s_2)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_4))[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta}.$$

Cela se traduit en terme de groupes de cohomologie par l'isomorphisme de $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^{cF} \times \langle F^2 \rangle$ -modules (en inversant le décalage et le twist) :

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_4))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^{i+2}(\mathbf{Y}(\dot{c}_{4,2}))_\theta(1), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Le terme de droite (sans le twist) correspond à un groupe de cohomologie obtenu par transitivité à partir du sous-groupe de Levi $\mathbf{L}_I \simeq (\mathrm{GL}_2)^2$ correspondant au centralisateur de θ :

$$\mathrm{H}_c^{i+2}(\mathbf{Y}(\dot{c}_{4,2}))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^4(\mathbf{Y}_{I,v}) \otimes_{\mathbf{L}_I^{vF}} \mathrm{H}_c^{i-2}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, vF}(\dot{c}_2))_\theta,$$

le second isomorphisme provenant de l'équivalence de Morita signalée à la sous-section 2.2.2. Il vient alors l'isomorphisme suivant de $\mathbf{G}^F \times \langle F^2 \rangle$ -modules suivant :

$$\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_4))_\theta \simeq \mathrm{H}_c^4(\mathbf{Y}_{I,v}) \otimes_{\mathbf{L}^{\varphi^F}} \mathrm{H}_c^{i-2}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_{I,v}^F}(\dot{c}_2))_\theta(1).$$

Connaissant la cohomologie du terme le plus à droite, on en déduit que les groupes de cohomologie ne sont non nuls que pour $i = 3, 4$, et que les puissances de q dans les valeurs propres sont :

- pour $i = 3$: $q^4 \times 1 \times q^{-2} = q^2$,
- pour $i = 4$: $q^4 \times q^2 \times q^{-2} = q^4$.

Le premier facteur q^4 provient d'un résultat de Lusztig sur la cohomologie des variétés $\mathbf{Y}_{I,v}$, le second facteur de la cohomologie pour un caractère en position générale, et le troisième du twist de Tate.

D'une façon générale, la cohomologie est alors résumée dans le tableau ci-dessous :

	$(\mathrm{H}_c^3)_\theta$	$(\mathrm{H}_c^4)_\theta$	$(\mathrm{H}_c^5)_\theta$	$(\mathrm{H}_c^6)_\theta$
$d_\theta = 1, e_\theta = 4$	$[1] \bullet \rho_{\theta, [1^4]}$	$[q] \bullet \rho_{\theta, [2, 1^2]}$	$[q^2] \bullet \rho_{\theta, [3, 1]}$	$[q^3] \bullet \rho_{\theta, [4]}$
$d_\theta = 2, e_\theta = 2$	$[q^2] \bullet \rho_{\theta, [1^2]}$	$[q^4] \bullet \rho_{\theta, [2]}$		
$d_\theta = 4, e_\theta = 1$	$[-q^6] \bullet \rho_{\theta, [1]}$			

Remarquons que l'on a en plus fait figurer les racines de l'unité des valeurs propres du Frobenius, obtenues par la proposition 3.7.6.

3.8.2 GL_6

Les cas intermédiaires sont ceux correspondant à $d_\theta = 2, 3$.

Le cas $d_\theta = 2$

On a $v = (1, 4)(2, 5)(3, 6)$ de longueur 9 et $c_{6,3} := c_3 v = (1, 4, 2, 5, 3, 6)$ de longueur 11. Cette permutation est conjuguée à c_6 par la permutation $(4, 2, 3, 5) = s_2 s_4 s_3$. Soit ζ une racine primitive 6-ième de l'unité. Nous disposons de la suite suivante pour les longueurs successives :

$$\ell(c_6) = \ell(s_2 s_4 s_3 c_{6,3}) = 5, \quad \ell(s_4 s_3 c_{6,3}) = 7, \quad \ell(s_3 c_{6,3}) = 9, \quad \ell(c_{6,3}) = 11.$$

1. Comme $\ell(c_{6,3}) = \ell(s_3 s_3 c_{6,3} s_3) = \ell(s_3 c_{6,3}) + 2$, on en déduit l'équivalence de sites étales : $\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,3}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_3, \overline{s_3 c_{6,3}}, \dot{s}_3) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}_3, \dot{s}_3, \overline{s_3 c_{6,3}})$. Or, $N_{s_3 c_{6,3}}(\mathbb{Z}\alpha_3^\vee) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{q^5 - q^2} \rangle$, donc θ n'est pas trivial sur ce sous-groupe, ce qui permet alors d'obtenir l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,3})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_3 c_{6,3}}))[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \theta},$$

ou encore :

$$\mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s^3 c_{6,3}})\right) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,3})\right)[2](1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

2. Comme $\ell(s^3 c_{6,3}) = \ell(s_4 s_4 s_3 c_{6,3} s_4) = \ell(s_4 s_3 c_{6,3}) + 2$, on en déduit l'équivalence de sites étales : $\mathbf{Y}(\overline{s^3 c_{6,3}}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_4, \overline{s_4 s_3 c_{6,3}}, \dot{s}_4) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}_4, \dot{s}_4, \overline{s_4 s_3 c_{6,3}})$. De plus, $N_{s_4 s_3 c_{6,3}}(\mathbb{Z}\alpha_4^\vee) \xrightarrow{P_1} \langle \zeta^{q^3 - q^2} \rangle$, donc θ n'est pas trivial dessus, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s^3 c_{6,3}})\right) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s_4 s_3 c_{6,3}})\right)[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

ou encore :

$$\mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s_4 s_3 c_{6,3}})\right) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s^3 c_{6,3}})\right)[2](1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

3. Comme $\ell(s_4 s_3 c_{6,3}) = \ell(s_2 s_2 s_4 s_3 c_{6,3} s_2) = \ell(s_2 s_4 s_3 c_{6,3}) + 2$, on en déduit l'équivalence de sites étales $\mathbf{Y}(\overline{s_4 s_3 c_{6,3}}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_2, \overline{s_2 s_4 s_3 c_{6,3}}, \dot{s}_2) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}_2, \dot{s}_2, \overline{s_2 s_4 s_3 c_{6,3}})$. De plus, $N_{s_2 s_4 s_3 c_{6,3}}(\mathbb{Z}\alpha_2^\vee) \xrightarrow{P_1} \langle \zeta^{q^5 - q^4} \rangle$, donc θ n'est pas trivial dessus, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s_4 s_3 c_{6,3}})\right) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s_2 s_4 s_3 c_{6,3}})\right)[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

ou encore :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c\left(\mathbf{Y}(\overline{s_4 s_3 c_{6,3}})\right)[2](1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

On en déduit alors l'isomorphisme :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,3}))[6](3) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

puis au niveau des groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} &\simeq \mathrm{H}_c^{i+6}(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,3}))(3) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \\ &\simeq \mathrm{H}_c^9(\mathbf{Y}_{I,v}) \otimes_{\mathbf{L}_{\dot{v}F}} \mathrm{H}_c^{i-3}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, \dot{v}F}(\dot{c}_3))_\theta. \end{aligned}$$

Le facteur le plus à droite est non trivial seulement pour $i = 5, 6, 7$ et les puissances de q pour chacun des groupes de cohomologie sont :

- pour $i = 5$: $q^9 \times 1 \times q^{-6} = q^3$,
- pour $i = 6$: $q^9 \times q^2 \times q^{-6} = q^5$,
- pour $i = 7$: $q^9 \times q^4 \times q^{-6} = q^7$.

Le cas $d_\theta = 3$

On a $v = (1, 3, 5)(2, 4, 6)$ de longueur 8 et $c_{6,2} := c_2v = (1, 3, 5, 2, 4, 6)$ de longueur 9. Cette permutation est conjuguée à c_6 par la permutation $(3, 2, 4, 5) = s_3s_2s_4$. Nous disposons de la suite suivante pour les longueurs successives :

$$\ell(c_6) = \ell(s_3s_2s_4c_{6,2}) = 5, \quad \ell(s_2s_4c_{6,2}) = 7, \quad \ell(s_4c_{6,2}) = 9, \quad \ell(c_{6,2}) = 9.$$

1. Comme $\ell(c_{6,2}) = \ell(s_4s_4c_{6,2}s_4) = \ell(s_4c_{6,3})$, on en déduit l'équivalence de sites étales : $\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,2}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_4, \overline{s_4c_{6,2}}, \dot{s}_4) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\overline{s_4c_{6,2}})$. et donc l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,2})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_4c_{6,2}})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

2. Comme $\ell(s_4c_{6,2}) = \ell(s_2s_2s_4c_{6,2}s_2) = \ell(s_2s_4c_{6,2}) + 2$, on en déduit l'équivalence de sites étales : $\mathbf{Y}(\overline{s_4c_{6,2}}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_2, \overline{s_2s_4c_{6,2}}, \dot{s}_2) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}_2, \dot{s}_2, \overline{s_2s_4c_{6,2}})$. De plus, $N_{s_2s_4c_{6,2}}(\mathbb{Z}\alpha_2^\vee) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{q^5 - q^3} \rangle$, donc θ n'est pas trivial sur ce sous-groupe, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_4c_{6,2}})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_2s_4c_{6,2}}))[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

ou encore :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_2s_4c_{6,2}})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_4c_{6,2}}))[2](1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

3. Comme $\ell(s_2s_4c_{6,2}) = \ell(s_3s_3s_2s_4c_{6,2}s_3) = \ell(s_3s_2s_4c_{6,2}) + 2$, on en déduit l'équivalence de sites étales $\mathbf{Y}(\overline{s_2s_4c_{6,2}}) = \mathbf{Y}(\dot{s}_3, \overline{s_3s_2s_4c_{6,2}}, \dot{s}_3) \xrightarrow[\text{étale}]{\sim} \mathbf{Y}(\dot{s}_3, \dot{s}_3, \overline{s_3s_2s_4c_{6,2}})$. De plus, $N_{s_3s_2s_4c_{6,2}}(\mathbb{Z}\alpha_3^\vee) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{q^4 - q^3} \rangle$, donc θ n'est pas trivial dessus, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_2s_4c_{6,2}})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_3s_2s_4c_{6,2}}))[-2](-1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

ou encore :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\overline{s_4s_3c_{6,3}}))[2](1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta}.$$

On en déduit alors l'isomorphisme :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,2}))[4](2) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta},$$

puis au niveau des groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}_6)) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} &\simeq H_c^{i+4}(\mathbf{Y}(\dot{c}_{6,2}))(2) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,\theta} \\ &\simeq H_c^8(\mathbf{Y}_{I,v}) \otimes_{\mathbf{L}_I^{\vee F}} H_c^{i-4}(\mathbf{Y}^{\mathbf{L}_I, \vee F}(\dot{c}_2))_\theta. \end{aligned}$$

Le facteur le plus à droite est non trivial seulement pour $i = 5, 6, 7$ et les puissances de q pour chacun des groupes de cohomologie sont :

- pour $i = 5 : q^{12} \times 1 \times q^{-6} = q^6$,
- pour $i = 6 : q^{12} \times q^3 \times q^{-6} = q^9$.

D'une façon générale, la cohomologie est alors résumée dans le tableau ci-dessous :

	$(H_c^5)_\theta$	$(H_c^6)_\theta$	$(H_c^7)_\theta$	$(H_c^8)_\theta$	$(H_c^9)_\theta$	$(H_c^{10})_\theta$
$d_\theta=1$ $e_\theta=6$	$[1] \bullet \rho_{\theta,[1^6]}$	$[q] \bullet \rho_{\theta,[2,1^4]}$	$[q^2] \bullet \rho_{\theta,[3,1^3]}$	$[q^3] \bullet \rho_{\theta,[4,1^2]}$	$[q^4] \bullet \rho_{\theta,[5,1]}$	$[q^5] \bullet \rho_{\theta,[6]}$
$d_\theta=2$ $e_\theta=3$	$[-q^3] \bullet \rho_{\theta,[1^3]}$	$[-q^5] \bullet \rho_{\theta,[2,1]}$	$[-q^7] \bullet \rho_{\theta,[3]}$			
$d_\theta=3$ $e_\theta=2$	$[q^6] \bullet \rho_{\theta,[1^2]}$	$[q^9] \bullet \rho_{\theta,[2]}$				
$d_\theta=6$ $e_\theta=1$	$[-q^{15}] \bullet \rho_{\theta,[1]}$					

Remarquons que l'on a en plus fait figurer les racines de l'unité des valeurs propres du Frobenius, obtenues par la proposition 3.7.6.

Chapitre 4

Description de l'algèbre d'endomorphismes

$\text{End}_{\mathbf{G}^F} \left(\bigoplus_i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \right)$

Pour rappel, les résultats de ce chapitre sont pour $\mathbf{G} = \text{GL}_n$. On rappelle également la notation $H_c^*(\mathbf{V}) := \bigoplus_i H_c^i(\mathbf{V})$ (pour une variété quasi-projective \mathbf{V}).

Les résultats du théorème 3.4.3 du chapitre précédent décrivent complètement la cohomologie $H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))$ en tant que \mathbf{G}^F -module- $(\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F \rangle)$. A l'aide de cette description, il est alors possible d'expliciter la structure de l'algèbre d'endomorphismes, et plus précisément de décrire cette structure en relation avec l'algèbre de groupe du normalisateur $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$; \mathbf{T}_c étant un tore rationnel de type c , où c est l'élément de Coxeter associé à (W, F) .

Les résultats de ce chapitre sont attendus comme conséquences des conjectures de Broué, comme formulées dans [10], [11] ou [12]. Plus précisément, l'une des conséquences de ces conjectures porte sur la description de l'algèbre d'endomorphismes des variétés de Deligne-Lusztig \mathbf{X} associées à des éléments du groupe de tresses B qui sont « racines » (au sens de [12]) de $\pi := \mathbf{w}_0^2 \in B$ (\mathbf{w}_0 étant l'image dans le groupe de tresses de l'élément de plus grande longueur dans W , usuellement noté w_0) : pour un tel élément $\mathbf{w} \in B$ de pré-image $w \in W$, il est conjecturé que

$$\mathcal{H}_q(w) \simeq \text{End}_{\mathbf{G}^F} H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w})),$$

le terme de gauche étant le spécialisé en $x \mapsto q$ d'une algèbre de Hecke « d -cyclotomique » pour le centralisateur $C_W(wF)$ (et de paramètre x). Une algèbre de Hecke est dite d -cyclotomique associée à $C_W(wF)$ si la spécialisation $x \mapsto e^{i2\pi/d}$ donne l'algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell C_W(wF)$.

4.1 Quelques résultats préliminaires pour la variété de Coxeter

4.1.1 Le cas de la variété $\mathbf{X}(c)$

Comme souvent, nous souhaitons étendre certains résultats tout d'abord obtenus sur les variétés \mathbf{X} . Le résultat essentiel est celui énoncé par Lusztig dans [39], que l'on a rappelé dans la proposition 2.3.4. Appliqué au cas des groupes linéaires, celui-ci fournit un isomorphisme d'algèbres :

$$\text{End}_{\mathbf{G}^F} H_c^*(\mathbf{X}(c)) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \langle F \rangle.$$

Le lien précis entre cet isomorphisme et les conséquences de la conjecture de Broué, que l'on a précisé dans l'introduction de cette section, est décrit par Digne et Michel dans [23, §4]. Remarquons qu'outre les groupes linéaires, le travail de Digne et Michel s'applique aux variétés de Coxeter des groupes réductifs non tordus, quasi-simples.

Revenons à notre étude dans le groupe linéaire. La variété $\mathbf{Y}(\dot{c})$ disposant en plus d'une action de \mathbf{T}^{cF} , il semble naturel d'espérer que l'algèbre d'endomorphismes fasse apparaître à la fois l'endomorphisme de Frobenius F , mais aussi une partie dépendant du tore \mathbf{T} . Tout comme dans le cas de la variété \mathbf{X} , la disjonction de la cohomologie sera un ingrédient majeur pour la description.

4.1.2 Le cas de la variété $\mathbf{Y}(\dot{c})$

Comme signalé auparavant, nous souhaitons étendre certains résultats obtenus d'abord sur les variétés \mathbf{X} ; ici, cela concerne le résultat 2.3.4, corollaire du résultat principal de Lusztig dans [39].

Comme premier pas vers notre objectif, remarquons l'égalité suivante sur les dimensions. Dans cette partie, on appliquera les différents résultats obtenus dans le théorème 3.4.3. En particulier, ci-dessous, il est fait usage du résultat de disjonction de la cohomologie.

