Journal of Algebra 211, 57–98 (1999)
Article ID jabr.1998.7564, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Produit en Couronne de Groupes Linéaires

Cédric Bonnafé

Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637

Communicated by Michel Broué

Received January 8, 1998

We provide a description of unipotent characters of a wreath product of general linear groups over a finite field as linear combination of generalized Deligne–Lusztig characters. © 1999 Academic Press

Nous donnons une description des caractères unipotents d'un produit en couronne de groupes linéaires sur un corps fini comme combinaison linéaire de caractères de Deligne–Lusztig généralisés. © 1999 Academic Press

INTRODUCTION

Soit $\mathbf{G}^\circ = \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})^d$, où $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique d'un corps fini et n et d sont deux entiers naturels non nuls. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit par permutation des composantes de $\mathbf{G}^\circ$ et on note $\mathbf{G}$ le produit semi-direct $\mathbf{G}^\circ \rtimes \mathfrak{S}_d$. Alors $\mathbf{G}$ est un groupe réductif non connexe. On le munit d'un endomorphisme de Frobenius $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, dont la restriction à $\mathbf{G}^\circ$ est la composition d'un automorphisme induit par un élément de $\mathfrak{S}_d$ et de l'endomorphisme de Frobenius déployé naturel. Le but de cet article est de décrire les caractères unipotents du groupe fini $\mathbf{G}^F$.

On obtient un paramétrage de ces caractères unipotents par les caractères irréductibles de W^F, où W est le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ (cf. Eq. (7.4.3)). On établit aussi que tous les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne–Lusztig généralisés (cf. [DM2]): c'est le théorème 7.3.2. Cette description permet de calculer les foncteurs d'induction de Lusztig (cf. théorème 7.6.1). Au cours de la preuve du théorème 7.3.2, on fait le lien entre ces résultats et la descente de Shintani des caractères du groupe général linéaire sur un corps fini en adoptant le point de vue de Digne [D] (cf. théorème 8.3.3).

Dans les sections 2 et 3, on rappellera les résultats classiques sur les représentations de produits en couronne de groupes finis. Dans la section

0021-8693/99 $30.00

5, on géneralisera les résultats de [DM2] sur les groupes de points fixes d'un automorphisme quasi-central dans un groupe réductif connexe quelconque. La section 6 est consacrée au rappel des résultats de [DM2], énoncés toutefois dans un cadre un peu plus général, sur les foncteurs de Lusztig dans les groupes réductifs non connexes. Dans la section 7, on s'intéressera aux groupes $\mathbf{G}$ décrits ci-dessus: on y énoncera le théorème 7.3.2 et on y établira quelques-unes de ses conséquences (paramétrage des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ (cf. Eq. (7.4.3)) et le théorème 7.6.1 qui décrit l'induction de Lusztig des caractères unipotents). La dernière section 8 sera consacrée à la preuve du théorème 7.3.2. Cette preuve repose sur les mêmes arguments que ceux de Lusztig et Srinivasan dans [LS], où sont décrits les caractères unipotents du groupe général linéaire sur un corps fini. La généralisation s'obtient en utilisant constamment les résultats de Digne et Michel sur les foncteurs de Lusztig dans les groupes non connexes [DM2].

1. NOTATIONS

1.1. *Corps.* Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$. On se fixe une puissance q de p et on notera $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q éléments. Toutes les variétés et tous les groupes algébriques seront considérés sur $\mathbb{F}$.

On se fixe d'autre part un nombre premier l différent de p et on notera $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique du corps l-adique $\mathbb{Q}_l$. On choisit aussi une fois pour toutes un automorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_l \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, $x \mapsto \bar{x}$, tel que $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$ pour toute racine de l'unité ζ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Si V est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie, on notera $V^\wedge$ son dual $\operatorname{Hom}(V, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Si $\mathbf{X}$ est une variété, on notera, pour tout entier naturel i, $H_c^i(\mathbf{X})$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $H_c^i(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

1.2. *Groupes finis.* Si G est un groupe fini, on notera $\operatorname{Irr} G$ l'ensemble des caractères irréductibles de G (sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$) et $\mathscr{C}(G)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel des fonctions centrales $G \to \overline{\mathbb{Q}}_l$. On notera $\mathbb{Z} \operatorname{Irr} G$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathscr{C}(G)$ engendré par le caractères irréductibles de G (on a $\mathscr{C}(G) = \overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \operatorname{Irr} G$).

On appellera G-module un $\overline{\mathbb{Q}}_l G$-module à gauche de dimension finie. Si H est un autre groupe fini, on appellera G-module-H un $\overline{\mathbb{Q}}_l G$-$\overline{\mathbb{Q}}_l H$-bimodule de dimension finie (sur lequel G agit à gauche et H à droite). On notera $\mathscr{K} G$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des G-modules ($\mathscr{K} G$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z} \operatorname{Irr} G$).

Si γ et γ' sont deux fonctions centrales sur G, on notera

$$\langle \gamma, \gamma' \rangle_G = \langle \gamma, \gamma' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \gamma(g)\overline{\gamma'(g)}.$$

Alors $\langle\ ,\ \rangle_G$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}(G)$ pour lequel $\operatorname{Irr} G$ est une base orthonormale.

Pour finir, on notera $\operatorname{Cl}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.

2. PRODUITS EN COURONNE

On va rappeler ici quelques résultats sur les représentations de produits en couronne de groupes finis, ce qui permettra de fixer quelques notations. Si E est un ensemble fini, on notera $\mathfrak{S}_E$ le groupe des permutations de l'ensemble E. Si H est un groupe, on notera H^E le groupe des familles $(h_x)_{x \in E}$ d'éléments de H muni du produit naturel. Si d est un entier naturel non nul, on notera $\mathfrak{S}_d$ le groupe des permutations de l'ensemble $I_d = \{1, \dots, d\}$.

2.1. *Notations.* Soit r un entier naturel non nul. On se fixe des entiers naturels non nuls $d_1, \dots, d_r$ ainsi que des groupes finis $G_1, \dots, G_r$. On notera G le groupe fini:

$$G = \prod_{i=1}^{r} \underbrace{(G_i \times \cdots \times G_i)}_{d_i \text{ fois}}$$

On se fixe aussi un groupe fini A ainsi qu'un morphisme de groupes φ: $A \to \mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$, $\alpha \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Le groupe A agit sur le groupe G de la manière suivante: pour tout $\alpha \in A$ et pour tout $(g_{i1}, \dots, g_{id_i})_{1 \le i \le r} \in G$, on pose

$${}^{\alpha}(g_{i1}, \dots, g_{id_i})_{1 \le i \le r} = (g_{i\alpha_i^{-1}(1)}, \dots, g_{i\alpha_i^{-1}(i)})_{1 \le i \le r}.$$

On notera $\tilde{G}$ le produit semi-direct $G \rtimes A$.

2.2. *Classes de α-conjugaison.* On se fixe un élément $\alpha \in A$. Deux éléments g et g' de G sont dits *α-conjugés* s'il existe x dans G tel que $g' = x^{-1} g \alpha(x)$. On notera $H^1(\alpha, G)$ l'ensemble des classes de α-conjugaison de G.

Pour tout $1 \le i \le r$, on notera Ω_α^i l'ensemble des orbites de α_i dans I_{d_i}. Le groupe G^α sera identifié avec le groupe

$$G^\alpha \simeq \prod_{i=1}^{r} G_i^{\Omega_\alpha^i}.$$

Soit $\omega \in \Omega_\alpha^i$ et soit $j \in \omega$. On pose, pour tout $g = (g_{i1}, \ldots, g_{id_i})_{1 \le i \le r} \in G$,

$$\pi_{\omega,\alpha}^{i}(g) = g_{i\alpha_i^{l-1}(j)} \cdots g_{i\alpha_i(j)} g_{ij},$$

où $l = |\omega|$. On pose alors

$$\pi_\alpha(g) = \pi_\alpha^G(g) = \left(\pi_{\omega,\alpha}^i(g)\right)_{\substack{1 \le i \le r \\ \omega \in \Omega_\alpha^i}} \in G^\alpha.$$

L'application $\pi_\alpha \colon G \to G^\alpha$ n'est pas définie de manière unique car elle dépend du choix d'un représentant dans chaque orbite de α. Cependant, on a le lemme suivant.

LEMME 2.2.1. *L'application $\pi_\alpha \colon G \to G^\alpha$ est surjective et a toutes ses fibres de cardinal $|G|/|G^\alpha|$. De plus, elle induit une bijection, toujours notée $\pi_\alpha \colon H^1(\alpha, G) \to \mathrm{Cl}(G^\alpha)$. Cette bijection ne dépend pas du choix d'un représentant dans chaque orbite de α.*

Soit maintenant un caractère irréductible χ de G, invariant sous α. Il existe des caractères irréductibles $\chi_{i1}, \ldots, \chi_{id_i}$ de G_i $(1 \le i \le r)$ tels que

$$\chi = \bigotimes_{i=1} \left(\chi_{i1} \otimes \cdots \otimes \chi_{id_i}\right).$$

Soient j et j' deux éléments de I_{d_i}. Si j et j' sont dans la même orbite sous l'action de α_i, alors $\chi_{ij} = \chi_{ij'}$. On pose alors

$$\chi_\alpha = \bigotimes_{i=1}^{r} \left(\bigotimes_{\omega \in \Omega_\alpha^i} \chi_{ij_\omega} \right) \in \mathrm{Irr}\, G^\alpha,$$

où, pour tout $\omega \in \Omega_\alpha^i$, j_ω est un élément de ω $(1 \le i \le r)$. On a alors le lemme suivant.