Dans ce qui suit, nous utilisons un tore F -stable, maximal, de type c (relativement à \mathbf{T} fixé auparavant). Un tore de type c s'écrit $\mathbf{T}_c = x\mathbf{T}x^{-1}$ où $x \in \mathbf{G}$ satisfait $x^{-1}F(x) = \dot{c}$. A la section 4.3, nous ferons l'effort de revenir à des structures dépendantes de \mathbf{T} , comme on l'a fait depuis le début du manuscrit.

Proposition 4.1.1. $\dim \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))) = |N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)|.$

Démonstration. Afin de prouver cette égalité, l'idée est de calculer le produit scalaire $\langle R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}), R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}) \rangle$ de deux manières différentes. La première façon repose sur la disjonction de la cohomologie obtenue précédemment (ceci est

utilisé dans la seconde et la troisième égalité ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
 \langle R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}), R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}) \rangle &= \left\langle \sum_i (-1)^i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})), \sum_i (-1)^i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \right\rangle \\
 &= \sum_i \langle H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})), H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \rangle \\
 &= \left\langle \sum_i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})), \sum_i H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \right\rangle \\
 &= \dim \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c})))
 \end{aligned}$$

D'une autre façon, un cas particulier de la formule de Mackey établit que

$$\langle R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\theta), R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\theta') \rangle = |\mathbf{T}^{cF}|^{-1} |\{n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c), {}^n\theta = \theta'\}|,$$

alors :

$$\begin{aligned}
 \langle R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}), R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\text{reg}_{\mathbf{T}_c}) \rangle &= \sum_{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})} \sum_{\theta' \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})} \langle R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\theta), R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(\theta') \rangle \\
 &= \sum_{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})} |\mathbf{T}^{cF}|^{-1} |N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)| \\
 &= |N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)|.
 \end{aligned}$$

□

4.2 Etude d'une sous-algèbre

Remarquons que l'on dispose de morphismes naturels :

$$\overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^{cF} \rightarrow \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c})))$$

et

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \langle F \rangle &\rightarrow \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))) \\
 F &\mapsto \varphi
 \end{aligned}$$

Cela nous permet de considérer la sous-algèbre $\mathcal{A} := \langle \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{T}^{cF}, \varphi \rangle$ de l'algèbre d'endomorphismes.

Pour un caractère irréductible donné, $\gamma \in \text{Irr}(\mathbf{G}^F)$, on rappelle que l'on note $e_{\gamma} \in \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \mathbf{G}^F$ l'élément idempotent central associé dans l'algèbre de groupe.

Notons $\gamma_{\theta,i}$ le caractère de \mathbf{G}^F défini par la représentation $H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_{\theta}$. D'après le théorème 3.4.3, $\gamma_{\theta,i}$ est irréductible et remarquons que $\gamma_{\theta,i} = \gamma_{\theta^q,i}$.

Prenons alors la partie $\gamma_{\theta,i}$ -isotypique de la cohomologie complète, on obtient en terme de $(\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle F \rangle)$ -modules :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\gamma_{\theta,i}} \bigoplus_k \mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}(\dot{c})) &= \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \left(\mathbf{e}_{\theta} + \mathbf{e}_{F(\theta)} + \cdots + \mathbf{e}_{F^{d_{\theta}-1}(\theta)} \right) \\ &= \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \mathbf{e}_{\theta} \oplus \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \mathbf{e}_{F(\theta)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c})) \mathbf{e}_{F^{d_{\theta}-1}(\theta)}. \end{aligned}$$

Sur cette somme directe, il est facile de suivre l'action de \mathbf{T}^{cF} sur les différents caractères $\theta, F(\theta), \dots, F^{d_{\theta}-1}(\theta)$ mais également l'action de l'endomorphisme de Frobenius F , via l'endomorphisme φ . Ce dernier envoie chaque composante sur la précédente, la première sur la dernière, et avec en plus une multiplication par $(-1)^{n-e_{\theta}} q^{d_{\theta}(i-(n-1)+\frac{n-e_{\theta}}{2})}$ (la valeur propre de $F^{d_{\theta}}$ calculée auparavant) lors du passage entre la seconde et la première composante. Cela résulte du théorème 3.4.3.

Des remarques du paragraphe précédent, nous en déduisons des actions sur $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}), \gamma_{\theta,i}))$ (qui est de dimension d_{θ}); celles-ci sont données explicitement par les matrices :

$$t \in \mathbf{T}^{cF} \mapsto \begin{pmatrix} \theta(t) & & & \\ & F(\theta)(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F^{d_{\theta}-1}(\theta)(t) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{d_{\theta}}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

et

$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\theta,i} & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{d_{\theta}}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

avec $\epsilon_{\theta,i} = (-1)^{n-e_{\theta}} q^{d_{\theta}(i-(n-1)+\frac{n-e_{\theta}}{2})}$, la valeur propre de $F^{d_{\theta}}$ déterminée au théorème 3.4.3.

Proposition 4.2.1. *Les applications précédentes définissent des morphismes d'algèbres surjectifs $\nu_{\theta,i}$, pour $i = 0, \dots, e_{\theta} - 1$ et $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$,*

$$\nu_{\theta,i} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mat}_{d_{\theta}}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}).$$

Démonstration. Afin de prouver la proposition, il suffit de montrer que les matrices de la base usuelle ont des antécédents par $\nu_{\theta,i}$, pour θ et i fixés.

En utilisant les éléments de l'algèbre du tore

$$t = \mathbf{e}_{\theta}, \dots, \mathbf{e}_{F^{d_{\theta}-1}(\theta)},$$

on obtient des antécédents pour toutes les matrices diagonales de la forme $\text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. La multiplication par la matrice associée à φ permet alors d'obtenir les autres matrices, à une puissance de q près. Plus précisément, étant donnée la matrice diagonale avec un 1 en i -ième position et des 0 ailleurs, les multiplications à droite par la matrice associée à φ permettent de récupérer les matrices de base $E_{i,?}$. Les multiplications à gauche permettent de récupérer les matrices $E_{?,i}$. \square

Proposition 4.2.2. *Soient $\theta, \theta' \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ et i (resp. j) un entier de $\{0, 1, \dots, e_\theta - 1\}$ (resp. $\{0, 1, \dots, e_{\theta'} - 1\}$). Alors,*

$$v_{\theta,i} \simeq v_{\theta',j} \Leftrightarrow i = j \text{ et } \exists k \in \{0, \dots, d_\theta - 1\}, \theta' = F^k(\theta).$$

Démonstration. On considère des morphismes $v_{\theta,i}$ et $v_{\theta',j}$ tels que $v_{\theta,i} \simeq v_{\theta',j}$, c'est-à-dire que les représentations sont isomorphes. Il existe donc une matrice $M \in \text{GL}_{d_\theta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ vérifiant pour tout $t \in \mathbf{T}^{cF}$,

$$M \begin{pmatrix} \theta(t) & & & \\ & F(\theta)(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F^{d_\theta-1}(\theta)(t) \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \theta'(t) & & & \\ & F(\theta')(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F^{d_\theta-1}(\theta')(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Choisissons t_0 un générateur de \mathbf{T}^{cF} (qui est cyclique). En comparant les valeurs propres de l'égalité précédente évaluée en t_0 , on en déduit qu'il existe un entier $k_0 \in \{0, \dots, d_\theta - 1\}$ tel que $\theta'(t_0) = F^{k_0}(\theta)(t_0)$. Montrons que cette égalité est évidemment vérifiée pour tous les $t \in \mathbf{T}^{cF}$.

Pour la seconde partie de la proposition, à savoir que $i = j$, il suffit d'appliquer le déterminant de part et d'autre de l'égalité matricielle

$$M \cdot v_{\theta,i}(\varphi) = v_{\theta,i}(\varphi) \cdot M,$$

Et on obtient :

$$(-1)^{n-e_\theta} q^{d_\theta \left(i - (n-1) + \frac{n-e_\theta}{2}\right)} = (-1)^{n-e_\theta} q^{d_\theta \left(j - (n-1) + \frac{n-e_\theta}{2}\right)},$$

et alors $i = j$.

La réciproque découle de la relation $\gamma_{\theta^q,i} = \gamma_{\theta,i}$: il suffit alors de conjuguer par une matrice de permutation pour obtenir l'isomorphisme de représentations. \square

Corollaire 4.2.4. *On dispose de l'identification suivante de l'algèbre d'endomorphismes :*

$$\text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))) = \mathcal{A}.$$

Démonstration. On remarque que le membre de droite est a priori une sous-algèbre du membre de gauche. Par la proposition précédente, on a obtenu un paramétrage de certaines représentations irréductibles de la sous-algèbre du membre de droite. Mais ce paramétrage est exactement celui de toutes les représentations irréductibles du membre de gauche. En effet, les représentations irréductibles de l'algèbre d'endomorphismes sont en bijection avec les représentations irréductibles apparaissant dans $H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))$; et le théorème 3.4.3 établit que ces dernières sont paramétrées de cette façon. Ainsi, le membre de droite a autant de représentations irréductibles que le membre de gauche. De plus, comme les dimensions des irréductibles sont les mêmes, on en déduit l'égalité des algèbres. \square

De ce dernier résultat on en déduit alors un isomorphisme d'algèbres :

$$\text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))) \simeq \prod_{\substack{\theta \in [\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})/\sim_F] \\ 0 \leq i \leq e_\theta - 1}} \text{Mat}_{d_\theta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

où $[\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})/\sim]$ désigne un ensemble de représentants des orbites de $\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ sous l'action de F .

4.3 L'algèbre de groupe du normalisateur $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$

Nous établissons des résultats concernant l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$; l'objectif étant de démontrer qu'il existe un isomorphisme d'algèbres

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c) \simeq \mathcal{A}.$$

La première réduction à faire est de voir qu'il y a un isomorphisme d'algèbres de groupes

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle c \rangle).$$

L'isomorphisme est en fait au niveau des groupes et se construit de la façon suivante. Un tore de type c s'écrit $\mathbf{T}_c = x\mathbf{T}x^{-1}$ où $x \in \mathbf{G}$ satisfait $x^{-1}F(x) = \dot{c}$. La conjugaison par x induit un isomorphisme $\mathbf{T}^{cF} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_c^F$, puis par transfert de structure un isomorphisme $N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$. D'après le théorème de Lang-Steinberg, comme \mathbf{T} est connexe,

$$N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}^{cF} = (N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T})^{\dot{c}F} = W^{\dot{c}F}.$$

Remarquons alors que dans le cas $\mathbf{G} = \text{GL}_n$, l'action de F est triviale sur le groupe de Weyl, donc $W^{\dot{c}F} = C_W(c)$. Or, d'après les propriétés des éléments de Coxeter (voir la sous-section 2.3.1), $C_W(c) = \langle c \rangle$. Qui plus est, choisissons pour relèvement de c la matrice de permutation usuelle. Alors, l'intersection $\mathbf{T}^{cF} \cap \langle c \rangle$ est réduite à l'élément neutre et on en déduit $N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle c \rangle$.

Pour rester cohérent avec l'idée de fixer une fois pour toute un tore maximal F -stable \mathbf{T} , nous continuons avec $N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T})$ plutôt que $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_c)$.

4.3.1 Représentations des produits semi-directs

On rappelle quelques considérations classiques de la théorie des représentations des produits semi-directs et de la théorie de Clifford. On trouvera ces résultats dans [32], [33] ou encore [15].

Dans toute cette sous-section, on suppose que G est un groupe fini, N un sous-groupe abélien distingué de G et H un sous-groupe de G tel que $G = N \rtimes H$. Notons que l'action de H sur N induit une action de H sur $\text{Irr}N$ par :

$$({}^h\chi)(n) = \chi({}^{h^{-1}}n).$$

Proposition 4.3.1. *Pour l'action induite de H sur $\text{Irr}N$, notons $\{\mathcal{O}_i\}$ les orbites et $\chi_i \in \mathcal{O}_i$ un représentant pour chaque orbite. Notons H_i le groupe d'isotropie pour χ_i , c'est-à-dire,*

$$H_i = \{h \in H, {}^h\chi_i = \chi_i\}.$$

Puisque N est abélien, remarquons que le caractère linéaire χ_i s'étend en un caractère $\tilde{\chi}_i$ de $N \rtimes H_i$ par :

$$\tilde{\chi}_i(nh) := \chi_i(n) \quad (n \in N, h \in H_i).$$

Alors, il existe une bijection entre les représentations irréductibles de G et les paires $(\mathcal{O}_i, L \in \text{Irr}H_i)$ donnée par la construction :

$$U^{i,L} := \text{Ind}_{N \rtimes H_i}^{N \rtimes H} \tilde{\chi}_i \otimes L.$$

En particulier,

$$\dim U^{i,L} = \dim L \times |\mathcal{O}_i|.$$

On applique alors ce résultat pour obtenir ce qui suit :

Proposition 4.3.2. *Pour $G = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})$, $H = \langle c \rangle = \langle c^{-1} \rangle$ et $N = \mathbf{T}^{c^F}$, la construction précédente fournit un paramétrage des représentations irréductibles de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})$ par les paires*

$$\{(i, \theta), \theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{c^F}) / \sim_F \text{ et } 0 \leq i \leq e_\theta - 1\},$$

et pour le choix d'une telle paire, la dimension de la représentation irréductible associée est d_θ (initialement défini comme étant le plus petit entier tel que $F^{d_\theta}(\theta) = \theta$).

Démonstration. Il s'agit simplement de la traduction du résultat précédent. L'action considérée étant celle par conjugaison, la relation \sim_F définie sur $\text{Irr}(\mathbf{T}^{c^F})$ décrit bien les orbites voulues, en effet l'action de c^{-1} sur $\text{Irr}(\mathbf{T}^{c^F})$ est précisément celle du Frobenius F . Et pour le choix d'un tel représentant θ , le groupe d'isotropie associé est

$$\langle c \rangle_\theta := \{c^r \in \langle c \rangle, c^r \cdot \theta = \theta\}.$$

Or $(c^{-1})^r \cdot \theta = F^r(\theta)$ d'où

$$\langle c \rangle_\theta = \langle c^{d_\theta} \rangle.$$

Ensuite, pour ce qui est de la dimension, \mathbf{T}^{c^F} étant abélien, la dimension des caractères est 1, et la taille des orbites \mathcal{O}_i est précisément $|\langle c \rangle / \langle c^{d_\theta} \rangle| = d_\theta$. \square

On en déduit alors une décomposition de l'algèbre de groupe du normalisateur en produit d'algèbres de matrices :

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \prod_{\substack{\theta \in [\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})/\sim_F] \\ 0 \leq i \leq e_\theta - 1}} \text{Mat}_{d_\theta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Puisque le terme de droite était déjà isomorphe à l'algèbre \mathcal{A} , étant donné l'égalité des dimensions des algèbres de matrices, on en déduit donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \text{End}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))).$$

Théorème 4.3.3. *Il existe un isomorphisme d'algèbres :*

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \text{End}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))).$$

Remarque 4.3.4. La simple existence de cet isomorphisme n'est pas tout à fait satisfaisante. Obtenir une description plus précise concernant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \text{End}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c})))$ constituera l'objet de la section suivante.

4.4 Une application du théorème de déformation de Tits

Le point crucial pour établir l'isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \simeq \mathcal{A}$ et donc le théorème 4.3.3 consiste en l'égalité des dimensions des représentations irréductibles de l'algèbre d'endomorphismes et de l'algèbre de groupe du normalisateur (ces dimensions étant égales aux entiers d_θ). Cette égalité a été obtenue « à la main » en utilisant la théorie de Clifford.

Une autre manière d'obtenir cette égalité aurait été de voir les deux algèbres comme les déformations d'une troisième algèbre « générique » et d'utiliser ensuite le théorème de Tits ; c'est ce qui se passe avec la variété \mathbf{X} et comme algèbre générique, l'algèbre de Hecke d -cyclotomique. Pour poursuivre dans cette voie, nous introduisons une troisième algèbre, suivant le modèle des algèbres de Yokonuma-Hecke, et dont les deux premières en sont des déformations.

4.4.1 Relations dans \mathcal{A}

Avant de parler de déformation, examinons les relations que nous avons dans $\text{End}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))) = \langle \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{cF}, \varphi \rangle$. Pour cela, rappelons le résultat portant sur la cohomologie de la variété de Coxeter (théorème 3.4.3) : la cohomologie $H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$ est concentrée en les degrés $i = n - 1, \dots, (n - 1) + (e_\theta - 1)$ et chaque groupe de cohomologie correspond à un \mathbf{G}^F -module simple distinct. De plus, l'endomorphisme de Frobenius admet les valeurs propres suivantes sur chacune des parties θ -isotypique de ces groupes de cohomologie :

	$(\mathbf{H}_c^{n-1})_\theta$	$(\mathbf{H}_c^n)_\theta$	\dots	$(\mathbf{H}_c^{(n-1)+(e_\theta-1)})_\theta$
$F^{d_\theta}(\theta)=\theta$ d_θ, e_θ	$(-1)^{n-e_\theta} q^{\frac{d_\theta(n-e_\theta)}{2}}$	$(-1)^{n-e_\theta} q^{\frac{d_\theta(n-e_\theta)}{2}+d_\theta}$	\dots	$(-1)^{n-e_\theta} q^{\frac{d_\theta(n-e_\theta)}{2}+d_\theta(e_\theta-1)}$

On peut alors en déduire les relations entre les éléments du tore \mathbf{T}^{cF} et φ (image de F dans l'algèbre d'endomorphismes) dans l'algèbre d'endomorphismes. Dans ce qui suit, on note $\mathbf{e}_\theta \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{cF}$ l'idempotent central associé à $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ (à ne pas confondre avec l'entier $e_\theta := n/d_\theta$), on rappelle que :

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{|\mathbf{T}^{cF}|} \sum_{t \in \mathbf{T}^{cF}} \theta(t^{-1})t.$$

Les relations sont alors, pour tout diviseur d de n (et $e = n/d$) :

$$\forall d|n, \quad \prod_{i=0}^{e-1} (\varphi^d - (-1)^{n-e} q^{\frac{d(n-e)}{2}+di}) \left(\sum_{\substack{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \\ d_\theta=d}} \mathbf{e}_\theta \right) = 0.$$

Choisissons alors τ une racine $(q^n - 1)$ -ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et identifions \mathbf{T}^{cF} à $\mathbb{F}_{q^n}^\times \simeq \langle \tau \rangle$ (via la projection p_1 , voir 3.1). Les caractères $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ sont paramétrés par les racines $(q^n - 1)$ -ièmes de l'unité qui sont en fait des racines primitives $(q^{d_\theta} - 1)$ -ièmes de l'unité (il s'agit de la valeur de $\theta(\tau)$). Notons l'ensemble de ces racines de l'unité $\mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}$, on en aura besoin pour la définition 4.4.5.

Maintenant, l'idempotent \mathbf{e}_θ s'écrit dans l'algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \langle \tau \rangle$ par :

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{q^n - 1} \sum_{k=0}^{q^n-2} \theta(\tau)^{-k} \tau^k. \quad (4.4.1)$$

Pour tout diviseur d de n et $e = n/d$, remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \\ d_\theta|d}} \mathbf{e}_\theta &= \frac{q^d - 1}{q^n - 1} \sum_{k=1}^{q^d-1} \tau^{(q^d-1)k} \\ &= \frac{1}{1 + q^d + \dots + q^{d(e-1)}} \sum_{k=1}^{1+q^d+\dots+q^{d(e-1)}} \tau^{(q^d-1)k}. \end{aligned}$$

Cela permet de définir des élément E_d (avec $d|n$) dans l'algèbre de groupe de \mathbf{T}^{cF} par :

$$E_d = (1 + q^d + \dots + q^{d(e-1)}) \left(\sum_{\substack{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \\ d_\theta|d}} \mathbf{e}_\theta \right).$$

Il est clair que cet élément vérifie la relation quadratique :

$$E_d^2 = (1 + q^d + \dots + q^{d(e-1)})E_d.$$

On définit alors pour d divisant n , l'expression $\mathbf{e}(q, d)$, par ce qui suit. Soulignons qu'il y a bien une dépendance en q , $\mathbf{e}(q, d)$ étant obtenue à partir des $E_{d'}$ (pour $d'|d$) à l'aide d'une formule d'inversion de Möbius :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(q, d) &:= \sum_{\substack{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \\ d_\theta = d}} \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{1}{q^n - 1} \sum_{\mu \in \mu_{q^{n-1}}^{(d)}} \sum_{k=0}^{q^n - 2} \mu^k \tau^k. \end{aligned}$$

La seconde égalité provenant de l'écriture 4.4.1. Remarquons que dans l'algèbre \mathcal{A} , φ et les termes $\mathbf{e}(q, d)$ commutent. En effet, $\varphi \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta q^{n-1}} \varphi$. On en déduit également que φ commute avec les termes E_d .

Les termes $\mathbf{e}(q, d)$ permettent de réécrire les relations précédentes de l'algèbre d'endomorphismes sous la forme :

$$\forall d|n, \quad \prod_{i=0}^{e-1} (\varphi^d - (-1)^{n-e} q^{\frac{d(n-e)}{2} + di}) \mathbf{e}(q, d) = 0. \quad (4.4.2)$$

Comme dans le cas des algèbres de Hecke, où la spécialisation $q = 1$ redonne l'algèbre de groupe de W , on souhaite spécialiser la valeur de q en une racine n -ième de l'unité, cela présente un problème relativement à tous nos facteurs $\mathbf{e}(q, d)$ qui ne sont pas définis pour de telles valeurs de q .

Nous contournons ce problème en introduisant une algèbre « générique », notée $\mathcal{A}_{r,n}$, construite dans le même esprit que les algèbres de Yokonuma-Hecke. Avant cela, remarquons la chose suivante : dans les relations précédentes, si l'on développe chacune des relations et qu'on les somme, comme $\sum_{\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})} \mathbf{e}_\theta = \sum_{d|n} \mathbf{e}(q, d) = 1$ et que φ commute avec les termes $\mathbf{e}(q, d)$, on trouve une relation de la forme

$$\varphi^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l|\text{pgcd}(k,n)} P_{k,l}(q) \mathbf{e}(q, l) \right) \varphi^k, \quad (4.4.3)$$

où les $P_{k,l}$ sont des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$. Cette dernière relation permet alors de définir la nouvelle algèbre $\mathcal{A}_{r,n}$. Avant cela, considérons l'exemple de GL_2 .

Exemple 4.4.4. Reprenons les relations définissant l'algèbre d'endomorphismes pour $\mathbf{G} = \text{GL}_4$.

$$\begin{aligned} (\varphi - 1)(\varphi - q)(\varphi - q^2)(\varphi - q^3) \mathbf{e}(q, 1) &= 0, \\ (\varphi^2 - q^2)(\varphi^2 - q^4) \mathbf{e}(q, 2) &= 0, \\ (\varphi^4 + q^6) \mathbf{e}(q, 4) &= 0, \end{aligned}$$

ou encore, après développement :

$$\begin{aligned} \varphi^4 \mathbf{e}(q, 1) &= [(q+1)(q^2+1)\varphi^3 - q(q^2+1)(q^2+q+1)\varphi^2 + q^3(q+1)(q^2+1)\varphi - q^6] \mathbf{e}(q, 1), \\ \varphi^4 \mathbf{e}(q, 2) &= [q^2(q^2+1)\varphi^2 - q^6] \mathbf{e}(q, 2), \\ \varphi^4 \mathbf{e}(q, 4) &= -q^6 \mathbf{e}(q, 4). \end{aligned}$$

En sommant, on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi^4 &= [(q+1)(q^2+1) \mathbf{e}(q,1)] \varphi^3 \\ &\quad + [-q(q^2+1)(q^2+q+1) \mathbf{e}(q,1) + q^2(q^2+1) \mathbf{e}(q,2)] \varphi^2 \\ &\quad + [q^3(q+1)(q^2+1) \mathbf{e}(q,1)] \varphi \\ &\quad - q^6. \end{aligned}$$

On en vient à la définition de la nouvelle algèbre. On rappelle que la notation $\mu_{r^n-1}^{(l)}$ l'ensemble des racines (r^n-1) -ième de l'unité μ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ telles que l est le plus petit entier satisfaisant $\mu^{r^l} = \mu$.

Définition 4.4.5. On note $\mathcal{A}_{r,n}$ l'algèbre sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ engendrée par deux générateurs t, σ avec les relations :

$$\begin{aligned} t^{r^n-1} &= 1, \\ \sigma^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l|\text{pgcd}(k,n)} P_{k,l}(u) \cdot \frac{1}{r^n-1} \sum_{\mu \in \mu_{r^n-1}^{(l)}} \sum_{i=0}^{r^n-2} \mu^i t^i \right) \sigma^k, \\ \sigma t^r &= t \sigma. \end{aligned}$$

Lemme 4.4.6. L'algèbre $\mathcal{A}_{r,n}$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ avec pour base les éléments $t^i \sigma^j$ pour $i = 1, \dots, r^n-1$ et $j = 0, \dots, n-1$.

Démonstration. Vérifions qu'une relation de dépendance $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ -linéaire sur les générateurs ne découle pas des relations imposées sur les générateurs de l'algèbre. Pour ce faire, écrivons l'action par multiplication à gauche de l'algèbre sur elle-même dans la base constituée des éléments $t^i \sigma^j$ ($1 \leq i \leq r^n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$)¹. En notant $d := (r^n-1)n$, on définit ainsi une application $\varphi : \mathcal{A}_{r,n} \rightarrow \text{Mat}_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u])$ par :

$$\varphi(t)(t^i \sigma^j) = t^{i+1} \sigma^j \quad \text{et} \quad \varphi(\sigma)(t^i \sigma^j) = \sigma t^i \sigma^j = t^{ir} \sigma^{j+1}$$

pour $1 \leq i \leq r^n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$. Comme φ est la multiplication à gauche, il est clair que les images $\varphi(t)$ et $\varphi(\sigma)$ satisfont aux trois relations de 4.4.5 (ou éventuellement, il suffit de le vérifier sur chaque $t^i \sigma^j$), on en déduit que $\varphi : \mathcal{A}_{r,n} \rightarrow \text{Mat}_d(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u])$ est un morphisme d'algèbres. Vérifions alors que $\varphi(t)$ et $\varphi(\sigma)$ sont des matrices $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ -linéairement indépendants.

Il est immédiat de calculer les images de certains éléments de la base :

$$\begin{aligned} \varphi(t) : t^i \sigma^0 &\mapsto t^{i+1} \sigma^0 & (1 \leq i \leq r^n-1), \\ \varphi(\sigma) : t^i \sigma^0 &\mapsto t^{ir} \sigma^1 & (1 \leq i \leq r^n-1). \end{aligned}$$

1. On voit $\mathcal{A}_{r,n}$ comme une algèbre libre sur la base $t^i \sigma^j$ et on vérifie que t et σ sont indépendants.

Aussi, si l'on ordonne la base des $t^i \sigma^j$ en faisant croître $i = 1, \dots, r^n - 1$ avant de faire croître $j = 0, \dots, n - 1$, on constate que $\varphi(\sigma)$ admet un bloc de taille $(r^n - 1) \times (r^n - 1)$ de 0 en haut à gauche alors que $\varphi(t)$ admet à cet endroit là une matrice de permutation. Cela garantit la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ -indépendance linéaire des générateurs. \square

Notation 4.4.7. Pour $z \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on note $\text{ev}_z : \overline{\mathbb{Q}}_\ell[u] \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ le morphisme de spécialisation défini par $u \mapsto z$.

Enonçons le résultat de spécialisation suivant :

Proposition 4.4.8. Pour ζ une racine n -ième de l'unité de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, la spécialisation $\text{ev}_\zeta : u \mapsto \zeta$ de l'algèbre $\mathcal{A}_{r,n}$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbb{Z}/(r^n - 1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Démonstration. Pour obtenir cette description de la spécialisation, définissons des éléments $\tilde{\mathbf{e}}(r, l) \in \mathcal{A}_{r,n}$ (pour $l|n$) par :

$$\tilde{\mathbf{e}}(r, l) = \frac{1}{r^n - 1} \sum_{\mu \in \mu_{r^n-1}^{(l)}} \sum_{i=0}^{r^n-2} \mu^i t^i.$$

On voit ainsi que la deuxième relation de l'algèbre $\mathcal{A}_{r,n}$ a été construite en imitant la relation 4.4.3 avec :

- r à la place de q ,
- $\tilde{\mathbf{e}}(r, l)$ à la place de $\mathbf{e}(q, l)$,
- σ à la place de φ ,
- u à la place de q comme variable du polynôme $P_{k,l}$.

Or, la relation 4.4.3 a été obtenue en développant puis sommant les relations 4.4.2. Aussi, nous écrivons les versions dans $\mathcal{A}_{r,n}$ des équations 4.4.2 que nous spécialiserons avant de les développer et de les sommer. Au final, nous obtenons la version spécialisée de la seconde relation définissant $\mathcal{A}_{r,n}$.

En suivant les quatre points de modification ci-dessus, les équations 4.4.2 admettent les versions suivantes dans $\mathcal{A}_{r,n}$:

$$\forall d|n, \quad \prod_{i=0}^{e-1} (\sigma^d - (-1)^{n-e} u^{\frac{d(n-e)}{2} + di}) \tilde{\mathbf{e}}(r, d) = 0. \quad (4.4.9)$$

Dans ces relations, si l'on spécialise u en ζ , il vient :

$$\forall d|n, \quad (\sigma^n - 1) \tilde{\mathbf{e}}(r, d) = 0.$$

Et en sommant, on trouve bien $\sigma^n = 1$, car on remarquera que $\sum_{d|n} \tilde{\mathbf{e}}(r, d) = 1$ au vu de la définition des éléments $\tilde{\mathbf{e}}(r, d)$. \square

Remarque 4.4.10. Remarquons que la spécialisation précédente est déployée semi-simple car $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est algébriquement clos de caractéristique 0.

Continuons l'étude générale des algèbres $\mathcal{A}_{r,n}$ par la proposition suivante. Celle-ci permet de justifier l'application du théorème de Tits plus loin dans la section.

Proposition 4.4.11. *L'algèbre $\mathcal{A}_{r,n}$ est déployée sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$.*

Démonstration. Reprenons les représentations irréductibles $v_{\theta,i}$ de \mathcal{A} et adaptons les au contexte des algèbres $\mathcal{A}_{r,n}$. Pour $\vartheta \in \text{Irr}(\mathbb{Z}/(r^n - 1)\mathbb{Z})$, on note d_ϑ le plus petit entier tel que $\vartheta^{r^{d_\vartheta}} = \theta$ et $e_\vartheta = n/d_\vartheta$ ². Soit $1 \leq i \leq e_\vartheta - 1$, on définit alors des applications $v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}} : \mathcal{A}_{r,n} \rightarrow \text{Mat}_{d_\vartheta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u])$ par :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \vartheta(t) & & & \\ & \vartheta^r(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \vartheta^{r^{d_\vartheta-1}}(t) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{d_\vartheta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u])$$

et

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{u,\theta,i} & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{d_\vartheta}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u])$$

avec $\epsilon_{u,\theta,i} = (-1)^{n-e_\vartheta} u^{d_\vartheta(i-(n-1)+\frac{n-e_\vartheta}{2})}$.

Par de simples calculs, il est immédiat la première et la troisième relation définissant $\mathcal{A}_{r,n}$ en 4.4.5 sont satisfaites par les images de $v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}}$. Concernant la seconde relation, tout comme dans la démonstration précédente, remarquons que celle-ci découle des formules 4.4.9 que l'on développe puis somme. Ainsi, pour vérifier que la seconde relation de 4.4.5 est satisfaite, il suffit de vérifier que les relations 4.4.9 le sont. En regardant les polynômes caractéristiques des matrices $v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}}(\sigma)$, c'est clairement le cas.

On en déduit que les $v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}}$ sont des représentations de $\mathcal{A}_{r,n}$. Elles sont irréductibles et vérifient

$$v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}} \simeq v_{\vartheta',j}^{\mathcal{A}_{r,n}} \Leftrightarrow i = j \text{ et } \exists k \in \{0, \dots, d_\vartheta - 1\}, \vartheta' = \vartheta^{r^k},$$

par les mêmes arguments que ceux donnés pour les $v_{\theta,i}$ dans la démonstration de les propositions 4.2.1 et 4.2.2. On en déduit que $\mathcal{A}_{r,n}$ est déployée sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ en comparant les dimensions de $\mathcal{A}_{r,n}$ et du produit d'algèbres de matrices sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$ provenant des représentations $v_{\vartheta,i}^{\mathcal{A}_{r,n}}$. \square

Dans toute la suite de la section, nous choisissons $r = q$ et nous considérons les algèbres $\mathcal{A}_{q,n}$. La proposition suivante est immédiate. Elle découle de la construction même des algèbres $\mathcal{A}_{q,n}$ (ou $\mathcal{A}_{r,n}$).