LEMME 2.2.2. *L'application*

$$(\mathrm{Irr}\, G)^\alpha \to \mathrm{Irr}\, G^\alpha,$$
$$\chi \mapsto \chi_\alpha,$$

est bijective.

Soient α et β deux éléments de A qui commutent. Alors β stabilise G^α et, puisque β permute les orbites de α, β agit sur G^α par permutations des composantes. En particulier, on a une bijection $(\mathrm{Irr}\ G^\alpha)^\beta \to \mathrm{Irr}((G^\alpha)^\beta)$. D'autre part, si χ est un caractère irréductible de G invariant sous α et β, alors β stabilise $\chi_\alpha \in \mathrm{Irr}\ G^\alpha$.

Si on note $G^{\alpha,\beta}$ le sous-groupe de G formé des éléments invariants à la fois sous α et β et si on note $(\mathrm{Irr}\ G)^{\alpha,\beta}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G invariant à la fois sous α et β, on peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{Irr} G)^{\alpha,\beta} \arrow[r] \arrow[d] & (\operatorname{Irr} G^{\alpha})^{\beta} \arrow[d] \\
(\operatorname{Irr} G^{\beta})^{\alpha} \arrow[r] & \operatorname{Irr}(G^{\alpha,\beta}).
\end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

LEMME 2.2.4. *Le diagramme* 2.2.3 *est commutatif.*

2.3. *Extension canonique d'une représentation irréductible de* G. On se fixe une représentation irréductible $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, où V est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie. On notera χ son caractère. On notera $\tilde{G}(\chi)$ le stabilisateur, dans $\tilde{G}$, du caractère χ. On notera aussi $A(\chi)$ le stabilisateur, dans A, du caractère χ, de sorte que

$$\tilde{G}(\chi) = G \rtimes A(\chi).$$

PROPOSITION 2.3.1. *Il existe une représentation et une seule* $\tilde{\rho}\colon \tilde{G}(\chi) \to \mathbf{GL}(V)$ *vérifiant les deux conditions suivantes* (*on note* $\tilde{\chi}$ *le caractère de* $\tilde{\rho}$):

(a) *La restriction de* $\tilde{\rho}$ *à* G *est* ρ,

(b) *Pour tout* $\alpha \in A(\chi)$, $\tilde{\chi}(\alpha)$ *est un entier naturel non nul.*

On a alors, pour tous $g \in G$ *et* $\alpha \in A(\chi)$.

$$\tilde{\chi}(g\alpha) = \chi_{\alpha}(\pi_{\alpha}(g)). \tag{2.3.2}$$

Preuve. Si $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$ sont deux représentations $\tilde{G}(\chi) \to \mathbf{GL}(V)$ vérifiant les conditions (a) et (b) de la proposition 2.3.1, alors d'après (a), il existe un caractère linéaire ξ de $A(\chi)$ tel que, pour tout $\alpha \in A$, on ait

$$\tilde{\rho}'(\alpha) = \xi(\alpha)\tilde{\rho}(\alpha).$$

La condition (b) implique que $\xi(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in A(\chi)$ et donc $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho}$. Cela montre l'unicité de $\tilde{\rho}$.

On va maintenant montrer l'existence. Pour cela, quitte à décomposer en produits de groupes finis, on peut supposer que $r = 1$, que $A = \mathfrak{S}_{d_1}$ et que χ est invariant sous $\mathfrak{S}_{d_1}$. Il existe donc un caractère irréductible χ_1 de G_1 tel que

$$\chi = \underbrace{\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_1}_{d_1 \text{ fois}}.$$

On note $\rho_1\colon G_1 \to \mathbf{GL}(V_1)$ une représentation irréductible de G_1 ayant pour caractère χ_1. On peut alors supposer que $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$ et que $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1$ (d_1 fois).

On pose, pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_{d_1}$ et pour tous $v_1, \ldots, v_{d_1}$ dans V_1,

$$\tilde{\rho}(\alpha)\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{d_1}\right) = v_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha^{-1}(d_1)}$$

ce qui définit un automorphisme $\tilde{\rho}(\alpha)$ de V. On pose alors, pour tous $\alpha \in \mathfrak{S}_{d_1}$ et $g \in G$,

$$\tilde{\rho}(g\alpha) = \rho(g)\tilde{\rho}(\alpha).$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\rho}$: $\tilde{G} \to \mathbf{GL}(V)$ est une représentation de $\tilde{G}$, que sa restriction à G est égale à ρ et c'est un exercice facile d'algèbre linéaire de vérifier Eq. (2.3.2). On a alors, pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_{d_1}$, $\tilde{\chi}(\alpha) = \chi_\alpha(1)$, ce qui montre que $\tilde{\rho}$ vérifie aussi (b). ∎

DÉFINITION 2.3.3. La représentation $\tilde{\rho}$ de $\tilde{G}(\chi)$ construite comme précédemment sera appelée l'*extension canonique* de ρ. On dira aussi que $\tilde{\chi}$ est l'*extension canonique* de χ à $\tilde{G}(\chi)$.

Soit $\alpha \in A$. Si γ et γ' sont deux fonctions sur $G\alpha$ invariantes par conjugaison sous G, on posera

$$\langle \gamma, \gamma' \rangle_{G\alpha} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \gamma(g\alpha)\overline{\gamma'(g\alpha)}.$$

2.4. *Paramétrage des caractères irréductibles de $\tilde{G}$.* D'après la proposition 2.3.1, tout caractère irréductible de G admet une extension à son groupe d'inertie. La théorie de Clifford dans ce cadre-là s'en trouve considérablement simplifiée.

On notera $\mathscr{I}(G, A)$ l'ensemble des couples (χ, ξ) où χ est un caractère irréductible de G et ξ est un caractère irréductible de $A(\chi)$. Si $(\chi, \xi) \in \mathscr{I}(G, A)$ et si $\alpha \in A$, alors $({}^\alpha\chi, {}^\alpha\xi) \in \mathscr{I}(G, A)$ car ${}^\alpha\xi$ est un caractère irréductible de ${}^\alpha A(\chi) = A({}^\alpha\chi)$. Cela définit une action du groupe A sur l'ensemble $\mathscr{I}(G, A)$. On notera $\overline{\mathscr{I}}(G, A)$ l'ensemble des orbites de A dans $\mathscr{I}(G, A)$. Si $(\chi, \xi) \in \mathscr{I}(G, A)$, on notera $\chi * \xi$ l'orbite de (χ, ξ) sous A. On pose

$$\Gamma_{\chi * \xi} = \Gamma^{\tilde{G}}_{\chi * \xi} = \operatorname{Ind}_{\tilde{G}(\chi)}^{\tilde{G}}(\tilde{\chi} \otimes \xi). \tag{2.4.1}$$

Le caractère $\Gamma_{\chi * \xi}$ de $\tilde{G}$ ne dépend effectivement que de l'orbite de (χ, ξ) sous A. De plus $\Gamma_{\chi * \xi}$ est un caractère irréductible de $\tilde{G}$ et

$$\operatorname{Ind}_G^{\tilde{G}} \chi = \sum_{\xi \in \operatorname{Irr} A(\chi)} \xi(1)\Gamma_{\chi * \xi}. \tag{2.4.2}$$

D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} \bar{\mathscr{I}}(G, A) &\to \operatorname{Irr} \tilde{G} \\ \chi * \xi &\mapsto \Gamma_{\chi * \xi} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

est bijective.

2.5. *Transformation de Mellin.* On notera $\mathscr{I}^{\vee}(G, A)$ l'ensemble des couples (χ, α) où χ est un caractère irréductible de G et α appartient à $A(\chi)$. Si $(\chi, \alpha) \in \mathscr{I}^{\vee}(G, A)$ et si $\beta \in A$, alors $({}^{\beta}\chi, {}^{\beta}\alpha) \in \mathscr{I}^{\vee}(G, A)$ car ${}^{\beta}\alpha$ appartient à ${}^{\beta}A(\chi) = A({}^{\beta}\chi)$. Cela définit une action de A sur $\mathscr{I}^{\vee}(G, A)$. On notera $\bar{\mathscr{I}}^{\vee}(G, A)$ l'ensemble des orbites de A dans $\mathscr{I}^{\vee}(G, A)$. Si $(\chi, \alpha) \in \mathscr{I}^{\vee}(G, A)$, on notera $\chi * \alpha$ l'orbite de (χ, α) sous A.

On posera alors, pour tout $\chi * \alpha$ dans $\bar{\mathscr{I}}^{\vee}(G, A)$,

$$\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha} = \hat{\Gamma}^{\tilde{G}}_{\chi * \alpha} = \sum_{\xi \in \operatorname{Irr} A(\chi)} \overline{\xi(\alpha)} \Gamma_{\chi * \xi}. \tag{2.5.1}$$

On remarque encore que $\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}$ ne dépend que de l'orbite sous A de (χ, α) dans $\mathscr{I}^{\vee}(G, A)$.

LEMME 2.5.2. (a) *Soit* $\chi * \xi \in \bar{\mathscr{I}}(G, A)$. *Alors*

$$\Gamma_{\chi * \xi} = \frac{1}{|A(\chi)|} \sum_{\alpha \in A(\chi)} \xi(\alpha) \hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}.$$

(b) $(\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha})_{\chi * \alpha \in \bar{\mathscr{I}}^{\vee}(G, A)}$ *est une base orthogonale de* $\mathscr{C}(\tilde{G})$. *On a, pour tout* $\chi * \alpha \in \bar{\mathscr{I}}^{\vee}(G, A)$,

$$\langle \hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}, \hat{\Gamma}_{\chi * \alpha} \rangle_{\tilde{G}} = |C_{A(\chi)}(\alpha)|.$$

(c) *On suppose* A **abélien**. *Soit* $\chi * \alpha \in \bar{\mathscr{I}}^{\vee}(G, A)$ *et soient* $g \in G$ *et* $\beta \in A$. *Alors*

$$\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}(g\beta) = \begin{cases} |A(\chi)| \Gamma_{\chi * 1}(g\beta), & \textit{si } \alpha = \beta, \\ 0, & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Preuve. Le (a) est clair et le (b) résulte immédiatement du (a).

Montrons le (c). On suppose donc A abélien. Si β n'appartient pas à $A(\chi)$, alors $\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}(g\beta) = 0$. On peut donc supposer que β appartient à $A(\chi)$. Puisque A est abélien, on a, pour tout caractère irréductible ξ de $A(\chi)$,

$$\Gamma_{\chi * \xi}(g\beta) = \xi(\beta) \Gamma_{\chi * 1}(g\beta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}(g\beta) &= \sum_{\xi \in \operatorname{Irr} A(\chi)} \overline{\xi(\alpha)}\xi(\beta)\Gamma_{\chi * 1}(g\beta) \\ &= \begin{cases} |A(\chi)|\Gamma_{\chi * 1}(g\beta), & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

∎

3. INDUCTION TORDUE ET PRODUITS EN COURONNES

3.1. *Induction tordue.* On se fixe un groupe fini H et un sous-groupe K de H. Soit ϕ un automorphisme de H. Soit x un élément de H tel que $x\phi \in H \rtimes \langle \phi \rangle$ normalise K. Si χ est une fonction sur $Kx\phi$ invariante par conjugaison sous K (à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$), on notera $\operatorname{Ind}_{Kx\phi}^{H\phi} \chi$ la fonction sur $H\phi$ définie par

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{Ind}_{Kx\phi}^{H\phi} \chi\right)(h\phi) &= \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{y \in H \\ {}^{y^{-1}}(h\phi) \in Kx\phi}} \chi\left({}^{y^{-1}}(h\phi)\right) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{y \in H \\ y^{-1}h\phi(y) \in Kx}} \chi(y^{-1}h\phi(y)\phi).\end{aligned}$$

Soient $E(K, x\phi)$ et $E(H, \phi)$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels et soit R_K^H: $E(K, x\phi) \to E(H, \phi)$ une application linéaire. On suppose donnée deux applications

$$\begin{aligned} H &\to E(H, \phi) \\ h &\mapsto \rho_h^H \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K &\to E(K, x\phi) \\ k &\mapsto \rho_k^K, \end{aligned}$$

telles que $\rho_h^H = \rho_{h'}^H$ (respectivement $\rho_k^K = \rho_{k'}^K$) si $h\phi$ et $h'\phi$ (respectivement $kx\phi$ et $k'x\phi$) sont conjugués sous H (respectivement K) et telles que, pour tout $k \in K$, on ait

$$R_K^H \rho_k^K = \rho_{kx}^H.$$

Si η (respectivement χ) est une fonction sur $H\phi$ (respectivement $Kx\phi$) invariante par conjugaison sous H (respectivement K), on pose

$$R_\eta^H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \eta(h\phi)\, \rho_h^H$$

(respectivement

$$R_\chi^K = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi(kx\phi)\, \rho_k^K \quad).$$

LEMME 3.1.1. *Soit χ une fonction sur $Kx\phi$ invariante par conjugaison sous K. Alors,*

$$R_K^G\left(R_\chi^K\right) = R_{\mathrm{Ind}_{Kx\phi}^{H\phi} \chi}.$$

Preuve. On a, par definition de l'induction $\mathrm{Ind}_{Kx\phi}^{H\phi}$,

$$\begin{aligned}
R^H_{\mathrm{Ind}_{Kx\phi}^{H\phi} \chi} &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{y \in H \\ {}^{y^{-1}}(h\phi) \in Kx\phi}} \chi\left({}^{y^{-1}}(h\phi)\right) \rho_h^H \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{y \in H \\ {}^{y^{-1}}(h\phi) \in Kx\phi}} \chi\left({}^{y^{-1}}(h\phi)\right) \rho^H_{y^{-1}h\phi(y)} \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi(kx\phi) R_K^H\left(\rho_k^K\right) \\
&= R_K^H\left(R_\chi^K\right).
\end{aligned}$$

∎

3.2. *Induction tordue et produits en couronne.* On reprend les notations de la section précédente 2 ($G_i, G, A, \tilde{G}, \ldots$). Pour tout $1 \le i \le r$, on note G_i' un sous-groupe de G_i. On pose

$$G' = \prod_{1 \le i \le r} \underbrace{(G_i' \times \cdots \times G_i')}_{d_i \text{ fois}}.$$

Alors G' est un sous-groupe de G stable sous A.

On suppose dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, que A est **cyclique** *engendré par un élément α. On reprend les notations du paragraphe précédent avec $H = G$, $K = G'$, et $x = 1$.*

Si χ est un caractère irréductible de G^{α}, on notera $\boldsymbol{\chi}$ le caractère irréductible de G stable sous α associé à χ par le lemme 2.2.2 (tel que $\boldsymbol{\chi}_{\alpha} = \chi$), et on notera $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}$ à $\tilde{G}$. On identifiera $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ avec sa restriction à $G\alpha$.

Si f est une fonction centrale sur G^{α}, on étendra ces définitions par linéarité en posant

$$\boldsymbol{f} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G^{\alpha}} \langle f, \chi \rangle \boldsymbol{\chi},$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G^{\alpha}} \langle f, \chi \rangle \tilde{\boldsymbol{\chi}},$$

de sorte que, pour tout $g \in G$, on ait $\tilde{\boldsymbol{f}}(g\alpha) = f(\pi_{\alpha}(g))$.

LEMME 3.2.1. *Soit f' une fonction centrale sur G'^{α}. On pose $f = \operatorname{Ind}_{G'^{\alpha}}^{G^{\alpha}} f'$. Alors*

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \operatorname{Ind}_{G'\alpha}^{G\alpha} \tilde{\boldsymbol{f}}'.$$

Preuve. En utilisant le lemme 2.2.1, il existe une application $\pi_{\alpha}^{G'}$: $G' \to G'^{\alpha}$ et il est facile de vérifier que $\pi_{\alpha}^{G'}$ est la restriction de π_{α}^{G} à G'.

Quitte à décomposer le problème en produits directs, on peut supposer que $r = 1$. On pose alors $d = d_1$. On peut aussi supposer que $\alpha \in \mathfrak{S}_d$ et même que $\alpha = (1, 2, \dots, d)$.

Soient $g_1, \dots, g_d$ dans G_1. Alors $(g_1, \dots, g_d)\alpha$ est conjugué à $(g_d \cdots g_1, 1, \dots, 1)\alpha$. Pour montrer le lemme 3.2.1, il suffit donc de montrer que, pour tout $g \in G_1$,

$$\tilde{\boldsymbol{f}}((g, 1, \dots, 1)\alpha) = \left(\operatorname{Ind}_{G'\alpha}^{G\alpha} \tilde{\boldsymbol{f}}'\right)((g, 1, \dots, 1)\alpha).$$

Soient $x_1, \dots, x_d$ dans G_1. Alors

$$\begin{aligned} &{}^{(x_1, \dots, x_d)^{-1}}((g, 1, \dots, 1)\alpha) \\ &\qquad = \left(x_1^{-1} g x_d, x_2^{-1} x_1, \dots, x_d^{-1} x_{d-1}\right)\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent, ${}^{(x_1, \dots, x_d)^{-1}}((g, 1, \dots, 1)\alpha) \in G'\alpha$ si et seulement si

$$x_1^{-1} g x_d, x_2^{-1} x_1, \dots, x_d^{-1} x_{d-1} \in G_1',$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$x_d^{-1} g x_d, x_2^{-1} x_1, \dots, x_d^{-1} x_{d-1} \in G_1'.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{Ind}_{G'\alpha}^{G\alpha} \tilde{f}'\right)((g,1,\ldots,1)\alpha) \\
&= \frac{1}{|G'|} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_d)\in G \\ x_d^{-1}gx_d\in G'_1 \\ (x_1,\ldots,x_{d-1})\in(x_dG'_1)^{d-1}}} \tilde{f}'\left(\left(x_1^{-1}gx_d, x_2^{-1}x_1,\ldots,x_d^{-1}x_{d-1}\right)\alpha\right) \\
&= \frac{1}{|G'|} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_d)\in G \\ x_d^{-1}gx_d\in G'_1 \\ (x_1,\ldots,x_{d-1})\in(x_dG'_1)^{d-1}}} f'\left(x_d^{-1}gx_d,\ldots,x_d^{-1}gx_d\right) \\
&= \frac{1}{|G'^{\alpha}|} \sum_{\substack{x\in G^{\alpha} \\ x^{-1}(g,\ldots,g)x\in G'^{\alpha}}} f'\left(x^{-1}(g,\ldots,g)x\right) \\
&= \left(\mathrm{Ind}_{G'^{\alpha}}^{G^{\alpha}} f'\right)\left(\pi_\alpha^G(g,1,\ldots,1)\right) \\
&= f\left(\pi_\alpha^G(g,1,\ldots,1)\right) \\
&= \tilde{f}((g,1,\ldots,1)\alpha).
\end{aligned}
$$

∎

4. CENTRALISATEURS DE SOUS-TORES

Cette section est destinée à donner des résultats un peu plus généraux que ceux dont on aura besoin dans la prochaine section 5. De plus, les résultats de cette section restent vrais sur un corps algébriquement clos quelconque.