2. On a volontairement choisi la notation ϑ plutôt que θ pour réserver cette dernière à des éléments de $\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$.

Proposition 4.4.12. *L'algèbre spécialisée ${}^{ev_q} \mathcal{A}_{q,n}$ est précisément l'algèbre $\mathcal{A} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle c \rangle)$. Cette algèbre est également déployée semi-simple.*

Démonstration. Si l'on spécialise les relations définissant $\mathcal{A}_{q,n}$ par ev_q , on tombe exactement sur les relations de \mathcal{A} . Le lemme 4.4.6 permet de conclure. \square

Dans ce qui suit, on met en place le contexte pour utiliser le théorème de Tits (deux fois), on en déduira ensuite que les algèbres ${}^{ev_q} \mathcal{A}_{q,n}$ et ${}^{ev_\zeta} \mathcal{A}_{q,n}$ ont les mêmes invariants numériques ; c'est précisément ce que l'on souhaite.

Proposition 4.4.13. *Comme $\mathcal{A}_{q,n}$ est déployée sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[u]$, si $f : \overline{\mathbb{Q}}_\ell[u] \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est une spécialisation telle que ${}^f \mathcal{A}_{q,n}$ est déployée semi-simple, alors $\mathcal{A}_{q,n}$ et ${}^f \mathcal{A}_{q,n}$ ont les mêmes invariants numériques.*

Ceci s'applique en particulier pour les spécialisations $ev_\zeta : u \mapsto \zeta$ et $ev_q : u \mapsto q$.

Remarque 4.4.14. La définition des « invariants numériques » utilisée est celle de [18, 68.13], on peut reformuler cela en disant qu'il existe une « application de décomposition » (voir [30, 7.4.3]) entre les groupes de Grothendieck :

$$d_f : \mathcal{R}(\mathcal{A}_{q,n}) \longrightarrow \mathcal{R}({}^f \mathcal{A}_{q,n}),$$

et si le théorème de déformation de Tits s'applique, alors d_f est un isomorphisme préservant les classes d'isomorphisme des modules simples. Ce point de vue est présenté dans [30, §7].

Démonstration. L'hypothèse sur f garantit que l'on peut appliquer le théorème de déformation de Tits. On en déduit que $\mathcal{A}_{q,n}$ est semi-simple (en plus d'être déployée) et que l'application de déformation d_f est un isomorphisme préservant les classes des modules simples.

Puisque les spécialisations $ev_\zeta : u \mapsto \zeta$ et $ev_q : u \mapsto q$ donnent lieu à des algèbres déployées semi-simples, on en déduit que ${}^{ev_\zeta} \mathcal{A}_{q,n} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T})$, ${}^{ev_q} \mathcal{A}_{q,n} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{q,n}$ ont les mêmes invariants numériques. \square

4.5 Formule explicite d'isomorphisme dans le cas de GL_n (n premier)

Dans cette partie, nous cherchons à expliciter l'isomorphisme reliant l'algèbre d'endomorphismes à l'algèbre de groupe du normalisateur $N_{\mathbf{G}^{cF}}$.

Bien que ce ne soit pas le cas dans ce manuscrit, si l'on souhaite obtenir des résultats en travaillant sur \mathbb{Z}_ℓ (lorsque n est l'ordre de q modulo ℓ) plutôt que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, il serait intéressant d'avoir une formule explicite de l'isomorphisme. Ceci est traité en détails pour SL_2 dans la section 8.3 du livre de Bonnafé [4].

Le normalisateur $N_{\mathbf{G}^{cF}}$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle c \rangle$. Remarquons que ce produit semi-direct admet pour générateurs les éléments de \mathbf{T}^{cF} et l'élément c . De plus, il est caractérisé par les relations :

$$c^n = 1, \quad ct^q = tc.$$

A partir de la relation polynomiale 4.4.3 portant sur φ , nous cherchons à obtenir une formule polynomiale en φ et les $\{E_{\delta_i}\}_{i=1,\dots,r}$ ($\delta_1, \dots, \delta_r$ étant l'ensemble des diviseurs stricts de n), notée $Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r})$ (avec Q un polynôme à plusieurs variables), vérifiant

$$Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r})^n = 1.$$

Cette expression fait sens, puisque l'on a remarqué que φ et les termes E_{δ_i} commutent dans la sous-section 4.4.1. Si de plus, cet élément $Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r})$ satisfait à la relation :

$$Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r})t^q = tQ(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r}) \quad (t \in \mathbf{T}^{cF})$$

on peut définir un isomorphisme explicite $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ via :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) &\simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{T}^{cF} \rtimes \langle c \rangle) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} = \langle \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{cF}, \varphi \rangle \\ c &\longmapsto Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r}). \end{aligned}$$

Dans le reste de cette section, nous travaillons avec n un nombre premier. Grâce à cette hypothèse, les formules précédentes, et plus particulièrement la relation 4.4.3, s'expriment avec un seul élément E_{δ_i} (noté E_1) :

$$\varphi^n = \sum_{k=1}^{n-1} [P_{k,1}(q) \mathbf{e}(q, 1)] \varphi^k.$$

4.5.1 Le cas $\mathbf{G} = \text{GL}_2$

Le cas de GL_2 peut se traiter différemment des autres grâce à une simple mise sous forme canonique. En effet, la relation polynomiale satisfaite par φ est dans ce cas (en utilisant l'élément $E_1 = (1+q)e(q, 1)$ vérifiant la relation $E_1^2 = (1+q)E_1$) :

$$\varphi^2 = \varphi E_1 - q.$$

Et alors :

$$\left(\varphi - \frac{1}{2}E_1\right)^2 = -q - \frac{1}{4}(q+1)E_1,$$

en utilisant la relation $E_1^2 = (1+q)E_1$. Par un simple calcul, une racine carrée de l'inverse du membre de droite est :

$$\frac{1}{\sqrt{-q}} \left(1 - \frac{\sqrt{-q} - 1}{(q-1)(\sqrt{-q} + 1)} E_1 \right).$$

Ainsi, l'expression polynomiale

$$Q(\varphi, E_1) = \frac{1}{\sqrt{-q}} \left(1 - \frac{\sqrt{-q} - 1}{(q-1)(\sqrt{-q} + 1)} E_1 \right) \left(\varphi - \frac{1}{2}E_1 \right)$$

satisfait la relation voulue.

Remarque 4.5.1. Avant de passer au cas général, remarquons que l'expression précédente se développe puis se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} Q(\varphi, E_1) &= \left[\frac{\sqrt{-q}(q+1)}{(q-1)q(q-2\sqrt{-q}-1)} E_1 + \frac{1}{\sqrt{-q}} \right] \varphi + \frac{E_1}{q-1} \\ &= \left[\frac{\sqrt{-q}(-q-2\sqrt{-q}+1)}{(1-q)q(1+q)} (E_1 - (1+q)) + \frac{2}{1-q} \right] \varphi + \frac{E_1}{q-1}. \end{aligned}$$

Cette réécriture, a priori plus compliquée, prendra tout son intérêt dans la sous-section suivante.

4.5.2 Le cas général $\mathbf{G} = \text{GL}_n$

Pour traiter les autres cas, on note ζ une racine n -ième de l'unité et introduisons le polynôme interpolateur de Lagrange, noté $Q^{lag} \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, vérifiant :

$$1 \mapsto 1, \quad q \mapsto \zeta, \quad q^2 \mapsto \zeta^2, \quad \dots, \quad q^{n-1} \mapsto \zeta^{n-1}.$$

Ce polynôme est de degré $n-1$ et on note $C_0^{lag}, \dots, C_{n-1}^{lag}$ ses coefficients.

Soit $Q \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[X, Y]$ un polynôme satisfaisant à $Q(\varphi, E_1)^n = 1$ dans l'algèbre $\mathcal{A} = \langle \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^{cF}, \varphi \rangle$. Dans le cas particulier où l'on travaille avec la variété $\mathbf{X}(c)$ au lieu de $\mathbf{Y}(\dot{c})$, c'est-à-dire que l'on prend $\varphi = q^i$ (pour les $i \in \{0, \dots, n-1\}$) et $E_1 = 1 + q + \dots + q^{n-1}$ (car on applique l'idempotent \mathbf{e}_1). Alors, la relation précédente devient, après application de \mathbf{e}_1 :

$$Q(q^i, 1 + q + \dots + q^{n-1})^n = 1, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Autrement dit, après le choix de racine de l'unité, le polynôme $Q(X, 1 + q + \dots + q^{n-1}) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[X]$ correspond au polynôme interpolateur $Q^{lag} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[X]$.

Lemme 4.5.2. Dans l'algèbre \mathcal{A} , on dispose de la relation suivante :

$$\left(Q^{lag}(\varphi) \cdot \frac{E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right)^n = \frac{E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}}.$$

Démonstration. Avec les notations précédant le lemme, soit $Q \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[X, Y]$ satisfaisant $Q(\varphi, E_1)^n = 1$. On écrit : $Q(X, Y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} a_{k,l} Y^k X^l$.

Alors, toujours grâce aux considérations précédentes,

$$Q^{lag}(X) = Q(X, 1 + q + \dots + q^{n-1}) = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} a_{k,l} (1 + q + \dots + q^{n-1})^k X^l.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 & Q^{lag}(\varphi) \cdot \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 0} a_{k,l} (1+q+\dots+q^{n-1})^{k-1} E_1 \varphi^l + Q(\varphi, 0) \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 0} a_{k,l} E_1^k \varphi^l + Q(\varphi, 0) \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \\
 &= Q(\varphi, E_1) + Q(\varphi, 0) \left(\frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} - 1 \right) \\
 &= Q(\varphi, E_1) + \frac{1}{1+q+\dots+q^{n-1}} Q(\varphi, 0) (E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1})).
 \end{aligned}$$

Maintenant, comme $E_1 \cdot (E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1})) = 0$, par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
 & \left(Q^{lag}(\varphi) \cdot \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \right)^n \\
 &= Q(\varphi, E_1)^n + \frac{1}{(1+q+\dots+q^{n-1})^n} Q(\varphi, 0)^n (E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1}))^n \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} Q(\varphi, 0)^k \frac{1}{(1+q+\dots+q^{n-1})^{n-k}} Q(\varphi, 0)^{n-k} (E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1}))^{n-k} \\
 &= 1 + ((-1)^{n-1} \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} - 1) + (1 - (-1)^{n-1}) \left(\frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \right) \\
 &= \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité provenant de $(E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1}))^n = (-1)^{n-1} (1+q+\dots+q^{n-1})^{n-1} (E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1}))$ et $Q(\varphi, 0)^n = 1$. Pour cette dernière égalité, il suffit de remarquer que l'algèbre engendrée par φ, E_1 s'identifie à l'anneau de polynômes à deux variables $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[X, Y]$ quotienté par l'idéal engendré par les relations $X^n = \sum_{k=1}^{n-1} X^k \cdot P_{k,1}(q) Y$ et $Y^2 = (1+q+\dots+q^{n-1})Y$. Dans cet anneau, on évalue $Q(X, Y)^n = 1$ (relation définissant Q dans les notations avant le lemme) en $Y = 0$ pour obtenir la relation voulue. \square

Théorème 4.5.3. Notons $Q(\varphi, E_1)$ l'élément de \mathcal{A} défini par :

$$\begin{aligned}
 Q(\varphi, E_1) &= \left[a(E_1 - (1+q+\dots+q^{n-1})) + C_{n-1}^{lag} \right] \varphi^{n-1} \\
 &+ \frac{E_1}{1+q+\dots+q^{n-1}} \left(C_{n-2}^{lag} \varphi^{n-2} + \dots + C_1^{lag} \varphi + C_0^{lag} \right),
 \end{aligned}$$

avec

$$a = \frac{\sqrt[n]{-1}}{(1+q+\dots+q^{n-1})q^{\frac{(n-1)^2}{2}}} + \frac{C_{n-1}^{lag}}{1+q+\dots+q^{n-1}}.$$

Alors $Q(\varphi, E_1)^n = 1$. De plus, si $t \in \mathbf{T}^{cF}$, on a $Q(\varphi, E_1)t^q = tQ(\varphi, E_1)$.

Démonstration. L'expression polynomiale se réécrit :

$$Q(\varphi, E_1) = (E_1 - (1 + q + \dots + q^{n-1})) \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right] \varphi^{n-1} + \frac{Q^{lag}(\varphi)E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}},$$

et alors :

$$\begin{aligned} Q(\varphi, E_1)^n &= (E_1 - (1 + q + \dots + q^{n-1}))^n \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n \varphi^{n(n-1)} \\ &\quad + \left(\frac{Q^{lag}(\varphi)E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right)^n \\ &= (-1)^{n-1} (1 + q + \dots + q^{n-1})^{n-1} (E_1 - (1 + q + \dots + q^{n-1})) \\ &\quad \times \left[R(\varphi)E_1 + (-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{n-1} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n \\ &\quad + \frac{E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \\ &= (-1)^{n-1} (1 + q + \dots + q^{n-1})^{n-1} (E_1 - (1 + q + \dots + q^{n-1})) \\ &\quad \times (-1)^{(n-1)^2} q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n \\ &\quad + \frac{E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \\ &= (1 + q + \dots + q^{n-1})^{n-1} (E_1 - (1 + q + \dots + q^{n-1})) \\ &\quad \times q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n \\ &\quad + \frac{E_1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \\ &= E_1 \left((1 + q + \dots + q^{n-1})^{n-1} q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n + \frac{1}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right) \\ &\quad - (1 + q + \dots + q^{n-1})^n q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n. \end{aligned}$$

Pour a tel que $(1 + q + \dots + q^{n-1})^n q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left[a - \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \right]^n = -1$, c'est-à-dire

$$a = \frac{\sqrt[n]{-1}}{(1 + q + \dots + q^{n-1})q^{\frac{(n-1)^2}{2}}} + \frac{C_{n-1}^{lag}}{1 + q + \dots + q^{n-1}},$$

par un simple calcul, le coefficient de E_1 s'annule et il ne reste que $Q(\varphi, E_1)^n = 1$.

Pour la dernière partie du théorème, montrons que l'action de $Q(\varphi, E_1)t^q$ est la même que celle de $tQ(\varphi, E_1)$ (pour $t \in \mathbf{T}^{cF}$) sur toutes les sommes directes de la forme $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_\theta \oplus \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_{F(\theta)} \oplus \dots \oplus \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_{F^{d_\theta-1}(\theta)}$ ($\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$).

Il se présente alors deux cas de figure :

1. Si $\theta^q \neq \theta$, sur la somme directe $H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_\theta \oplus H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_{F(\theta)} \oplus \cdots \oplus H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{c}))\mathbf{e}_{F^{d_{\theta^{-1}}(\theta)}}$, l'expression $Q(\varphi, E_1)$ se simplifie nettement : tous les termes avec E_1 en facteur disparaissent et il ne reste qu'à montrer que

$$\varphi^{n-1}t^q = t\varphi^{n-1}.$$

Or, d'après les définitions précédant 4.2.1, pour l'action de conjugaison sur les matrices diagonales, φ agit comme le cycle c^{-1} . On en déduit que φ^{n-1} agit comme $(c^{-1})^{n-1} = c$. Ainsi : $\varphi^{n-1}t^q = c(t^q)\varphi^{n-1} = t\varphi^{n-1}$.

2. Si $\theta^q = \theta$, remarquons que les relations de commutations sont toutes simplifiées :
 - E_1 commute à φ et t (ceci est vrai même sans l'hypothèse sur θ).
 - D'après les formules précédant 4.2.1, on a $t^q = t$ et alors $\varphi t \varphi^{-1} = t^q = t$ donc φ et t commutent.

Au vu de l'expression définissant $Q(\varphi, E_1)$, on obtient $Q(\varphi, E_1)t^q = tQ(\varphi, E_1)$ sur chacune des composantes θ -isotypiques. \square

Remarque 4.5.4. On retrouve bien l'expression de la remarque 4.5.1, car le polynôme interpolateur satisfaisant $1 \mapsto 1$ et $q \mapsto -1$ est $Q^{lag} = \frac{2}{1-q}x + \frac{q+1}{q-1}$ et de ce fait, $a = \frac{\sqrt{-1}}{(1+q)\sqrt{q}} + \frac{2}{(1+q)(1-q)} = \frac{\sqrt{-q}(-q-2\sqrt{-q}+1)}{(1-q)q(1+q)}$.

Le théorème précédent admet le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.5. Avec les notations du théorème 4.5.3, il existe un unique isomorphisme d'algèbres $\overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c})))$ donné par :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Q}}_\ell N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T}) & \xrightarrow{\sim} & \text{End}_{\mathbf{G}^F}(H_c^*(\mathbf{Y}(\dot{c}))) \\ t & \longmapsto & t, \\ c & \longmapsto & Q(\varphi, E_1). \end{array}$$

Chapitre 5

Cohomologie de la compactification $\overline{Y}(c)$

Dans ce chapitre, nous décrivons la cohomologie de la compactification $\overline{Y}(c)$.

Nous commençons par reprendre les objets et les résultats de la partie 2.4 afin de les appliquer au cas $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ et pour un élément de Coxeter.

Plus précisément, l'élément de Coxeter c associé à (\mathbf{G}, F) admet une unique écriture réduite $c = s_1 \cdots s_{n-1}$. L'unicité de cette écriture, ainsi que le fait que chaque réflexion simple apparaît exactement une fois dedans, permet l'utilisation des résultats de la section 2.4 et notamment ceux de la sous-section 2.4.3 en remplaçant la suite d'élément $\mathbf{w} = \mathbf{c} := (s_1, \dots, s_{n-1})$ par l'élément c . En particulier les objets suivants sont alors définis sans ambiguïté (ce qui n'est pas vrai en général) :

- pour $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, les sous-mots c_I et \dot{c}_I , à la place des sous-suites \mathbf{c}_I et $\dot{\mathbf{c}}_I$,
- pour x un sous-mot de c (pour l'ordre de Bruhat) les ensembles $I_{x,c}$ à la place des ensembles $I_{\mathbf{x},\mathbf{c}}$.

5.1 Sous-groupes de tores dans le cas $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ et

$$w = c$$

Pour poursuivre l'étude des parties isotypiques (pour l'action de \mathbf{T}^{cF}) débutée dans la sous-section 2.4, notamment mieux comprendre la formule 2.4.8 dans notre cas particulier, il est nécessaire de déterminer les sous-groupes $N_c(Y_{c,c_I})$. Les résultats ci-dessous ont pour but d'expliciter les restrictions mises sur les caractères θ dans la proposition 2.4.7.

On rappelle que les réflexions simples s_i désignent les transpositions élémentaires $(i, i+1)$, après avoir identifié le groupe de Weyl à \mathfrak{S}_n . Egalement, notons que l'on avait introduit en 3.1 la première projection $p_1 : \mathbf{T} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1$. Celle-ci réalise un isomorphisme $\mathbf{T}^{cF} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^n}^\times$. Enfin, ζ désigne

ici une racine $(q^n - 1)$ -ième de l'unité dans \mathbb{F}^\times .

Proposition 5.1.1. *Soit $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, et c_I le sous-mot de c associé. Alors :*

$$N_c(Y_{c,c_I}) \xrightarrow{p_1} \langle \zeta^{1-q^{\text{pgcd}(n,I)}} \rangle,$$

où $\text{pgcd}(n, I)$ désigne le pgcd pris sur n et tous les éléments de I .

Démonstration. Ecrivons $I := \{i_1, \dots, i_r\}$, on rappelle que le sous-réseau Y_{c,c_I} est défini par :

$$Y_{c,c_I} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z} s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee).$$

Alors le sous-groupe $N_c(Y_{c,c_I})$ est engendré par les éléments

$$N_{F^n/cF}(s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee)(\zeta)), \quad i \in I.$$

Pour un $i \in I$ fixé, il est facile de voir que $s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee)(\zeta)$ est la matrice diagonale $D := \text{diag}(\zeta, 1, \dots, 1, \zeta^{-1}, 1, \dots)$ où le terme ζ^{-1} est en position $i+1$. Alors, par un simple calcul : $N_{F^n/cF}(D) = D \cdot cF D \cdots (cF)^{n-1} D \xrightarrow{p_1} \zeta^{1-q^{n-i}}$. On en déduit que $p_1(N_c(Y_{c,c_I}))$ est engendré par $\zeta^{\text{pgcd}_{i \in I}(1-q^{n-i})} = \zeta^{1-\text{pgcd}(n,I)}$. Cette dernière égalité vient de la relation $\text{pgcd}(q^i - 1, q^j - 1) = q^{\text{pgcd}(i,j)} - 1$ qu'on montre par exemple en remarquant que si p (premier) divise $q^i - 1$ et $q^j - 1$ (en supposant $i > j$), alors $p|q^{i-j} - 1$ et de proche en proche $p|q^r - 1$ où r est le reste de i modulo j . On réitère le raisonnement avec les données $p|q^j - 1$ et $p|q^r - 1$ et on obtient à terme $p|q^{\text{pgcd}(i,j)} - 1$. En effet, on a suivi précisément l'algorithme d'Euclide donnant le pgcd de i et j . \square

Ce calcul permet de formuler de façon plus claire la condition pour un caractère $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ d'être trivial sur un sous-groupe $N_c(Y_{c,c_I})$ (condition exprimée dans la proposition 2.4.7). On rappelle que l'isomorphisme $p_1 : \mathbf{T}^{cF} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^n}^\times$ permet de construire des caractères de la façon suivante :

- Si θ est un caractère de \mathbf{T}^{cF} , alors $(p_1)_*(\theta) = \theta \circ p_1^{-1}$ est un caractère de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$,
- Si θ' est un caractère de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$, alors $(p_1)^*(\theta') = \theta' \circ p_1$ est un caractère de \mathbf{T}^{cF} .

Les deux applications sont clairement inverses l'une de l'autre et définissent donc une bijection :

$$(p_1)_* : \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF}) \xrightarrow{\sim} \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^n}^\times).$$

Le corollaire suivant découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 5.1.2. *Soit $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, et c_I le sous-mot de c associé. $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ est trivial sur le sous-groupe $N_c(Y_{c,c_I})$ si, et seulement, si $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$.*

Démonstration. Par la proposition 5.1.1, on sait que $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ est trivial sur le sous-groupe $N_c(Y_{c,c_I})$ si, et seulement, si $(p_1)_*(\theta)$ est trivial sur le sous-groupe $\langle \zeta^{q^{\text{pgcd}(n,I)} - 1} \rangle$. Le corollaire est alors immédiat. \square

Faisons une étude similaire pour les sous-groupes $N_{c_I}(Y_{c,c_I})$ et les caractères θ_I définis en 2.4.6. Avant cela, nous introduisons une application p_I qui jouera le même rôle que p_1 précédemment.

Soient $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ une partie de $\{1, \dots, n-1\}$, c_I le sous-mot de c associé et définissons $\lambda_I = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$ une composition de n par :

$$\lambda_1 = i_1, \quad \lambda_2 = i_2 - i_1, \quad \dots, \quad \lambda_r = i_r - i_{r-1}, \quad \lambda_{r+1} = n - i_r.$$

Considérons le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{p_I} & (\mathbb{F}^\times)^{r+1} \\ \text{diag}(t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & (t_1, t_{i_1+1}, \dots, t_{i_r+1}), \end{array}$$

alors p_I réalise un isomorphisme $\mathbf{T}^{c_I F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times \times \dots \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times$ dont l'application inverse est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times \times \dots \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times & \xrightarrow{p_I^{-1}} & \mathbf{T}^{c_I F} \\ (t_1, \dots, t_{r+1}) & \longmapsto & \text{diag}(t_1, \dots, t_1^{q^{\lambda_1}-1}, t_2, \dots, t_2^{q^{\lambda_2}-1}, \dots, t_{r+1}, \dots, t_{r+1}^{q^{\lambda_{r+1}}-1}). \end{array}$$

Tout comme avec p_1 auparavant (voir 3.1), p_I permet de construire des caractères via :

- si α est un caractère de $\mathbf{T}^{c_I F}$, alors $(p_I)_*(\alpha) = \alpha \circ p_I^{-1}$ est un caractère de $\mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times \times \dots \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times$,
- si β est un caractère de $\mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times \times \dots \times \mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times$, alors $(p_I)^*(\beta) = \beta \circ p_I$ est un caractère de $\mathbf{T}^{c_I F}$,

et ces constructions sont inverses l'une de l'autre et définissent donc une bijection :

$$(p_I)_* : \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F}) \xrightarrow{\sim} \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times) \times \dots \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times).$$

La proposition suivante est à mettre en parallèle avec la proposition 5.1.1. ξ est une racine $(q^\eta - 1)$ -ième de l'unité, η étant la plus petite puissance de F déployant tous les tores dans GL_n : contrairement au calcul des sous-groupes $N_c(Y_{c,c_I})$, on ne peut pas se contenter de prendre une racine $(q^n - 1)$ -ième de l'unité (voir la remarque 1.1.1).

Proposition 5.1.3. *Soit $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, et c_I (resp. λ_I) le sous-mot de c (resp. la composition de n) associé. Alors, le sous-groupe $p_I(N_{c_I}(Y_{c,c_I}))$ est engendré par les éléments*

$$\left(\xi_{q^{\lambda_1}-1}^{\frac{q^\eta-1}{\eta}}, 1, \dots, 1, \xi_{q^{\lambda_{k+1}}-1}^{\frac{q^\eta-1}{\eta}}, 1, \dots, 1 \right), \quad k = 1, \dots, r.$$

Démonstration. Rappelons que le sous-réseau Y_{c,c_I} est défini par :

$$Y_{c,c_I} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z} s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee).$$

Alors le sous-groupe $N_{c_I}(Y_{c,c_I})$ est engendré par les éléments

$$N_{F^\eta/c_I F}(s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee)(\xi)), \quad i = i_1, \dots, i_r.$$

Pour un $i_k \in I$ fixé, il est facile de voir que $s_1 \cdots s_{i_k-1}(\alpha_{i_k}^\vee)(\xi)$ est la matrice diagonale $D_{i_k} := \text{diag}(\xi, 1, \dots, 1, \xi^{-1}, 1, \dots)$ où le terme ξ^{-1} est en position $i_k + 1$. Alors :

$$N_{F^\eta/c_I F}(D_{i_k}) = D_{i_k} \cdot {}^{c_I F} D_{i_k} \cdots ({}^{c_I F})^{\eta-1} D_{i_k} \xrightarrow{p_I} \left(\xi^{\frac{q^\eta-1}{q^{\lambda_1-1}}}, 1, \dots, 1, \xi^{\frac{q^\eta-1}{q^{\lambda_{k+1}-1}}}, 1, \dots, 1 \right),$$

d'où la proposition en découle. \square

Revenons désormais sur la correspondance de caractères $\theta \mapsto \theta_I$ introduite à la proposition 2.4.6.

Pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F})$, on peut lui associer bijectivement :

— Un caractère $(p_1)_*(\theta) \in \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^n}^\times)$.

— Un caractère θ_I de $\text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F})$ si $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$, par 2.4.6 et le corollaire 5.1.2.

Le lemme suivant relie $(p_1)_*(\theta)$ et θ_I .

Lemme 5.1.4. Soit $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F})$ et $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ tel que $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$(p_I)_*(\theta_I) = ((p_1)_*(\theta), \dots, (p_1)_*(\theta)) \in \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^{\lambda_1}}^\times) \times \cdots \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^{\lambda_{r+1}}}^\times).$$

En particulier, chaque composante de $(p_I)_*(\theta_I)$ est d'ordre q^{d_θ} .

Démonstration. Identifions $\text{Irr}(\mathbb{F}_{q^n}^\times)$ au groupe cyclique μ_{q^n-1} des racines (q^n-1) -ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, l'isomorphisme étant via l'image d'un générateur de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$. On fait de même pour $\text{Irr}(\mathbb{F}_{q^{\lambda_i}}^\times) \simeq \mu_{q^{\lambda_i}-1}$. Désignons par $\mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}$ les racines primitives $(q^{d_\theta}-1)$ -ième de l'unité, alors $(p_1)_*(\theta) \in \mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}$. Or, on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mu_{q^n-1}^{(d_\theta)} & \xrightarrow{i} & \mu_{q^{\lambda_1}-1}^{(d_\theta)} \times \cdots \times \mu_{q^{\lambda_{r+1}-1}^{(d_\theta)}} \\ p_1^{-1} \downarrow & & \downarrow p_I^{-1} \\ p_1^{-1}(\mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}) & \xlongequal{\quad} & p_I^{-1}(\mu_{q^{\lambda_1}-1}^{(d_\theta)} \times \cdots \times \mu_{q^{\lambda_{r+1}-1}^{(d_\theta)}}) \end{array}$$

où $i : \mu_{q^n-1}^{(d_\theta)} \rightarrow \mu_{q^{\lambda_1}-1}^{(d_\theta)} \times \cdots \times \mu_{q^{\lambda_{r+1}-1}^{(d_\theta)}}$, $t \mapsto (t, \dots, t)$. On a donc sur $\mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}$, $p_1^{-1} = p_I^{-1} \circ i$ et alors $(p_1^{-1})_* = (p_I^{-1})_* \circ i_*$ ou encore $(p_I)_* = i_* \circ (p_1)_*$. \square

On peut désormais reprendre la décomposition 2.4.5 de la cohomologie alternée et en prendre la partie θ -isotypique (pour un certain $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$) en utilisant le résultat 2.4.8. Il vient la formule suivante à valeur dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(\mathbf{G}^F \times \langle F^{d_\theta} \rangle)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}(\dot{c}))_\theta &= \sum_{I \in \{1, \dots, n-1\}} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{c}_I)^{N_c(Y_{c,c_I})})_\theta \\ &= \sum_{I \in \mathcal{E}_{d_\theta|n}} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{c}_I))_{\theta_I} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

où $\mathcal{E}_{d_\theta|n}$ désigne l'ensemble des parties I de $\{1, \dots, n-1\}$ telles que $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$. Autrement dit, il s'agit des parties de $\{1, \dots, n-1\}$ constituées d'éléments divisibles par d_θ .

5.2 Cohomologie

Quelques notations

Par le lemme 2.4.6 et le corollaire 5.1.2, on sait que pour toute partie I de $\{1, \dots, n-1\}$ telle que $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$, un caractère θ de \mathbf{T}^{cF} correspond bijectivement à un caractère $\theta_I \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F})$.

Pour la suite, nous introduisons des notations plus précises. Soit $I := \{i_1, \dots, i_r\}$, et définissons alors $\lambda^I = (\lambda_1^I, \dots, \lambda_{r+1}^I)$ une composition de n par :

$$\lambda_1^I = i_1, \quad \lambda_2^I = i_2 - i_1, \quad \dots, \quad \lambda_r^I = i_r - i_{r-1}, \quad \lambda_{r+1}^I = n - i_r.$$

La donnée d'un caractère θ_I de $\text{Irr}(\mathbf{T}^{c_I F})$, est équivalente à la donnée d'un $(|I| + 1)$ -uplet de caractères $(\theta_{\lambda_1^I}, \theta_{\lambda_2^I}, \dots, \theta_{\lambda_{r+1}^I}) \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_{\lambda_1^I} F}) \times \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_{\lambda_2^I} F}) \times \dots \times \text{Irr}(\mathbf{T}^{c_{\lambda_{r+1}^I} F})$ correspondant au produit $\text{GL}_{\lambda_1^I} \times \text{GL}_{\lambda_2^I} \times \dots \times \text{GL}_{\lambda_{r+1}^I}$. Cela résulte du lemme 5.1.4. Un tel produit provenant d'une composition λ_I (pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n-1\}$) sera noté $\text{GL}_{n,I}$ dans la suite. Enfin, rappelons que les caractères $\theta_{\lambda_i^I}$ ainsi définis vérifient $d_{\theta_{\lambda_i^I}} = d_\theta$.

Nous mettons maintenant en avant les notations utilisées par Digne, Michel et Rouquier [25, 3.3.5] pour caractériser certains $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{G}^F \times \langle F \rangle)$ -modules gradués. Soulignons que jusqu'à présent nous n'avons pas encore considéré de structures graduées.

Notre contexte est légèrement différent : pour θ décrivant $\text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$, nous considérons des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{G}^F \times \langle F^{d_\theta} \rangle)$ -modules gradués et au final, nous voulons prendre en compte tous les $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$.