4.1. *Notations.* Ces notations ne resteront en vigueur que dans cette section. Soit **G** un groupe réductif connexe. Soit **T** un tore maximal de **G**, et soit A un groupe fini d'automorphismes de **T**. Si $\sigma \in A$, on note encore σ l'action de σ sur $Y(\mathbf{T})$ et sur $X(\mathbf{T})$ (si $x \in X(\mathbf{T})$, alors $\sigma(x) = x \circ \sigma^{-1}$). On pose $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Alors **T** est contenu dans **L** et **L** est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de **G**.

4.2. *Résultats.* On va donner une description du système de racines de **L** relativement à **T** (proposition 4.2.1) ainsi qu'une condition suffisante pour que $\mathbf{L} = \mathbf{T}$ (corollaire 4.2.3).

PROPOSITION 4.2.1. *Avec les notations ci-dessus, soit α une racine de* $\mathbf{G}$ *relativement à* $\mathbf{T}$. *Alors α est une racine de* $\mathbf{L}$ *relativement à* $\mathbf{T}$ *si et seulement si*

$$\sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha) = 0.$$

Preuve. Par définition de $\mathbf{L}$, α est une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$ si et seulement si la restriction de α à $(\mathbf{T}^A)^\circ$ est le caractère trivial, c'est-à-dire si et seulement si α est orthogonale à $Y((\mathbf{T}^A)^\circ) \hookrightarrow Y(\mathbf{T})$. Pour la suite de cette preuve, on a besoin du lemma suivant.

LEMME 4.2.2. *On a* $Y((\mathbf{T}^A)^\circ) = Y(\mathbf{T})^A$.

Preuve du Lemme 4.2.2. Soit $y \in Y(\mathbf{T})^A$. Alors l'image de y est contenue dans $\mathbf{T}^A$, et, puisqu'elle est connexe, elle est contenue dans $(\mathbf{T}^A)^\circ$. Par suite, $y \in Y((\mathbf{T}^A)^\circ)$. La réciproque est immédiate. ∎

Supposons que α soit orthogonale à $Y((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Soit $y \in Y(\mathbf{T})$. On pose $y' = \sum_{\sigma \in A} \sigma(y)$, et $\alpha' = \sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha)$. Alors $y' \in Y(\mathbf{T})^A$, donc, d'après le lemme 4.2.2, $\langle \alpha, y' \rangle = 0$. Or, $\langle \alpha, y' \rangle = \langle \alpha', y \rangle$, ce qui montre que α' est orthogonal à $Y(\mathbf{T})$, c'est-à-dire est trivial.

Réciproquement, supposons que $\sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha) = 0$. Soit alors $y \in Y(\mathbf{T})^A$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha), y \right\rangle = \left\langle \alpha, \sum_{\sigma \in A} \sigma^{-1}(y) \right\rangle \\ &= |A| \langle \alpha, y \rangle, \end{aligned}$$

car y est stable sous A. Par suite, $\langle \alpha, y \rangle = 0$, ce qui montre que α est une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$. ∎

COROLLAIRE 4.2.3. *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-groupe de Borel de* $\mathbf{G}$ *contenant* $\mathbf{T}$. *On suppose que A stabilise le système de racines positives de* $\mathbf{G}$ *relativement au couple* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$. *Alors* $C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ) = \mathbf{T}$.

Preuve. On pose $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Soit α une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$, positive relativement à l'ordre défini par $\mathbf{B}$. Par hypothèse, $\sigma(\alpha)$ est une racine positive pour tout $\sigma \in A$. Or, d'après la proposition 4.2.1, on a

$$\sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha) = 0,$$

ce qui est impossible. On en déduit que le système de racines de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$ est vide, c'est-à-dire que $\mathbf{L} = \mathbf{T}$. ∎

5. AUTOMORPHISMES QUASI-CENTRAUX

Cette section est consacrée à la généralisation des résultats de [DM2] sur l'étude du groupe des points fixes d'un groupe réductif sous un groupe abélien d'automorphismes *quasi-centraux* (la définition 5.1.1 rappellera ce qu'est un automorphisme quasi-central). La généralisation tient essentiellement dans la proposition 5.2.1 qui permet de raisonner par récurrence sur le cardinal de ce groupe d'automorphismes pour se ramener aux résultats de [DM2].

Les résultats des paragraphes 5.1 à 5.3 restent vrais lorsque les groupes considérés sont définis sur un corps algébriquement clos quelconque.

5.1. *Notations.* Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe. Soit $\mathbf{B}_0$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{T}_0$ un tore maximal de $\mathbf{B}_0$. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_0$, et Δ la base de Φ associée à $\mathbf{B}_0$. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on notera $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}$ associé à α.

Soit A un groupe fini *abélien* d'automorphismes de $\mathbf{G}$ stabilisant $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{B}_0$. Les éléments de A sont donc, par définition, des automorphismes *quasi-semi-simples* de $\mathbf{G}$ (cf. [S]). Tout élément $\sigma \in A$ induit un automorphisme de $X(\mathbf{T}_0)$ que l'on notera toujours σ: cet automorphisme permute les racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_0$.

DÉFINITION 5.1.1 ([DM2], définition-théorème 1.15). Un automorphisme σ de $\mathbf{G}$ sera dit *quasi-central* s'il est quasi-semi-simple et si, pour tout $g \in \mathbf{G}$ tel que l'automorphisme $\tau = \sigma \circ \operatorname{ad} g$ de $\mathbf{G}$ soit quasi-semi-simple, on a $\dim \mathbf{G}^\tau \leq \dim \mathbf{G}^\sigma$.

On suppose que les éléments de A sont des automorphismes *quasi-centraux* de $\mathbf{G}$. Le but de cette section est de généraliser au cas où A est abélien les résultats de [DM2], section 1, sur l'étude du groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ sous A: dans [DM2], il n'est traité que le cas où A est cyclique (c'est cependant le cas le plus difficile, la généralisation ne se faisant que par récurrence sur le cardinal de A).

Remarque. Le groupe cyclique engendré par un automorphisme quasi-central n'est pas nécessairement un groupe d'automorphismes quasi-centraux: il se peut qu'une puissance d'un automorphisme quasi-central ne le soit pas (cf. [DM2], 1.20).

5.2. *Récurrence.* L'essentiel de la généralisation des résultats de [DM2] tient dans la proposition 5.2.1 que l'on va énoncer dans ce paragraphe et qui permet, en raisonnant par récurrence sur le cardinal de A, de se ramener au cas où A est cyclique.

PROPOSITION 5.2.1. *Soit A' un sous-groupe maximal du groupe A et soit σ un élément de A n'appartenant pas à A'. On pose $\mathbf{G}' = (\mathbf{G}^\sigma)^\circ$. Alors les éléments de A' induisent des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}'$.*

Preuve. Puisque A est abélien, le groupe $\mathbf{G}'$ est stable sous A'. D'après [DM2], théorème 1.8(i), le groupe $\mathbf{G}'$ est un groupe réductif connexe (cela n'utilise que la quasi-semi-simplicité des éléments de A). On pose $\mathbf{T}_0' = \mathbf{T}_0 \cap \mathbf{G}'$ et $\mathbf{B}_0' = \mathbf{B}_0 \cap \mathbf{G}'$. D'après [DM2], théorème 1.8(iii), $\mathbf{B}_0'$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{T}_0'$ est un tore maximal de $\mathbf{B}_0'$. Le groupe A étant abélien, $\mathbf{T}_0'$ et $\mathbf{B}_0'$ sont A'-stables.

Soit $(x_\alpha\colon \mathbb{F} \to \mathbf{U}_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ une famille d'isomorphismes. Pour tous $\tau \in A$ et $\alpha \in \Phi$, on notera $c_{\tau,\alpha}$ l'unique élément de $\mathbb{F}^\times$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{F}, \quad {}^\tau x_\alpha(\xi) = x_{\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi).$$

On posera d'autre part $C_{\sigma,\alpha} = c_{\sigma^i,\alpha}$, où i est le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^i(\alpha) = \alpha$ (c'est-à-dire le cardinal de l'orbite de α sous σ). Puisque σ^i est un automorphisme quasi-central, il résulte du théorème 1.8(v), de [DM2] que $C_{\sigma,\alpha} = c_{\sigma^i,\alpha} = C_{\sigma^i,\alpha} = 1$ car $\sigma^i(\alpha) = \alpha$. Quitte à modifier les x_α ($\alpha \in \Delta$) par un automorphisme de $\mathbb{F}$ (c'est-à-dire par la multiplication par un élément de $\mathbb{F}^\times$), on peut supposer que $c_{\sigma,\alpha} = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \Delta, \quad \forall \xi \in \mathbb{F}, \qquad {}^\sigma x_\alpha(\xi) = x_{\sigma(\alpha)}(\xi).$$

Si $\tau \in A$ et si $\alpha \in \Delta$, alors on a, pour tout $\xi \in \mathbb{F}$,

$$x_{\sigma\tau(\alpha)}(c_{\sigma\tau,\alpha}\xi) = {}^{\sigma\tau}x_\alpha(\xi) = {}^\sigma x_{\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi) = x_{\sigma\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi),$$

et, puisque A est abélien,

$${}^{\sigma\tau}x_\alpha(\xi) = {}^{\tau\sigma}x_\alpha(\xi) = {}^\tau x_{\sigma(\alpha)}(\xi) = x_{\tau\sigma(\alpha)}(c_{\tau,\sigma(\alpha)}\xi).$$