Fixons un entier d . Soit L_d le sous-groupe du groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{G}^F \times \langle F^d \rangle)$ -modules gradués de dimension finie, engendré par les classes des représentations où les valeurs propres de F^d sont de la forme ξq^j avec ξ une

racine de l'unité et $j \in \mathbb{N}$. On définit alors un morphisme $L_d \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$ comme suit. Soit ρ une représentation irréductible de \mathbf{G}^F et λ une représentation de $\langle F^d \rangle$ donnée par $\lambda(F^d) = \xi q^j$. Alors, on envoie la classe de la représentation $\rho \otimes \lambda$, placée en degré i , sur l'élément $h^i t^j \rho$.

D'après les théorèmes 2.3.3 et 3.4.3, les classes $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{X}(c))]$ et $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta]$ (pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$) de $\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{X}(c))$ et $\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta$ dans les groupes de Grothendieck correspondants, sont respectivement dans L_1 et L_{d_θ} ¹. Il est donc possible d'associer à $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{X}(c))]$ et $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta]$ des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$, ceci est fait plus précisément dans la proposition suivante. Remarquons enfin, qu'il est alors possible de retrouver la classe de la somme alternée de la cohomologie (cette dernière étant supposée concentrée en degré 0) en spécialisant $h = -1$ et par exemple :

$$[\mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta] = h^0 [\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta]_{h=-1}.$$

La proposition suivante est une reformulation du théorème 3.4.3.

Proposition 5.2.1. *Avec les notations précédentes, les classes $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{X}(c))]$ et $[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta]$ s'identifient aux éléments suivants de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$:*

$$[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{X}(c))] = \sum_{i=n-1}^{2(n-1)} h^i t^{i-(n-1)} \rho_{[i-(n-1)+1, 1^{2(n-1)-i}]},$$

et pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$:

$$[\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y}(\dot{c}))_\theta] = \sum_{i=n-1}^{(n-1)+(e_\theta-1)} h^i t^{d_\theta(i-(n-1)+\frac{n-e_\theta}{2})} \rho_{\theta, [i-(n-1)+1, 1^{(n-1)+(e_\theta-1)-i}]}.$$

Soit I une partie de $\{1, \dots, n-1\}$ telle que $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$. Reprenons alors l'équation 5.1.5 avec les dernières notations introduites :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n))_\theta &= \sum_{I \in \{1, \dots, n-1\}} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_{n, I})^{N_c(Y_{c, c_I})})_\theta \\ &= \sum_{I \in \mathcal{E}_{d_\theta | n}} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_{n, I}))_{\theta_I} \\ &= \sum_{I \in \mathcal{E}_{d_\theta | n}} R_{\text{GL}_{n, I}}^{\text{GL}_n} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{n, I}}(\dot{c}_{n, I}))_{\theta_I} \\ &= \sum_{I \in \mathcal{E}_{d_\theta | n}} R_{\text{GL}_{n, I}}^{\text{GL}_n} \mathbf{H}_c^\pm(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{\lambda_1^I}}(\dot{c}_{\lambda_1^I}) \times \mathbf{Y}^{\text{GL}_{\lambda_2^I}}(\dot{c}_{\lambda_2^I}) \times \dots \times \mathbf{Y}^{\text{GL}_{\lambda_{r+1}^I}}(\dot{c}_{\lambda_{r+1}^I}))_{\theta_I} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Pour calculer le membre de droite, on explicite les cohomologies $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}^{\text{GL}_j}(\dot{c}_j))_{\theta_j}$ (pour $j = \lambda_1^I, \lambda_2^I, \dots, \lambda_{r+1}^I$), grâce aux résultats du théorème 3.4.3 et à la reformulation 5.2.1, puis on fait le calcul des différents produits tensoriels

1. Remarquons que l'on considère désormais $\mathbf{H}_c^\bullet(\mathbf{Y})$ comme un module gradué avec $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y})$ en degré i .

intervenant dans la formule de Künneth pour obtenir la cohomologie du produit des variétés et donc finalement la somme alternée des cohomologies.

Pour un entier k , la formule de Künneth donne :

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{n,I}}(\dot{c}_{n,I}))_{\theta_I} \right] \\ &= \bigoplus_{k_1 + \dots + k_{r+1} = k} \left[\mathbf{H}_c^{k_1}(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{\lambda_1^I}}(\dot{c}_{\lambda_1^I}))_{\theta_{\lambda_1^I}} \right] \otimes \dots \otimes \left[\mathbf{H}_c^{k_{r+1}}(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{\lambda_{r+1}^I}}(\dot{c}_{\lambda_{r+1}^I}))_{\theta_{\lambda_{r+1}^I}} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Notons que pour $j = \lambda_1^I, \lambda_2^I, \dots, \lambda_{r+1}^I$ la classe $\left[\mathbf{H}_c^{k_1}(\mathbf{Y}^{\text{GL}_j}(\dot{c}_j))_{\theta_j} \right]$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}((\text{GL}_j)^F)$. En regardant en quels degrés chacun des facteurs dans le produit tensoriel à droite s'annulent (par les résultats du théorème 3.4.3), on en déduit que la cohomologie est non nulle seulement en les degrés

$$k = n - (r + 1), n - (r + 1) + 1, \dots, n + e_\theta.$$

On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition 5.2.4. *Soit $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ et I une partie de cardinal r de $\{1, \dots, n-1\}$ satisfaisant $d_\theta | \text{pgcd}(n, I)$. Autrement dit, I est une partie de $\{d_\theta, 2d_\theta, \dots, (e_\theta - 1)d_\theta\}$, de cardinal r . Alors, la partie θ_I -isotypique de la cohomologie de $\mathbf{Y}^{\text{GL}_{n,I}}(\dot{c}_I)$ est non nulle seulement pour les degrés*

$$n - (r + 1), n - (r + 1) + 1, \dots, n + e_\theta.$$

Réécrivons désormais l'équation 5.2.3 explicitement dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}((\text{GL}_{\lambda_1^I})^F) \otimes \dots \otimes \mathcal{R}((\text{GL}_{\lambda_{r+1}^I})^F)$:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{n,I}}(\dot{c}_{n,I}))_{\theta_I} \right] \\ &= h^k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta(k-n+r+1)} \\ & \quad \bigoplus_{k_1 + \dots + k_{r+1} = k} \bigotimes_{i=1}^{r+1} \rho_{\theta_{\lambda_i^I}}^{\text{GL}_{\lambda_i^I}} \left[k_i - (\lambda_i^I - 1) + 1, 1^{\lambda_i^I - 1 + (\lambda_i^I/d_\theta - 1) - k_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

On a utilisé, ici, le paramétrage 3.2.9 et le théorème 3.4.3. Faisons alors les changements d'indices

$$l_i := k_i - \lambda_i^I + \frac{\lambda_i^I}{d_\theta} \quad (i = 1, \dots, r + 1),$$

et l'on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\text{GL}_{n,I}}(\dot{c}_{n,I}))_{\theta_I} \right] \\ &= h^k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta(k-n+r+1)} \\ & \quad \bigoplus_{l_1 + \dots + l_{r+1} = k - n + e_\theta} \bigotimes_{i=1}^{r+1} \rho_{\theta_{\lambda_i^I}}^{\text{GL}_{\lambda_i^I}} \left[l_i - (\lambda_i^I/d_\theta - 1) + 1, 1^{2(\lambda_i^I/d_\theta - 1) - l_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Puis, en appliquant l'induction $R_{\mathrm{GL}_{n,I}}^{\mathrm{GL}_n}$:

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{GL}_{n,I}}^{\mathrm{GL}_n} \left[\mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{n,I}}(\dot{c}_{n,I}))_{\theta_I} \right] \\ = h^k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta(k-n+r+1)} \\ \bigoplus_{l_1+\dots+l_{r+1}=k-n+e_\theta} R_{\mathrm{GL}_{n,I}}^{\mathrm{GL}_n} \bigotimes_{i=1}^{r+1} \rho_{\theta_{\lambda_i}^I, [l_i - (\lambda_i^I/d_\theta - 1) + 1, 1^{2(\lambda_i^I/d_\theta - 1) - l_i}]}^{\mathrm{GL}_{\lambda_i^I}}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Pour calculer ce dernier induit, il suffit de le faire au niveau des représentations des groupes symétriques correspondants, voir la proposition 3.2.9 (notamment pour les notations $\alpha?$ utilisées ci-dessous). Cela signifie que si l'on note pour $\lambda \vdash e_\theta$:

$$\alpha_{I,\lambda} := \left\langle \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^I/d_\theta} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta}}^{\mathfrak{S}_{e_\theta}} \bigotimes_{i=1}^{r+1} \alpha_{[l_i - (\lambda_i^I/d_\theta - 1) + 1, 1^{2(\lambda_i^I/d_\theta - 1) - l_i}]} \right\rangle,$$

alors, dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}((\mathrm{GL}_n)^F)$:

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{GL}_{n,I}}^{\mathrm{GL}_n} \left[\mathbf{H}_c^k(\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_{n,I}}(\dot{c}_{n,I}))_{\theta_I} \right] = h^k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta(k-n+r+1)} \\ \bigoplus_{l_1+\dots+l_{r+1}=k-n+e_\theta} \bigoplus_{\lambda \vdash e_\theta} \alpha_{I,\lambda} \rho_{\theta_I,\lambda}^{\mathrm{GL}_n}. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Ensuite, à partir de l'identification suivante (I étant comme précédemment) :

$$\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{e_\theta, I/d_\theta}}(c_{e_\theta, I/d_\theta}) = \mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{\lambda_1^I/d_\theta}}(c_{\lambda_1^I/d_\theta}) \times \mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{\lambda_2^I/d_\theta}}(c_{\lambda_2^I/d_\theta}) \times \dots \times \mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta}}(c_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta}), \quad (5.2.9)$$

nous appliquons la formule de Künneth pour obtenir dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}((\mathrm{GL}_{\lambda_1^I/d_\theta})^F) \otimes \dots \otimes \mathcal{R}((\mathrm{GL}_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta})^F)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_c^{k-n+e_\theta}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{e_\theta, I/d_\theta}}(c_{e_\theta, I/d_\theta}))] \\ = \bigoplus_{k'_1+\dots+k'_{r+1}=k-n+e_\theta} \left[\mathbf{H}_c^{k'_1}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{\lambda_1^I/d_\theta}}(c_{\lambda_1^I/d_\theta})) \right] \otimes \dots \otimes \left[\mathbf{H}_c^{k'_{r+1}}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta}}(c_{\lambda_{r+1}^I/d_\theta})) \right] \\ = h^{k-n+e_\theta} t^{k-n+r+1} \\ \bigoplus_{k'_1+\dots+k'_{r+1}=k-n+e_\theta} \bigotimes_{i=1}^{r+1} \rho_{[k'_i - (\lambda_i^I/d_\theta - 1) + 1, 1^{2(\lambda_i^I/d_\theta - 1) - k'_i}]}^{\mathrm{GL}_{\lambda_i^I/d_\theta}}. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

On a utilisé le paramétrage donné en 3.2.2 et le théorème 3.2.7. Appliquons ensuite de part et d'autre le foncteur d'induction $R_{\mathrm{GL}_{e_\theta, I/d_\theta}}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}$ et comme précédemment, pour le terme de droite, il suffit de faire le calcul de l'induction au niveau des groupes symétriques. On trouve dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t, h] \otimes \mathcal{R}((\mathrm{GL}_{e_\theta})^F)$:

$$\begin{aligned}
 R_{\mathrm{GL}_{e_\theta, I/d_\theta}}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}} \left[\mathrm{H}_c^{k-n+e_\theta}(\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{e_\theta, I/d_\theta}}(\dot{c}_{e_\theta, I/d_\theta})) \right] \\
 = h^{k-n+e_\theta} t^{k-n+r+1} \bigoplus_{l_1+\dots+l_{r+1}=k-n+e_\theta} \bigoplus_{\lambda \vdash e_\theta} a_{I, \lambda} \rho_\lambda^{\mathrm{GL}_{e_\theta}},
 \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

où les coefficients $a_{I, \lambda}$ sont exactement les mêmes qu'en 5.2.8.

Remarque 5.2.12. On fera attention au fait que les termes de droite des équations 5.2.8 et 5.2.11 ne sont pas de même nature (d'un côté des représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et de l'autre des représentations (unipotentes) de $\mathrm{GL}_{e_\theta}(\mathbb{F}_q)$). En revanche, ces deux membres sont paramétrés par les partitions de e_θ et surtout, les multiplicités $a_{I, \lambda}$ sont les mêmes.

Comme souligné dans la remarque ci-dessus, on dispose d'un paramétrage ainsi que de multiplicités identiques. Cela nous permet de formuler le corollaire suivant reliant la cohomologie des compactifications de \mathbf{X} et de \mathbf{Y} .

Corollaire 5.2.13. Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$. Pour $\lambda \vdash e_\theta$, si, dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t]$, on a :

$$\left\langle \left[\mathrm{H}_c^\pm(\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta})) \right], \rho_\lambda^{\mathrm{GL}_{e_\theta}} \right\rangle = \sum_k b_k t^k,$$

alors, dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[t]$, on a :

$$\left\langle \left[\mathrm{H}_c^\pm(\bar{\mathbf{Y}}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c}_n))_\theta \right], \rho_{\theta, \lambda}^{\mathrm{GL}_n} \right\rangle = \sum_k (-1)^{n-e_\theta} b_k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta k}.$$

Démonstration. On reprend les équations 5.2.8 et 5.2.11 et l'on utilise 5.2.2 pour les relier à la somme alternée de la cohomologie.

Remarquons déjà que lorsque I décrit toutes les parties de $\{d_\theta, 2d_\theta, \dots, (e_\theta - 1)d_\theta\}$, alors I/d_θ décrit toutes les parties de $\{1, \dots, e_\theta - 1\}$.

L'équation 5.2.2 se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \left[\mathrm{H}_c^\pm(\bar{\mathbf{Y}}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{c}_n))_\theta \right] \\
 = \sum_{I \in \mathcal{E}_{d_\theta/n}} \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^{d_\theta \frac{n-e_\theta}{2} + d_\theta(k-n+r+1)} \bigoplus_{l_1+\dots+l_{r+1}=k-n+e_\theta} \bigoplus_{\lambda \vdash e_\theta} a_{I, \lambda} \rho_{\theta, \lambda}^{\mathrm{GL}_n}
 \end{aligned}$$

Comme on dispose également d'une partition :

$$\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta}) = \bigsqcup_{I' \subset \{1, \dots, e_\theta - 1\}} \mathbf{X}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta, I'}),$$

il vient grâce à 5.2.11 :

$$\left[\mathrm{H}_c^\pm(\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta})) \right] = \sum_{I' \subset \{1, \dots, e_\theta - 1\}} \sum_{k \geq 0} (-1)^{k-n+e_\theta} t^{k-n+r+1} \bigoplus_{l_1+\dots+l_{r+1}=k-n+e_\theta} \bigoplus_{\lambda \vdash e_\theta} a_{I', \lambda} \rho_\lambda^{\mathrm{GL}_{e_\theta}}.$$

On en déduit le résultat immédiatement. \square

Ce dernier résultat permet de ramener l'étude la somme alternée de la cohomologie de $\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n)$ à celle des variétés $\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_e}(c_e)$, l'entier e dépendant de la partie θ -isotypique (pour $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$) sur laquelle on travaille.

Enfin, $\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n)$ étant projective et rationnellement lisse, la connaissance de la somme alternée de la cohomologie, et plus précisément la description en tant que \mathbf{G}^F -modules fournit la structure graduée de $H_c^\bullet(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n))$, à condition de connaître les valeurs propres de F . En effet, rappelons le résultat suivant, important dans la démonstration des conjectures de Weil par Deligne :

Proposition 5.2.14. *Soit \mathbf{V} une variété algébrique définie sur \mathbb{F}_q et F le morphisme de Frobenius associé. Si \mathbf{V} est projective, rationnellement lisse, alors les valeurs propres de F sur $H_c^i(\mathbf{V})$ sont des entiers algébriques, dont tous les complexes conjugués ont pour norme $q^{i/2}$.*

Ainsi, si l'on connaît la valeur propre de F agissant sur un \mathbf{G}^F -module irréductible apparaissant dans $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n))$, alors, en regardant la puissance de q , il est possible de dire dans quel groupe de cohomologie ce \mathbf{G}^F -module apparaît. Nous formulons cela sous la forme du théorème :

Théorème 5.2.15. *Soit $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}^{cF})$ et $\lambda \vdash e_\theta$. Avec les paramétrages des propositions 3.2.2 et 3.2.9, considérons les représentations $\rho_\lambda^{\text{GL}_{e_\theta}} \in \mathcal{E}(\text{GL}_{e_\theta}(\mathbb{F}_q), 1)$ et $\rho_{\theta, \lambda}^{\text{GL}_n} \in \mathcal{E}(\text{GL}_n(\mathbb{F}_q), \theta)$.*

Alors : $\rho_\lambda^{\text{GL}_{e_\theta}}$ apparaît dans $H_c^i(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta}))$ si, et seulement, si $\rho_{\theta, \lambda}^{\text{GL}_n}$ apparaît dans $H_c^{d_\theta(n-e_\theta)+2d_\theta i}(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n))_\theta$.