Par suite,

$$c_{\tau,\alpha} = c_{\sigma\tau,\alpha} = c_{\tau,\sigma(\alpha)}. \tag{5.2.2}$$

On note Φ' le système de racines de $\mathbf{G}'$ relativement à $\mathbf{T}_0'$ et Δ' la base de Φ' associée à $\mathbf{B}_0'$. Si $\alpha \in \Phi$, on notera α' l'orbite de α sous σ. D'après [DM2], théorème 1.8(v), Δ' peut être identifié avec l'ensemble des orbites de σ dans Δ. Soit $(x'_{\alpha'}\colon \mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Phi'}$ une famille d'isomorphismes quelconque. Pour tous $\tau \in A'$ et pour tout $\alpha' \in \Phi'$, on notera $c'_{\tau,\alpha'}$ l'unique élément de $\mathbb{F}^\times$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{F}, \quad {}^\tau x'_{\alpha'}(\xi) = x_{\tau(\alpha')}(c'_{\tau,\alpha'}\xi).$$

On se fixe $\tau \in A'$ et $\alpha \in \Delta$. On note i le cardinal de l'orbite de α' sous τ. Compte tenu de [DM2], définition-théorème 1.15(v), pour montrer que τ induit un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}'$, il suffit de montrer l'égalité

$$c'_{\tau^i,\alpha'} = 1. \tag{$\sharp$}$$

On remarque que $c'_{\tau^i,\alpha'}$ ne dépend pas du choix de la famille $(x'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Phi'}$.

Puisque $\tau^i(\alpha') = \alpha'$ et puisque $\tau(\alpha') = \tau(\alpha)'$ (car A est abélien), il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau^i(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$. Or, d'après la formule (5.2.2), on a

$$c_{\tau^i, \alpha} = c_{\tau^i \sigma^{-j}, \alpha}.$$

On pose $\tau' = \tau^i\sigma^{-j}$. On a $\tau'(\alpha) = \alpha$ et τ' est un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}$. Donc, d'après [DM2], théorème 1.15(v), on a $c_{\tau', \alpha} = 1$. Par suite,

$$c_{\tau^i, \alpha} = 1. \tag{5.2.3}$$

Premier cas: Supposons que, pour toutes racines β et γ dans α', $\beta + \gamma$ ne soit pas une racine. On pose alors, pour tout $\xi \in \mathbb{F}$,

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{\beta \in \alpha'} x_\beta(\xi).$$

Puisque $x_\beta(\xi)$ et $x_\gamma(\xi')$ commutent pour tous β et γ dans α' et ξ et ξ' dans $\mathbb{F}$ (cela résulte des relations de Chevalley et du fait que $\beta + \gamma$ n'est pas une racine), l'application $x'_{\alpha'}$ est bien définie, ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue le produit et est un morphisme de groupes. C'est même un isomorphisme de groupes $x'_{\alpha'}\colon \mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$. Il est facile de vérifier que

$$c'_{\tau^i, \alpha'} = c_{\tau^i, \alpha} = 1,$$

d'après la formule (5.2.3), ce qui montre ($\sharp$) dans ce cas-là.

Deuxième cas: Suppons maintenant trouvée une racine β dans α' telle que $\alpha + \beta$ soit une racine. On pose $\gamma = \alpha + \beta$. Alors α et β sont les deux racines "du milieu" d'une composante irréductible de type A_{2n} ($n \geq 1$) du graphe de Dynkin de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0)$. On peut donc supposer que, pour tous ξ et η dans $\mathbb{F}$, on a

$$\left[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)\right] = x_\gamma(\xi\eta).$$

Par suite, $c_{\tau, \gamma} = c_{\tau, \alpha} c_{\tau, \beta} = c^2_{\tau, \alpha}$ car $c_{\tau, \alpha} = c_{\tau, \beta}$ d'après la formule (5.2.2). On note k le plus petit entier naturel tel que $\beta = \sigma^k(\alpha)$. Alors k est le cardinal de l'orbite de γ sous σ; on remarque aussi que la somme de deux racines de γ' n'est pas une racine. On peut aussi supposer alors que, pour tous $\xi \in \mathbb{F}$ et $0 \leq j \leq k - 1$,

$$x_{\sigma^j(\gamma)}(\xi) = {}^{\sigma^j}x_\gamma(\xi).$$

On a alors, d'après [DM2], théorème 1.8(v),

$${}^{\sigma}x_{\sigma^{k-1}(\gamma)}(\xi) = x_\gamma(-\xi).$$

• Si $p = 2$: Dans ce cas, il est facile de vérifier que, si on pose

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{\delta \in \gamma'} x_\delta(\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{F}$, alors $x'_{\alpha'}$ est un isomorphisme $\mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$. Or, $c'_{\tau', \alpha'} = c_{\tau', \gamma} = c^2_{\tau', \alpha} = 1$ d'après la formule (5.2.3). D'où ($\sharp$).

• Si $p \neq 2$: Dans ce cas, un calcul fastidieux mais facile montre que, si on pose

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{j=0}^{k-1} x_{\sigma^j(\alpha)}(\xi) x_{\sigma^j(\beta)}(\xi) x_{\sigma^j(\gamma)}\left(\frac{\xi^2}{2}\right)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{F}$, alors $x'_{\alpha'}$ est un isomorphisme $\mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$ et $c_{\tau', \alpha'} = c_{\tau', \alpha} = 1$ d'après la formule (5.2.3). Cela termine la démonstration de ($\sharp$). ∎

5.3. *Étude du groupe* $(\mathbf{G}^A)^\circ$. On va étudier dans ce paragraphe les rapports entre les sous-groupes de Borel, les sous-groupes paraboliques, les tores maximaux, et les sous-groupes réguliers de $\mathbf{G}$ et ceux de $(\mathbf{G}^A)^\circ$.

PROPOSITION 5.3.1. (a) *Le groupe* $\mathbf{G}^A$ *est réductif.*

(b) *L'application* $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ *induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de Borel* A*-stables de* $\mathbf{G}$ *et l'ensemble des sous-groupes de Borel de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$.

(c) *L'application* $(\mathbf{T}, \mathbf{B}) \mapsto (\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$ *induit une bijection entre l'ensemble des couples* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ *où* $\mathbf{B}$ *est un sous-groupe de Borel* A*-stable de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{T}$ *est un tore maximal* A*-stable de* $\mathbf{B}$ *et l'ensemble des couples formés d'un tore maximal de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$ *et d'un sous-groupe de Borel de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$ *le contenant.*

(d) *Soit* $\mathbf{T}$ *un tore maximal* A*-stable d'un sous-groupe de Borel* A*-stable de* G. *On a* $\mathbf{T} = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$.

Preuve. On va montrer (a), (b), et (c) par récurrence sur $|A|$. Si $|A| = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $|A| \geq 2$ et les résultats (a), (b), et (c) vrais pour le couple $(\mathbf{G}', A')$ construit dans la proposition 5.2.1 dont on reprend les notations $(A', \sigma, \mathbf{G}', \mathbf{T}'_0, \mathbf{B}'_0, \dots)$. On remarque que, puisque A est engendré par A' et σ, on a $(\mathbf{G}^A)^\circ = (\mathbf{G}'^{A'})^\circ$.

Par hypothèse de récurrence, le groupe $\mathbf{G}'^{A'}$ est réductif, donc $\mathbf{G}^A$ est réductif.

Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{G}$. Alors, d'après [DM2], théorème 1.8(iii), $\mathbf{B} \cap \mathbf{G}'$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}'$. Puisque A est abélien, $\mathbf{B} \cap \mathbf{G}'$ est A'-stable, et donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}'^{A'})^\circ$ est un sous-groupe de Borel de $(\mathbf{G}'^{A'})^\circ = (\mathbf{G}^A)^\circ$. L'application du (b) de la proposition 5.3.1 est donc bien définie.

Soient $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux sous-groupes de Borel A-stables de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{B}_1 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}_2 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$. Alors, par hypothèse de récurrence, $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{G}' = \mathbf{B}_2 \cap \mathbf{G}'$. Par suite, d'après [DM2], définition-théorème 1.15(ii), on a $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, ce qui montre l'injectivité de l'application $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$.

Soit $\mathbf{B}''$ un sous-groupe de Borel de $(\mathbf{G}^A)^\circ$. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-groupe de Borel A'-stable $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{G}'$ tel que $\mathbf{B}' \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}''$. D'après [DM2], définition-théorème 1.15(ii), il existe un unique sous-groupe de Borel σ-stable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{B} \cap \mathbf{G}' = \mathbf{B}'$. Par unicité de $\mathbf{B}$, ce dernier est A'-stable car $\mathbf{B}'$ l'est. Donc $\mathbf{B}$ est A-stable car il est aussi σ-stable. D'autre part, $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = (\mathbf{B} \cap \mathbf{G}') \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}' \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}''$. L'application $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ est donc surjective, ce qui termine la démonstration du (b).

Le (c) se montre de la même manière que le (b) en utilisant le fait qu'il est vrai lorsque $A = \langle \sigma \rangle$, ce qui est démontré dans [DM2], corollaire 1.25.

Le (d) résulte immédiatement du corollaire 4.2.3. ∎

Remarque. Le (a) et le (d) de la proposition 5.3.1 n'utilise que la quasi-semi-simplicité des éléments de A.

COROLLAIRE 5.3.2. *Soit* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ *un couple formé d'un tore maximal A-stable* $\mathbf{T}$ *de* $\mathbf{G}$ *et d'un sous-groupe de Borel A-stable* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{G}$ *le contenant. Alors il existe $g \in (\mathbf{G}^A)^\circ$ tel que*

$$^g(\mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0) = (\mathbf{T}, \mathbf{B}).$$

Preuve. D'après la proposition 5.3.1(c), il existe $g \in (\mathbf{G}^A)^\circ$ tel que

$$^g\big(\mathbf{T}_0 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B}_0 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ\big) = \big(\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ\big).$$

L'injectivé de l'application $(\mathbf{T}, \mathbf{B}) \mapsto (\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$ montre alors que $^g(\mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0) = (\mathbf{T}, \mathbf{B})$. ∎

PROPOSITION 5.3.3. (a) *L'application* $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ *induit une bijection croissante entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques A-stables de* $\mathbf{G}$ *et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$.

(b) *L'application* $(\mathbf{L}, \mathbf{P}) \mapsto (\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$ *induit une bijection croissante entre l'ensemble des couples* $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ *où* $\mathbf{P}$ *est un sous-groupe parabolique A-stable de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi A-stable de* $\mathbf{P}$ *et l'ensemble des couples* $(\mathbf{L}', \mathbf{P}')$ *formés d'un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}'$ *de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$ *et d'un sous-groupe de Levi* $\mathbf{L}'$ *de* $\mathbf{P}'$.

(c) *Avec les notations du* (b), *on a* $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(\mathrm{rad}(\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ))$.

Preuve. Cela se démontre de la même manière que le (b) et le (c) de la proposition 5.3.1, en utilisant le fait que le résultat est vrai lorsque A est cyclique (cf. [DM2], corollaire 1.25). ∎

COROLLAIRE 5.3.4. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique* A*-stable de* $\mathbf{G}$ *et soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi* A*-stable de* $\mathbf{P}$. *Alors il existe un couple* $(\mathbf{T}_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}_{\mathbf{L}})$ *formé d'un tore maximal* A*-stable* $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}$ *de* $\mathbf{L}$ *et d'un sous-groupe de Borel* A*-stable* $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ *de* $\mathbf{L}$ *contenant* $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}$. *De plus, les éléments de* A *induisent des automorphismes quasi-centraux de* $\mathbf{L}$.

Preuve. Soit $(\mathbf{T}', \mathbf{B}')$ un couple formé d'un tore maximal $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ et d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ contenant $\mathbf{T}'$. Par suite, d'après la proposition 5.3.1, il existe un unique couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ formé d'un tore maximal A-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ et d'un sous-groupe de Borel A-stable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ tel que $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ et $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$. Alors $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$ et $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}$. On pose $\mathbf{B}_{\mathbf{L}} = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}$. Alors $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{L}}$.

Pour la dernière assertion, on peut supposer, quitte à conjuguer par un élément de $(\mathbf{G}^A)^\circ$, que $\mathbf{T}_0 \subseteq \mathbf{L}$ et $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{P}$. Il suffit alors d'appliquer par exemple [DM2], définition-théorème 1.15(iii). ∎

5.4. *Cas des corps finis.* On suppose dorénavant que $\mathbf{G}$ est défini sur $\mathbb{F}_q$ et on note F: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ l'endomorphisme de Frobenius associé. On suppose que tous les éléments de A sont rationnels, c'est-à-dire commutent avec F.

PROPOSITION 5.4.1. *Il existe un couple* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ *où* $\mathbf{B}$ *est un sous-groupe de Borel* A*-stable et* F*-stable de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{T}$ *est un tore maximal* A*-stable et* F*-stable de* $\mathbf{B}$.

Preuve. Soit $\mathbf{B}'$ un sous-groupe de Borel F-stable de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ soit $\mathbf{T}'$ un tore maximal F-stable de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ contenu dans $\mathbf{B}'$. D'après la proposition 5.3.1(c), il existe un unique couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ où $\mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ est un tore maximal A-stable de $\mathbf{B}$ tel que $\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{T}'$ et $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}'$. Par unicité du couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$, ce couple est F-stable. ∎

COROLLAIRE 5.4.2. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique* A*-stable de* $\mathbf{G}$ (*non nécessairement rationnel*) *ayant un sous-groupe de Levi* $\mathbf{L}$ *qui est* A*-stable et rationnel. Alors il existe un couple* $(\mathbf{T}_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}_{\mathbf{L}})$ *où* $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ *est un sous-groupe de Borel* A*-stable et* F*-stable de* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}$ *est un tore maximal* A*-stable et* F*-stable de* $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$.

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 5.4.1 et du corollaire 5.3.4. ∎

PROPOSITION 5.4.3. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ (*non nécessairement rationnel*) *qui possède un sous-groupe de Levi rationnel* $\mathbf{L}$. *Alors, si la* $\mathbf{G}^F$*-orbite du couple* $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ *est* A*-stable, elle contient un couple* A*-stable.*

Preuve. On va raisonner par récurrence sur $|A|$ comme dans la proposition 5.3.1. On reprend donc les notations du paragraph 5.2 (A', σ, et $\mathbf{G}'$). On suppose donc le résultat vrai pour le couple $(\mathbf{G}', A')$.

D'après [DM2], proposition 1.38, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^F$ tel que ${}^g(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ soit σ-stable. On peut donc supposer que le couple $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, ce qui sera fait par la suite. On pose $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \cap \mathbf{G}'$ et $\mathbf{L}' = \mathbf{L} \cap \mathbf{G}'$. Alors, d'après [DM2], proposition 1.11, $\mathbf{P}'$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{L}'$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}'$.

Soit $\tau \in A'$. Par hypothèse, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^F$ tel que ${}^\tau(\mathbf{L}, \mathbf{P}) = {}^g(\mathbf{L}, \mathbf{P})$. Puisque A est abélien, le couple ${}^\tau(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, donc $g^{-1}\sigma(g)$ appartient au normalisateur dans $\mathbf{G}$ du couple, $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$, c'est-à-dire $\mathbf{L}$. D'autre part, σ commute avec F, donc $g^{-1}\sigma(g) \in \mathbf{L}^F$. D'après [DM2], proposition 1.39, on a $g \in \mathbf{G}'^F . \mathbf{L}^F$. On peut donc supposer que $g \in \mathbf{G}'^F$, ce qui montre que la $\mathbf{G}'^F$-orbite de $(\mathbf{L}', \mathbf{P}')$ est A'-stable.

Par hypothèse de récurrence, il existe $g' \in \mathbf{G}'^F$ tel que ${}^{g'}(\mathbf{L}', \mathbf{P}')$ soit A'-stable. D'après [DM2], corollaire 1.25, puisque ${}^{g'}(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, il est aussi A'-stable, donc A-stable. ▮

6. GROUPES RÉDUCTIFS NON CONNEXES

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif non nécessairement connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius F: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$. On va rappeler ici quelques résultats sur les groupes réductifs non connexes, et notamment, on va construire l'induction et la restriction de Lusztig dans ce cadre-là: cette construction a déjà été faite dans [DM2], définition 2.2. La classe de sous-groupes réguliers que l'on considère ici est légérement plus générale que celle considérée dans [DM2]; les deux définitions sont reliées par la proposition 6.3.2.

6.1. *Généralités.* Les notions de sous-groupes de Borel et de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ se définissent de la même manière que dans le cas où $\mathbf{G}$ est connexe, c'est-à-dire:

DÉFINITION 6.1.1. On appellera *sous-groupe parabolique* de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$ contenant un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$.

Remarque. Les "paraboliques" de $\mathbf{G}$ construits par [DM2] (cf. définition 1.4) sont les normalisateurs dans $\mathbf{G}$ des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}^\circ$. En particulier, ce sont des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ au sens de la définition précedente 6.1.1. Cependant, un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ au sens de la définition 6.1.1 n'est pas forcément un "parabolique" au sens de [DM2]. Il est contenu (en général strictement) dans un "parabolique" ayant méme composante neutre.

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{U}$ son radical unipotent: $\mathbf{U}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}^\circ$. Soit $\mathbf{L}_0$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}^\circ$. On pose $\mathbf{L} = N_{\mathbf{P}}(\mathbf{L}_0)$. Alors (cf. par exemple, [DM1], corollaire 1.18), on a $\mathbf{L}^\circ = \mathbf{L} \cap \mathbf{G}^\circ = \mathbf{L}_0$, et

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{U}.$$

DÉFINITION 6.1.2. Avec les notations ci-dessus, on dira que $\mathbf{L}$ est un *sous-groupe de Levi* du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$.

On appellera *sous-groupe régulier* de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$.

DÉFINITION 6.1.3. On apellera *quasi-sous-groupe de Borel* de $\mathbf{G}$ tout normalisateur d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$.

On appellera *quasi-tore maximal* de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe de Levi d'un quasi-sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ (en effet, un quasi-sous-groupe de Borel est un sous-groupe parabolique).

Remarque. Un quasi-sous groupe de Borel (respectivement un quasi-tore maximal) de $\mathbf{G}$ au sens de la définition 6.1.3 est un "Borel" (respectivement un "tore") au sens de [DM2], définition 1.2.

DÉFINITION 6.1.4. Si $\mathbf{T}^\circ$ est un tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$, on appellera *groupe de Weyl* de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$ et on notera $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ)$ le groupe quotient $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ)/\mathbf{T}^\circ$.