De plus, la multiplicité est conservée :

$$\langle H_c^i(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_{e_\theta}}(c_{e_\theta})), \rho_\lambda^{\text{GL}_{e_\theta}} \rangle = \langle H_c^{d_\theta(n-e_\theta)+2d_\theta i}(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_n}(\dot{c}_n))_\theta, \rho_{\theta, \lambda}^{\text{GL}_n} \rangle.$$

Illustrons ce théorème et le corollaire précédent pour GL_2 , GL_3 et GL_4 .

L'exemple de GL_2

- Considérons le cas $d_\theta = 2, e_\theta = 1$. Remarquons que $n - e_\theta = 1$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = 1 + k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))_\theta$ se ramène à celle de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))$. On a :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))] = \rho_{[1]}^{\text{GL}_1},$$

et l'on en déduit alors par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))_\theta] = -t^1 \rho_{\theta, [1]}^{\text{GL}_2}.$$

- Considérons le cas $d_\theta = 1, e_\theta = 2$. Remarquons que $n - e_\theta = 0$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))_\theta$ se ramène à celle de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_2}(c_2)) = H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_2}(c_2)) + H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_2}(1))$. On a :

$$\begin{aligned} [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_2}(c_2))] &= -\rho_{[1,1]}^{\text{GL}_2} + t^1 \rho_{[2]}^{\text{GL}_2}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_2}(1))] &= \rho_{[1,1]}^{\text{GL}_2} + \rho_{[2]}^{\text{GL}_2}, \end{aligned}$$

la seconde équation provenant de $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2} \alpha_{[1]} = \alpha_{[1,1]} + \alpha_{[2]}$ avec les notations données dans la proposition 3.2.2. On en déduit alors :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_2}(c_2))] = (1 + t^1) \rho_{[2]}^{\text{GL}_2},$$

puis par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))_\theta] = (1 + t^1) \rho_{\theta, [2]}^{\text{GL}_2}.$$

Au final, la description des groupes de cohomologie de la compactification (en tant que \mathbf{G}^F -modules) est résumée par :

$H_c^0(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))$	$\rho_{\theta, [2]}^{\text{GL}_2}$ (avec $d_\theta = 1$)
$H_c^2(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_2}(\dot{c}_2))$	$\rho_{\theta, [2]}^{\text{GL}_2}$ (avec $d_\theta = 1$), $-\rho_{\theta, [1]}^{\text{GL}_2}$ (avec $d_\theta = 2$)

L'exemple de GL_3

- Considérons le cas $d_\theta = 3, e_\theta = 1$. Remarquons que $n - e_\theta = 2$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = 3 + 3k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))_\theta$ se ramène à celle de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))$. On a :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))] = \rho_{[1]}^{\text{GL}_1},$$

et l'on en déduit alors, par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))_\theta] = t^3 \rho_{\theta, [1]}^{\text{GL}_3}.$$

- Considérons le cas $d_\theta = 1, e_\theta = 3$. Remarquons que $n - e_\theta = 0$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))_\theta$ se ramène à celle de

$$H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_3}(c_3)) = H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_3}(c_3)) + 2 \times H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_3}(c_2)) + H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_3}(1)).$$

On a :

$$\begin{aligned} [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_3}(c_3))] &= \rho_{[1^3]}^{\text{GL}_3} - t^1 \rho_{[2,1]}^{\text{GL}_3} + t^2 \rho_{[3]}^{\text{GL}_3}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_3}(c_2))] &= -(\rho_{[1^3]}^{\text{GL}_3} + \rho_{[2,1]}^{\text{GL}_3}) + t^1(\rho_{[2,1]}^{\text{GL}_3} + \rho_{[3]}^{\text{GL}_3}), \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_2}(1))] &= (\rho_{[1^3]}^{\text{GL}_3} + 2\rho_{[2,1]}^{\text{GL}_3} + \rho_{[3]}^{\text{GL}_3}). \end{aligned}$$

Ceci résulte des inductions suivantes : $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_3} \alpha_{[1]} = \alpha_{[1^3]} + 2\alpha_{[2,1]} + \alpha_{[3]}$, $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_3} \alpha_{[1,1]} = \alpha_{[1^3]} + \alpha_{[2,1]}$ et $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_3} \alpha_{[2]} = \alpha_{[2,1]} + \alpha_{[3]}$ (toujours avec les notations données dans la proposition 3.2.2). On en déduit alors :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_3}(c_3))] = t^1 \rho_{[2,1]}^{\text{GL}_3} + (1 + 2t^1 + t^2) \rho_{[3]}^{\text{GL}_3},$$

puis par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))_\theta] = t^1 \rho_{\theta,[2,1]}^{\text{GL}_3} + (1 + 2t^1 + t^2) \rho_{\theta,[3]}^{\text{GL}_3}.$$

Au final, la description des groupes de cohomologie de la compactification (en tant que \mathbf{G}^F -modules) est résumée par :

$H_c^0(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$\rho_{\theta,[3]}^{\text{GL}_3}$ (avec $d_\theta = 3$)
$H_c^2(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$2\rho_{\theta,[3]}^{\text{GL}_3}, \rho_{\theta,[2,1]}^{\text{GL}_3}$ (avec $d_\theta = 3$)
$H_c^4(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$\rho_{\theta,[3]}^{\text{GL}_3}$ (avec $d_\theta = 3$)
$H_c^6(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$\rho_{\theta,[1]}^{\text{GL}_3}$ (avec $d_\theta = 1$)

L'exemple de GL_4

- Considérons le cas $d_\theta = 4, e_\theta = 1$. Remarquons que $n - e_\theta = 3$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = 6 + 4k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta$ se ramène à celle de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))$. On a :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_1}(c_1))] = \rho_{[1]}^{\text{GL}_1},$$

et l'on en déduit alors, par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta] = -t^6 \rho_{\theta,[1]}^{\text{GL}_4}.$$

- Considérons le cas $d_\theta = 2, e_\theta = 2$. Remarquons que $n - e_\theta = 2$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = 2 + 2k.$$

L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta$ se ramène à celle de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_2}(c_2))$ déjà réalisée auparavant. On a :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_2}(c_2))] = (1 + t^1)\rho_{[2]}^{\text{GL}_2},$$

puis par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta] = (1 + t^1)\rho_{\theta, [2]}^{\text{GL}_4}.$$

- Considérons le cas $d_\theta = 1, e_\theta = 4$. Remarquons que $n - e_\theta = 0$ et :

$$d_\theta \frac{n - e_\theta}{2} + d_\theta k = k.$$

Notons $c_4 = stu$ une écriture réduite en produit de réflexions simples. L'étude de $H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta$ se ramène à celle de

$$\begin{aligned} & H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_4}(c_4)) \\ &= H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(stu)) + 2 \times H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(st)) + H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(su)) + 3 \times H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(s)) + H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(1)). \end{aligned}$$

Comme auparavant, en utilisant des formules d'induction sur les groupes symétriques, on obtient après calculs :

$$\begin{aligned} [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(stu))] &= -\rho_{[1^4]}^{\text{GL}_4} + t^1 \rho_{[1^3, 1]}^{\text{GL}_4} - t^2 \rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + t^3 \rho_{[4]}^{\text{GL}_4}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(st))] &= \rho_{[1^4]}^{\text{GL}_4} + (1 - t^1) \rho_{[1^3, 1]}^{\text{GL}_4} + (-t^1) \rho_{[2, 2]}^{\text{GL}_4} + (-t^1 + t^2) \rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + t^2 \rho_{[4]}^{\text{GL}_4}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(su))] &= \rho_{[1^4]}^{\text{GL}_4} + (1 - 2t^1) \rho_{[1^3, 1]}^{\text{GL}_4} + (1 + t^2) \rho_{[2, 2]}^{\text{GL}_4} + (-2t^1 + t^2) \rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + t^2 \rho_{[4]}^{\text{GL}_4}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(s))] &= -\rho_{[1^4]}^{\text{GL}_4} + (-2 + t^1) \rho_{[1^3, 1]}^{\text{GL}_4} + (-1 + t^1) \rho_{[2, 2]}^{\text{GL}_4} + (-1 + 2t^1) \rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + t^1 \rho_{[4]}^{\text{GL}_4}, \\ [H_c^\pm(\mathbf{X}^{\text{GL}_4}(1))] &= \rho_{[1^4]}^{\text{GL}_4} + 3\rho_{[1^3, 1]}^{\text{GL}_4} + 2\rho_{[2, 2]}^{\text{GL}_4} + 3\rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + \rho_{[4]}^{\text{GL}_4}. \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{X}}^{\text{GL}_4}(c_4))] = (t^1 + t^2)\rho_{[2, 2]}^{\text{GL}_4} + 2(t^1 + t^2)\rho_{[3, 1]}^{\text{GL}_4} + (1 + 3t^1 + 3t^2 + t^3)\rho_{[4]}^{\text{GL}_4},$$

puis par le corollaire 5.2.13 et le théorème 5.2.15 :

$$[H_c^\pm(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))_\theta] = (t^1 + t^2)\rho_{\theta, [2, 2]}^{\text{GL}_4} + 2(t^1 + t^2)\rho_{\theta, [3, 1]}^{\text{GL}_4} + (1 + 3t^1 + 3t^2 + t^3)\rho_{\theta, [4]}^{\text{GL}_4}.$$

Au final, la description des groupes de cohomologie de la compactification (en tant que \mathbf{G}^F -modules) est résumée par :

$H_c^0(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))$	$\rho_{\theta,[2]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 2$),	$\rho_{\theta,[4]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 4$)
$H_c^2(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$\rho_{\theta,[2]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 2$),	$\rho_{\theta,[2,2]}^{\text{GL}_4}$, $2\rho_{\theta,[3,1]}^{\text{GL}_4}$, $3\rho_{\theta,[4]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 4$)
$H_c^4(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_3}(\dot{c}_3))$	$\rho_{\theta,[2,2]}^{\text{GL}_4}$, $2\rho_{\theta,[3,1]}^{\text{GL}_4}$, $3\rho_{\theta,[4]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 4$)	
$H_c^6(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))$	$\rho_{\theta,[4]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 4$)	
$H_c^{12}(\overline{\mathbf{Y}}^{\text{GL}_4}(\dot{c}_4))$	$-\rho_{\theta,[1]}^{\text{GL}_4}$ (avec $d_\theta = 1$)	

Chapitre 6

Annexe : Variétés de Deligne-Lusztig dans GL_n et drapeaux

Dans cette annexe, nous obtenons une identification des variétés de Deligne-Lusztig en terme de drapeaux d'espaces vectoriels. Les premières définitions et propositions sont exactement telles qu'énoncées par Digne et Michel dans [21]. Remarquons qu'une telle description avait été faite pour $\mathbf{X}(c)$ par Deligne et Lusztig dans [20].

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{F}_q et $E = V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$.

Définition 6.0.1. On appelle drapeau de E une suite de n sous-espaces, notée $\mathcal{D} = (V_1, \dots, V_n)$ vérifiant

$$\{0\} = V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = E.$$

Pour mettre en évidence un premier lien avec les variétés de Deligne-Lusztig, remarquons que $\mathbf{G} := GL(E)$ agit transitivement sur les drapeaux de E et que le stabilisateur d'un drapeau donné est un sous-groupe de Borel. La variété constituée de l'ensemble des drapeaux de E est donc isomorphe à \mathbf{G}/\mathbf{B} , ou encore à la variété des sous-groupes de Borel de \mathbf{G} .

Définition 6.0.2. Une base d'un drapeau $\mathcal{D} = (V_1, \dots, V_n)$ est la donnée d'une famille (e_1, \dots, e_n) telle que (e_1, \dots, e_i) engendre V_i .

De part ce qui précède la définition ci-dessus, la notion de position relative de sous-groupes de Borel peut être traduite en terme de drapeaux. La proposition suivante donne une façon aisée de manipuler cela.

Proposition 6.0.3. Deux drapeaux \mathcal{D}^1 et \mathcal{D}^2 sont en position relative $w \in W$ si et seulement si il existe une base (e_1, \dots, e_n) de \mathcal{D}^1 telle que $(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$ est une base de \mathcal{D}^2 .

On en déduit alors facilement que la variété $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(w)$ est isomorphe à l'ensemble des drapeaux \mathcal{D} tels que \mathcal{D} et ${}^F\mathcal{D}$ sont en position relative w . Il y a également correspondance entre les actions de \mathbf{G}^F et F sur $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(w)$ et l'action naturelle de \mathbf{G}^F et F sur les drapeaux.

Pour faire le même travail avec la variété \mathbf{Y} , introduisons la donnée supplémentaire suivante.

Définition 6.0.4. *On appelle donnée affine sur un drapeau $\mathcal{D} = (V_1, \dots, V_n)$, un élément $a \in \bigoplus_i V_{i+1}/V_i$ dont aucune composante n'est nulle.*

De même que \mathbf{G} agit transitivement sur la variété des drapeaux, il est clair que \mathbf{G} agit également transitivement sur la variété des drapeaux munis d'une donnée affine. De plus, pour cette action, le stabilisateur d'un drapeau muni d'une donnée affine (\mathcal{D}^0, a^0) est le sous-groupe unipotent \mathbf{U} . Nous pouvons donc identifier la variété des drapeaux munis d'une donnée affine au quotient \mathbf{G}/\mathbf{U} . Contrairement à l'identification de la variété des drapeaux avec \mathbf{G}/\mathbf{B} , cette identification dépend du choix d'un couple (\mathcal{D}^0, a^0) initial.

Définition 6.0.5. *On dit que (e_1, \dots, e_n) est une base du drapeau avec données affines (\mathcal{D}, a) si :*

- (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathcal{D} ,
- l'image de (e_1, \dots, e_n) dans $\bigoplus_i V_{i+1}/V_i$ est égal à a .

Remarquons que deux bases d'un même drapeau avec donnée affine ont toujours un même premier vecteur e_1 . Dans ce qui suit, on fixe une base (e_1^0, \dots, e_n^0) de (\mathcal{D}^0, a^0) , dont chacun des vecteurs est F -stable.

Étendons alors la notion de position relative :

Définition 6.0.6. *On appelle position relative de drapeaux munis de données affines les orbites sous \mathbf{G} de l'ensemble des couples de drapeaux munis de données affines.*

Et cela se traduit de façon plus explicite en terme de bases :

Proposition 6.0.7. *Deux drapeaux munis de données affines (\mathcal{D}^1, a^1) et (\mathcal{D}^2, a^2) sont dits en position relative $\dot{w} \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ si et seulement s'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de (\mathcal{D}^1, a^1) telle que $(\dot{w}(e_1), \dots, \dot{w}(e_n))$ soit une base de (\mathcal{D}^2, a^2) .*

La variété $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(\dot{w})$ est isomorphe à la variété des drapeaux avec une donnée affine (\mathcal{D}, a) tels que (\mathcal{D}, a) et ${}^F(\mathcal{D}, a)$ sont en position relative \dot{w} . Comme pour la variété $\mathbf{X}^{\mathrm{GL}_n}(w)$, les actions de \mathbf{G}^F et F s'identifient facilement ; l'action supplémentaire de \mathbf{T}^{wF} est définie par : $t \cdot (\mathcal{D}, a) := (\mathcal{D}, t^{-1}a)$ où $t^{-1}a = (t_i^{-1}a_i)_i$ si $a = (a_i) \in \bigoplus_i V_{i+1}/V_i$ et si $t \in \mathbf{T}^{wF}$ a pour matrice $\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)$ dans la base (e_1^0, \dots, e_n^0) .

On se restreint ensuite au cas de l'élément de Coxeter de GL_n . Fixons \dot{c} l'élément dont l'action sur la base (e_1^0, \dots, e_n^0) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{c}(e_i^0) = e_{i+1}^0 & \text{si } i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{c}(e_n^0) = (-1)^{n-1} e_1^0. \end{cases}$$

On dispose alors des formes explicites suivantes pour les variétés de Deligne-Lusztig. Ce résultat avait déjà été obtenu par Deligne et Lusztig dans [20].

Proposition 6.0.8. *Sous les hypothèses précédentes :*

1. *La variété $\mathbf{X}^{GL_n}(c)$ est isomorphe à l'ensemble des droites de E qui ne sont contenues dans aucun sous-espace strict défini sur \mathbb{F}_q . L'action de \mathbf{G}^F sur cette variété est la restriction de l'action naturelle de \mathbf{G}^F sur les droites de E .*

2. *La variété $\mathbf{Y}^{GL_n}(c)$ est isomorphe à :*

$$\left\{ e \in E, (\det(e, F(e), \dots, F^{n-1}(e)))^{q-1} = 1 \right\}.$$

L'action de \mathbf{G}^F est donnée par l'action naturelle de \mathbf{G}^F sur E , un élément $t \in \mathbf{T}^{cF}$ agit par $t \cdot e = t^{-1}e$, si l'on identifie \mathbf{T}^{cF} à $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ par la première projection.

Cette description conclut les rappels selon Digne et Michel [21], ou encore de façon initiale Deligne et Lusztig [20], du lien entre les variétés de drapeaux et les variétés de Deligne-Lusztig.

Le résultat suivant de la thèse est une généralisation de cette dernière description.

Notation. On définit la variété Y_a par

$$Y_a = \{ e \in E, (\det(e, F(e), \dots, F^{n-1}(e)))^{q-1} = a \}.$$

On généralise ici une preuve de [21, 3.1]. Soit w la matrice de taille n

$$\text{suivante : } w = \begin{pmatrix} 0 & & & & \xi_n \\ \xi_1 & 0 & & & \\ & \xi_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \xi_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ sont des scalaires quel-}$$

conques.

Proposition 6.0.9. *Il existe une identification naturelle entre les deux objets :*

$$\mathbf{Y}^{GL_n}(w) = Y_{(-1)^{n-1} \xi_1^{q^{n-1}} \xi_2^{q^{n-2}} \dots \xi_{n-1}^q \xi_n}.$$

Démonstration. Soit (\mathcal{D}, a) un drapeau affine de $\mathbf{Y}^{GL_n}(w)$. Par définition, il existe une base $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ de (\mathcal{D}, a) telle que $(\xi_1 \cdot f_2, \dots, \xi_{n-1} \cdot f_n, \xi_n \cdot f_1)$ est une base de ${}^F(\mathcal{D}, a)$. Mais $({}^F f_1, \dots, {}^F f_n)$ est également une autre base de ${}^F(\mathcal{D}, a)$.

On dispose alors des faits suivants :

$$\begin{aligned} - \quad & {}^F f_1 = \xi_1 \cdot f_2 \Leftrightarrow {}^F f_1 - \xi_1 \cdot f_2 = 0, \\ - \quad & {}^F f_2 - \xi_2 \cdot f_3 \in \langle {}^F f_1 \rangle = \langle \xi_1 \cdot f_2 \rangle = \langle f_2 \rangle. \end{aligned}$$

Mais alors :

$$\left. \begin{aligned} & {}^{F^2} f_1 - \xi_1^q \cdot {}^F f_2 = 0 \\ & \xi_1^q \cdot {}^F f_2 - \xi_1^q \xi_2 \cdot f_3 \in \langle f_2 \rangle \end{aligned} \right\} \text{ donne } {}^{F^2} f_1 - \xi_1^q \xi_2 \cdot f_3 \in \langle f_2 \rangle.$$

En suivant le même type de raisonnement, on montre par récurrence que pour $i = 0, \dots, n-1$:

$${}^{F^i} f_1 - \xi_1^{q^{i-1}} \xi_2^{q^{i-2}} \cdots \xi_i \cdot f_{i+1} \in \langle f_2, \dots, f_i \rangle.$$

On en déduit que $\left(\frac{1}{\xi_1^{q^{i-1}} \cdots \xi_i} \cdot {}^{F^i} f_1 \right)_{i=0, \dots, n-1}$ est une base du drapeau avec donnée affine (\mathcal{D}, a) , et donc $\left(\frac{1}{\xi_1^{q^i} \cdots \xi_i} \cdot {}^{F^{i+1}} f_1 \right)_{i=0, \dots, n-1}$ est une base de ${}^F(\mathcal{D}, a)$. Or $(\xi_1 \cdot f_2, \dots, \xi_{n-1} \cdot f_n, \xi_n \cdot f_1)$ est une autre base de ${}^F(\mathcal{D}, a)$, d'où en comparant les derniers éléments des familles :

$$\frac{1}{\xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_{n-1}} \cdot {}^{F^n} f_1 - \xi_n \cdot f_1 \in \langle f_2, \dots, f_n \rangle.$$

Réciproquement, soit $e \in E$ tel que $\frac{1}{\xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_{n-1}} \cdot {}^{F^n} e - \xi_n \cdot e \in \langle {}^F e, {}^{F^2} e, \dots, {}^{F^{n-1}} e \rangle$.

Il est facile de montrer que

$$\mathcal{B} := \left(e, \frac{1}{\xi_1} \cdot {}^F e, \frac{1}{\xi_1^q \xi_2} \cdot {}^{F^2} e, \dots, \frac{1}{\xi_1^{q^{n-2}} \cdots \xi_{n-1}} \cdot {}^{F^{n-1}} e \right)$$

est une base d'un drapeau avec donnée affine de $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(w)$. En effet,

$$\begin{aligned} {}^F \mathcal{B} &= {}^F \left(e, \frac{1}{\xi_1} \cdot {}^F e, \dots, \frac{1}{\xi_1^{q^{n-2}} \cdots \xi_{n-1}} \cdot {}^{F^{n-1}} e \right) = \left({}^F e, \frac{1}{\xi_1} \cdot {}^{F^2} e, \dots, \frac{1}{\xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_{n-1}} \cdot {}^{F^n} e \right) \\ &= \left(\xi_1 \left(\frac{1}{\xi_1} \cdot {}^F e \right), \xi_2 \left(\frac{1}{\xi_1^q \xi_2} \cdot {}^{F^2} e \right), \dots, \xi_n \cdot {}^{F^n} e \right), \end{aligned}$$

ainsi, \mathcal{B} et ${}^F \mathcal{B}$ sont en position relative w .

On a donc montré que $\mathbf{Y}^{\mathrm{GL}_n}(w)$ est identifié avec l'ensemble des éléments $e \in E$ tels que :

$$\begin{aligned} \det \left({}^F e, {}^{F^2} e, \dots, \frac{1}{\xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_n} \cdot {}^{F^n} e - e \right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_n} \det [{}^F e] = \det \left({}^F e, {}^{F^2} e, \dots, {}^{F^{n-1}} e, e \right) \\ &\Leftrightarrow \det [{}^F e] = \xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_n \cdot (-1)^{n-1} \det[e] \\ &\Leftrightarrow (\det[e])^{q-1} = (-1)^{n-1} \xi_1^{q^{n-1}} \cdots \xi_n. \end{aligned}$$

□

- Remarque 6.0.10.** — Si $\xi_1 = \dots = \xi_n = 1$, alors on obtient $Y_{(-1)^{n-1}}$. Cela correspond au relèvement naturel du cycle $(1, \dots, n)$ par la matrice de permutation. C'est le résultat exprimé par Deligne et Lusztig dans [20].
- Si $\xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = 1$ et $\xi_n = (-1)^{n-1}$, on obtient Y_1 et on retrouve le résultat énoncé par Digne et Michel.
 - Si $\xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = -1$ et $\xi_n = (-1)^n$, on obtient $Y_{(-1)^n}$.
 - En utilisant un argument développé par Wang en [49, 4.2.8], on peut retrouver le calcul des valeurs propres de F^n effectué à la fin de 2.2.3.

Index des notations

<p> B, 5 $C_G(\theta)$, 32 $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\Gamma\text{-mod})$, 6 E_d, 71 F, 5 $I_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, 28 N_w, 6 $N_{F^\eta/wF}$, 6 $N_{\mathbf{G}^{cF}}(\mathbf{T})$, 68 $P_{k,l}$, 72 $Q(\varphi, E_{\delta_1}, \dots, E_{\delta_r})$, 77 Q^{lag}, 78 R_χ, 20, 35 S, 5 W, 5 $W(\theta)$, 39 $W(s)$, 39 $X(\mathbf{T})$, 5 $Y(\mathbf{T})$, 5 $Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}$, 28 $[-]_\Gamma$, 6 $[\Delta/\phi]$, 5 \mathbf{B}, 5, 31 Δ, 5 Δ^\vee, 5 \mathbb{F}, 5 \mathbf{G}, 5, 31 \mathbf{G}_α, 5 $H_c^\bullet(\mathbf{X})$, 6 H_c^i, 6 $H_c^i(\mathbf{X})$, 6 $H_c^i(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, 6 $H_c^i(\mathbf{X}^G(c))[M_0]$, 27 $H_c^\pm(\mathbf{X})$, 6 </p>	<p> $\text{Irr}(G)$, 7 Φ, 5 Φ^\vee, 5 \mathbf{R}_n, 15 $\mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{X})$, 6 $\mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, 6 \mathbf{T}, 5, 31 \mathbf{U}, 5, 31 \mathbf{U}_α, 5 $\mathbf{X}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{w})$, 13 $\mathbf{Y}^{\mathbf{G},F}(\mathbf{n})$, 13 $\mathbf{Y}_{I,v}$, 18 $\mathbf{Y}_\mathbf{v}^{\mathbf{G}}$, 18 $\alpha_{i,j}$, 31 $\alpha_{i,j}^\vee$, 31 $\mu_{q^n-1}^{(d_\theta)}$, 71 δ, 5 \dot{c}_0^{Lu}, 50 \dot{c}_n^u, 54 \dot{w}^{coh}, 54 ℓ, 5 η, 5 $\gamma_{\theta,i}$, 65 λ_I, 87 $\tilde{\mathbf{e}}(r,l)$, 74 $\mathbf{e}(q,d)$, 72 \mathbf{e}_θ, 22 \mathbf{w}_I, 29 \mathcal{A}, 65 $\mathcal{A}_{r,n}$, 73 $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$, 16 $\mathcal{R}(\Gamma)$, 6 \mathcal{R}_n, 15 $\mathcal{R}_{I,v}$, 18 </p>
---	---

$\mathcal{R}_{\mathbf{LCP}}$, 19	a_λ , 36
$v_{\theta,i}$, 66	c , 24
$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$, 28	c_0 , 50
$\bar{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{w}})$, 28	c_I , 83
ϕ , 5	c_n , 31
\preceq , 6, 28	$c_{[i,j]}$, 42
$\mathbb{Q}_{\ell,\theta}$, 22	d_θ , 31
ρ_λ , 36	e_θ , 31
$\rho_\lambda^{\mathbf{G}}$, 36	p_1 , 32
$\rho_{\theta,\lambda}$, 40	p_I , 85
$\rho_{\theta,\lambda}^{\mathbf{G}}$, 40	r_I , 29
$\text{Part}(n)$, 35	s_i , 31
ev , 74	v_θ , 33
θ_I , 30	$x_{n,e}$, 42

Bibliographie

- [1] J.L. Alperin, *The main problem of block theory*, Proceedings of the Conference of Finite Groups (1976).
- [2] ———, *Weights for finite groups*, Proc. Symp. Pure Math. (1987).
- [3] T.R. Berger and R. Knörr, *On Brauer's height 0 conjecture*, Nagoya Math. J. (1988).
- [4] C. Bonnafé, *Representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$* , Springer, 2010.
- [5] C. Bonnafé and R. Rouquier, *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. de l'IHÉS **97** (2003), 1–59.
- [6] ———, *Coxeter orbits and modular representations*, Nagoya Math. J. **183** (2006), 1–34.
- [7] ———, *Compactification des variétés de Deligne-Lusztig*, Ann. de l'Inst. Fourier **59** (2009), 621–640.
- [8] C. Bonnafé, R. Rouquier, and J.-F. Dat, *Derived categories and Deligne-Lusztig varieties II*, En préparation.
- [9] R. Brauer, *Number theoretical investigations on groups of finite order*, Proc. Int. Symp. on Algebraical Number Theory (1955).
- [10] M. Broué, *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Publ. IHES (1990).
- [11] M. Broué and G. Malle, *Zyklotomische Heckealgebren*, Astérisque (1993).
- [12] M. Broué and J. Michel, *Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées*, Progress in Math. (1996).
- [13] M. Cabanes and M. Enguehard, *Representation theory of finite reductive groups*, CUP, 2004.
- [14] R.W. Carter, *Finite Groups of Lie Type*, Wiley Classics Library, 1993.
- [15] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti, and F. Tolli, *Representation theory and harmonic analysis of wreath products of finite groups*, CUP, 2014.
- [16] J. Chuang and R. Rouquier, *Derived equivalences for symmetric groups and \mathfrak{sl}_2 -categorification*, Ann. of Math. (2) (2008).
- [17] C.W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, 1962.

- [18] ———, *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders, vol. II*, Interscience, 1987.
- [19] E.C. Dade, *A correspondance of characters*, The Santa Cruz Conf. on Finite Groups (1979).
- [20] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103(1)** (1976), 103–161.
- [21] F. Digne and J. Michel, *Fonctions \mathcal{L} des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani*, Bull. S.M.F, mémoires **20** (1985), 1–144.
- [22] ———, *Representations of finite groups of Lie type*, LMS student texts, 1991.
- [23] ———, *Endomorphisms of Deligne-Lusztig varieties*, Nagoya Math. J. **183** (2006), 35–103.
- [24] ———, *Parabolic Deligne-Lusztig varieties*, Adv. Math. (2014).
- [25] F. Digne, J. Michel, and R. Rouquier, *Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig*, Adv. Math. **209(2)** (2007), 749–822.
- [26] O. Dudas, *Géométrie des variétés de Deligne-Lusztig, décompositions, cohomologie modulo ℓ et représentations modulaires*, Ph.D. thesis, Université de Franche-Comté, Besançon, 2010.
- [27] ———, *Coxeter orbits and Brauer trees*, Adv. Math. (2012).
- [28] ———, *Cohomology of Deligne-Lusztig varieties for unipotent blocks of $GL_n(q)$* , Representation Theory (2013).
- [29] ———, *Coxeter orbits and Brauer trees II*, arXiv (2013).
- [30] M. Geck and G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, LMS, 2000.
- [31] M.E. Harris and M. Linckelmann, *Splendid derived equivalences for blocks of finite ℓ -solvable groups*, J. London Math. (2000).
- [32] B. Huppert, *Character Theory of Finite Groups*, Walter de Gruyter, 1998.
- [33] I.M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, 1976.
- [34] G.D. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Springer, 1978.
- [35] R. Kessar and G. Malle, *Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture*, Annals of Math. (2013).
- [36] M. Linckelmann, *Derived equivalence for cyclic blocks over a p -adic ring*, Math. Z. **207** (1991), no. 2.
- [37] G. Lusztig, *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius*, Invent. Math. **38(2)** (1976), 101–159.
- [38] ———, *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Inventiones (1976).

-
- [39] ———, *Characters of reductive groups over a finite field*, Princeton University Press, 1984.
- [40] ———, *Character Sheaves IV*, Adv. Math. (1986).
- [41] ———, *Green functions and character sheaves*, Annals of Math. **131(2)** (1990), 355–408.
- [42] G. Lusztig and B. Srinivasan, *The characters of the finite unitary groups*, J. Algebra (1977).
- [43] J. McKay, *A new invariant for simple groups*, Notices Amer. Math. Soc. (1971).
- [44] ———, *Irreducible representations of odd degree*, J. Algebra (1972).
- [45] L. Puig, *Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley*, Astérisque **181-182** (1990).
- [46] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3.
- [47] R. Rouquier, *The derived category of blocks with cyclic defect groups*, Lecture Notes in Math. (1998).
- [48] T.A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups.*, Invent. Math. 25 (1974).
- [49] H. Wang, *Géométrie et cohomologie de l'espace de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, PhD Thesis (2013).