Soit $\mathbf{T}^\circ$ un tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$ et soit $\mathbf{B}^\circ$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$. On note $\mathbf{T}$ le normalisateur, dans $\mathbf{G}$, du couple $(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ)$. Alors $\mathbf{T}$ est un quasi-tore maximal de $\mathbf{G}$, de composante neutre $\mathbf{T}^\circ$. D'autre part,

$$W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ) \simeq \mathbf{T}/\mathbf{T}^\circ \ltimes W_{\mathbf{G}^\circ}(\mathbf{T}^\circ).$$

Soit $\sigma \in \mathbf{G}^F$. On notera $\mathbf{G}(\sigma)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}^\circ$ et σ. C'est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$.

PROPOSITION 6.1.5. *On suppose que $\sigma \in \mathbf{G}^F$ induit un automorphisme* **quasi-central** *de $\mathbf{G}^\circ$. Soit $\mathbf{T}$ un quasi-tore maximal F-stable de $\mathbf{G}(\sigma)$. Alors il existe un $\mathbf{G}(\sigma)^F$-conjugué $\mathbf{T}_1$ de $\mathbf{T}$ contenant σ. De plus, $(\mathbf{T}_1^\sigma)^\circ$ est un tore maximal F-stable de $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$.*

L'application qui, à la $\mathbf{G}(\sigma)^F$-classe de $\mathbf{T}$, associe la $(\mathbf{G}^\sigma)^{\circ F}$-classe de $(\mathbf{T}_1^\sigma)^\circ$ est bijective. Par suite, l'ensemble des $\mathbf{G}(\sigma)^F$-classes de quasi-tores maximaux F-stables de $\mathbf{G}(\sigma)$ est en bijection avec $H^1(F, W^{\circ\,\sigma})$, où W° est le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à un tore maximal F-stable et σ-stable (il en existe toujours d'après [*DM*2], *proposition* 1.36(*ii*)).

Preuve. Cf. [DM2], proposition 1.40. ∎

6.2. *Groupes non connexes et automorphismes quasi-centraux.* On va commencer ce paragraphe en montrant que le groupe $\mathbf{G}$ est le produit de sa composante neutre par un sous-groupe F-stable dont les éléments induisent des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}^\circ$. Plus précisément, on a le lemme suivant.

LEMME 6.2.1. *Soit* $\mathbf{B}^\circ$ *un sous-groupe de Borel F-stable de* $\mathbf{G}^\circ$ *et soit* $\mathbf{T}^\circ$ *un tore maximal F-stable de* $\mathbf{B}^\circ$. *On pose* $\mathbf{T} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ)$. *Alors il existe un sous-groupe fermé F-stable* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{T}$ *vérifiant les trois conditions suivantes*:

(a) $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ.\mathbf{A}$,

(b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{G}^\circ$ *est contenu dans le centre de* $\mathbf{G}^\circ$,

(c) *Les éléments de* $\mathbf{A}$ *induisent des automorphismes quasi-centraux de* $\mathbf{G}^\circ$.

Preuve. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$ et Δ la base de Φ relativement à $\mathbf{B}^\circ$. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on note $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}^\circ$ associée à α. On note ϕ l'automorphisme de $X(\mathbf{T}^\circ)$ tel que, pour tout $x \in X(\mathbf{T}^\circ)$, on ait

$$F(x) = q\phi(x).$$

Alors ϕ permute les racines de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On choisit une famille d'isomorphismes $(x_\alpha\colon \mathbb{F} \to \mathbf{U}_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ telle que, pour tous $\alpha \in \Phi$ et $\xi \in \mathbb{F}$, on ait

$${}^F x_\alpha(\xi) = x_{\phi(\alpha)}(\xi^q).$$

On pose

$$\mathbf{A} = \left\{\sigma \in \mathbf{T} \mid \forall\alpha \in \Delta, \forall\xi \in \mathbb{F}, {}^\sigma x_\alpha(\xi) = x_{\sigma(\alpha)}(\xi)\right\}.$$

Alors $\mathbf{A}$ est F-stable et $\mathbf{A} \cap \mathbf{G}^\circ = \mathbf{Z}$, où $\mathbf{Z}$ désigne le centre de $\mathbf{G}^\circ$. D'autre part, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ.\mathbf{A}$. En effet, il suffit de montrer que $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\circ.\mathbf{A}$. Soit donc $\sigma \in \mathbf{T}$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe $c_\alpha \in \mathbb{F}^\times$ tel que ${}^\sigma x_\alpha(\xi) = x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha \xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{F}$. Il existe alors un élément $t \in \mathbf{T}^\circ$ tel que $\alpha(t) = c_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$. On a alors par construction $\sigma t^{-1} \in \mathbf{A}$.

Pour finir, d'après [DM2], définition-théorème 1.15(v), les éléments de $\mathbf{A}$ induisent des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}^\circ$. ∎

On reprend les notations du lemme 6.2.1 et on se fixe un sous-groupe $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ satisfaisant les conditions (a), (b), et (c) du lemme 6.2.1. On note A le groupe quotient $\mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ$. On a un morphisme surjectif $\mathbf{A} \to A$.

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On suppose que $\mathbf{L}$ est F-stable. On note $A_{\mathbf{L}}$ le sous-groupe de A image de $\mathbf{L}$ par le morphisme composé

$$\mathbf{L} \to \mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ \to A$$

et on note $\mathbf{A}_{\mathbf{L}}$ l'image réciproque de $A_{\mathbf{L}}$ dans $\mathbf{A}$.

PROPOSITION 6.2.2. *On suppose que A est* **abélien** *et que* $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$. *Alors il existe un élément* $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ *tel que* ${}^g\mathbf{L}$ *(et donc* ${}^g\mathbf{P}$*) contienne* $\mathbf{A}_{\mathbf{L}}^F$.

Preuve. Par définition de $A_{\mathbf{L}}$, et compte tenu du fait que $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$, l'orbite du couple $(\mathbf{L}^\circ, \mathbf{P}^\circ)$ sous $\mathbf{G}^{\circ F}$ est stable sous $A_{\mathbf{L}}^F$. D'après la proposition 5.4.3, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ tel que ${}^g(\mathbf{L}^\circ, \mathbf{P}^\circ)$ soit $A_{\mathbf{L}}^F$-stable. Puisque $N_{\mathbf{G}^\circ}(\mathbf{P}^\circ) = \mathbf{P}^\circ$ et $N_{\mathbf{P}^\circ}(\mathbf{L}^\circ) = \mathbf{L}^\circ$, on en déduit que ${}^g\mathbf{L}$ (et donc ${}^g\mathbf{P}$) contient $\mathbf{A}_{\mathbf{L}}^F$. ∎

6.3. *Foncteurs de Lusztig dans les groupes non connexes.* Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, et soit $\mathbf{U}$ son radical unipotent. Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On suppose $\mathbf{L}$ rationnel. On pose

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}.$$

S'il y a ambiguïté on notera $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ ou encore $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G},F}$ la variété $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}$. Le groupe $\mathbf{G}^F$ agit par translation à gauche et le groupe $\mathbf{L}^F$ agit par translation à droite sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}$. On note $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})$ le $\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{L}^F$ virtuel

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

On construit à partir du bimodule virtuel $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})$ des foncteurs entre les groupes de Grothendieck $\mathscr{K}\mathbf{G}^F$ et $\mathscr{K}\mathbf{L}^F$ notés:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}:\ & \mathscr{K}\mathbf{L}^F \to \mathscr{K}\mathbf{G}^F \\ & \pi \mapsto H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l\mathbf{L}^F} \pi, \\ {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}:\ & \mathscr{K}\mathbf{G}^F \to \mathscr{K}\mathbf{L}^F \\ & \pi \mapsto H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})^\vee \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l\mathbf{G}^F} \pi, \end{aligned}$$

où $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})^\vee$ désigne le dual de $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})$ (c'est un $\mathbf{L}^F$-module-$\mathbf{G}^F$). Les deux foncteurs $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ induisent des foncteurs entre les espaces de fonctions centrales $\mathscr{C}(\mathbf{L}^F)$ et $\mathscr{C}(\mathbf{G}^F)$, toujours notés $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$. Les formules les décrivant sont les suivantes.

PROPOSITION 6.3.1. *Soient λ et γ deux fonctions centrales sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{G}^F$ respectivement. Alors,*

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda)(g) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{x \in \mathbf{L}^F} \mathrm{Tr}\big((g, x^{-1}), H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})\big)\lambda(x),$$

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\gamma)(l) = \frac{1}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{y \in \mathbf{G}^F} \mathrm{Tr}\big((y^{-1}, l), H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})\big)\gamma(y),$$

pour tous $g \in \mathbf{G}^F$ et $l \in \mathbf{L}^F$.

Preuve. Cf. [DM1], proposition 4.5. ▮

Les foncteurs $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ et $^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\mathbf{G}$ sont appelés respectivement les foncteurs d'*induction* et de *restriction de Lusztig*. Ils dépendent a priori du choix du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ dont $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi.

Remarque. Les foncteurs d'induction et de restriction de Lusztig ont tout d'abord été construits par Lusztig (cf. [L1]) dans les groupes réductifs connexes. Ils ont ensuite été généralisés au cas des groupes non connexes par Digne et Michel (cf. [DM2]). La définition précédente généralise un tout petit peu la définition de Digne et Michel (cf. remarque suivant la définition 6.1.1). Le lien entre les deux définitions est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 6.3.2. *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe F-stable de* $\mathbf{G}$ *contenant* $\mathbf{G}^\circ$. *Alors* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ *et un sous-groupe de Levi de lui-même. De plus,*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{L}} = \mathrm{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{L}^F}$$

et

$$^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{L}} = \mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{L}^F}.$$

Preuve. En effet, dans ce cas-là, le radical unipotent de $\mathbf{L}$ est réduit à l'élément neutre. Or, la variété $\mathbf{Y}_{\{1\}}$ est égale à $\mathbf{G}^F$. Par suite, $H_c^*(\mathbf{Y}_{\{1\}})$ est isomorphe, en tant que $\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{L}^F$, a $\overline{\mathbb{Q}}_l\mathbf{G}^F$ munie des actions naturelles de $\mathbf{G}^F$ à gauche et $\mathbf{L}^F$ à droite (cf. par exemple, [DM1], proposition 10.8(i)). ▮

PROPOSITION 6.3.3. *Soient* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *deux sous-groupes paraboliques de* $\mathbf{G}$ *tels que* $\mathbf{P}\subset\mathbf{Q}$. *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi F-stable de* $\mathbf{P}$ *et soit* $\mathbf{M}$ *un sous-groupe de Levi F-stable de* $\mathbf{Q}$ *contenant* $\mathbf{L}$.

Alors $\mathbf{P}\cap\mathbf{M}$ *est un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{M}$ *dont* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi. De plus,*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}} \circ R^{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}\cap\mathbf{M}},$$

et

$$^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} = {}^*R^{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}\cap\mathbf{M}} \circ {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}.$$

Preuve. On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{V}$ celui de $\mathbf{Q}$. Il est facile de voir que $\mathbf{P}\cap\mathbf{M}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{M}$ (car il contient $\mathbf{P}^\circ\cap\mathbf{M}^\circ$ qui est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{M}^\circ$), de radical unipotent $\mathbf{U}\cap\mathbf{M} = \mathbf{U}\cap\mathbf{M}^\circ$, et dont un sous-groupe de Levi est $\mathbf{L}$. Compte tenu des propriétés de la cohomologie l-adique (cf. par exemple,

[DM1], proposition 10.10), il suffit de montrer que l'application

$$\varphi\colon \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{M}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$$
$$(g,x) \mapsto gx$$

est un isomorphisme de variétés, où $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{M}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ désigne le quotient de la variété produit $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ par $\mathbf{M}^F$, l'action du groupe $\mathbf{M}^F$ étant définie de la manière suivante:

$$m.(g,x) = (gm^{-1}, mx),$$

pour tous $m \in \mathbf{M}^F$, $g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$, et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$. Il suffit de montrer qu'elle est bien définie, injective, et surjective.

Soient $g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$ et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$. On a alors

$$(gx)^{-1}F(gx) = x^{-1}(g^{-1}F(g))x.x^{-1}F(x).$$

Or, $x^{-1}(g^{-1}F(g))x$ appartient à $\mathbf{V}$ (car $x \in \mathbf{M}$ et $g^{-1}F(g) \in \mathbf{V}$) et $x^{-1}F(x) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{M}$. Par suite,

$$(gx)^{-1}F(gx) \in \mathbf{V}.(\mathbf{U} \cap \mathbf{M}) = \mathbf{U}$$

(cf. [DM1], proposition 2.1(iii)). L'application φ est donc bien définie.

Soient (g,x) et (g',x') dans $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ tels que $gx = g'x'$. On a alors $g'^{-1}g = x'x^{-1}$. On pose $m = x'x^{-1}$. On a $g = g'm$, $x = m^{-1}x'$, et $m \in \mathbf{M}$. On a alors

$$g^{-1}F(g) = m^{-1}(g'^{-1}F(g'))m.m^{-1}F(m),$$

ce qui implique que $\mathbf{V} \cap \mathbf{V}.m^{-1}F(m)$ est non vide, c'est-à-dire que, $F(m) = m$. Par suite, φ est injective.

Soit $y \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$. Il existe u dans $\mathbf{U} \cap \mathbf{M}$ et v dans $\mathbf{V}$ tels que $y^{-1}F(y) = vu$. D'autre part, d'après le théorème de Lang, il existe un élément x de $\mathbf{M}$ tel que $x^{-1}F(x) = u$. Alors $xvx^{-1} \in \mathbf{V}$, donc il existe g dans $\mathbf{G}$ tel que $g^{-1}F(g) = xvx^{-1}$. Par suite, $(gx)^{-1}F(gx) = y^{-1}F(y)$, donc on trouve $g' \in \mathbf{G}^F$ tel que $y = g'gx$. Or, $g'g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$ et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$, ce qui montre que φ est surjective. ∎

Le dernier résultat de ce paragraphe concerne le cas où le sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ est lui aussi F-stable. On obtient alors une description plus simple du foncteur de Lusztig $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$, analogue au cas des groupes connexes. D'ailleurs la preuve en est analogue et donc sera omise.

PROPOSITION 6.3.4. *On suppose que le sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *est* F*-stable. Alors le morphisme naturel* $\pi\colon \mathbf{P}^F \to \mathbf{L}^F$ *est surjectif, et on a*

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(\lambda \circ \pi)$$

pour toute fonction centrale λ *sur* $\mathbf{L}^F$.

6.4. *Caractères unipotents de groupes non connexes.* On peut définir aussi pour les groupes non connexes la notion de caractère unipotent.

DÉFINITION 6.4.1. On appelle *caractère unipotent* de $\mathbf{G}^F$ toute composante irréductible d'un caractère (virtuel) $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ}(1)$, où $\mathbf{T}^\circ$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ (c'est-à-dire de $\mathbf{G}^\circ$) et $\mathbf{B}^\circ$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$.

On notera $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ l'ensemble des caractères irréductibles unipotents de $\mathbf{G}^F$.

LEMME 6.4.2. *Soit γ un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$. Alors γ est unipotent si et seulement si γ est une composante irréductible d'un*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \gamma^\circ ,$$

où γ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$.

Preuve. Si $\mathbf{T}^\circ$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ (c'est-à-dire de $\mathbf{G}^\circ$) et $\mathbf{B}^\circ$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$, on a

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ} .$$

Or, le foncteur de Lusztig $R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ}$ ne dépend pas du sous-groupe de Borel $\mathbf{B}^\circ$, donc le foncteur de Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ}$ ne dépend pas non plus de $\mathbf{B}^\circ$. Par conséquent, dans cette preuve, on notera $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^\circ}$ le foncteur $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^\circ \subset \mathbf{B}^\circ}$

On se fixe un sous-groupe de Borel F-stable $\mathbf{B}_1^\circ$ de $\mathbf{G}^\circ$ ainsi qu'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}_1^\circ$ de $\mathbf{B}_1^\circ$. On note W° le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}_1^\circ$. Pour tout $w \in W^\circ$, on notera $\mathbf{T}_w^\circ$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}^\circ$ de type w. Il résulte de [L2], proposition 3.12, que

$$\sum_{\gamma^\circ \in \mathscr{E}(\mathbf{G}^{\circ F}, 1)} \dim(\gamma^\circ)\gamma^\circ = \frac{1}{|W^\circ|} \sum_{w \in W^\circ} \dim\big(R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}_w^\circ}(1)\big) R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}_w^\circ}(1).$$

Par conséquent,

$$\sum_{\gamma^\circ \in \mathscr{E}(\mathbf{G}^{\circ F}, 1)} \dim(\gamma^\circ)\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \gamma^\circ = \frac{1}{|W^\circ|} \sum_{w \in {}^\circ} \dim\big(R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}_w^\circ}(1)\big) R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_w^\circ}(1).$$

Cela montre que si γ est une composante irréductible d'un

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \gamma^\circ ,$$

où γ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$, alors γ est unipotent.

Réciproquement, si γ est unipotent, alors, par définition, γ est une composante irréductible d'un caractère $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} R^{\mathbf{G}^\circ}_{\mathbf{T}_w^\circ}(1)$ pour au moins un

$w \in W^\circ$ (cf. propositions 6.3.3 et 6.3.2). Par conséquent, il existe une composante irréductible γ° de $R_{\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1)$ telle que γ soit une composante irréductible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \gamma^\circ$. Par définition, γ° est unipotent ce qui termine la démonstration. ∎

La proposition 6.4.3 ci-dessous est bien connue lorsque **G** est connexe: la généralisation au cas non connexe est immédiate.

PROPOSITION 6.4.3. *Soit* **Z** *un sous-groupe fermé connexe central F-stable de* **G**. *Alors l'application naturelle*

$$\mathscr{E}(\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F, 1) \to \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$$

est bijective.

Preuve. On note $\pi \colon \mathbf{G}^F \to \mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F$ l'application canonique. Si γ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F$, alors, d'après le lemme 6.4.2, γ est une composante irréductible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}/\mathbf{Z}^F}^{\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F} \gamma^\circ$, où γ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}/\mathbf{Z}^F$. Or $\gamma \circ \pi$ est une composante irréductible de

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}/\mathbf{Z}^F}^{\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F} \gamma^\circ\right) \circ \pi = \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F}(\gamma^\circ \circ \pi),$$

donc $\gamma \circ \pi$ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$ car $\gamma^\circ \circ \pi$ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$ (cf. par exemple, [DM1], proposition 13.20). Donc l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F, 1) &\to \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ \gamma &\mapsto \gamma \circ \pi \end{aligned}$$

est bien définie. Elle est de plus injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit γ un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$. Il suffit de montrer que $\gamma(z) = \gamma(1)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$. D'après le lemme 6.4.2, il existe un caractère unipotent γ° de $\mathbf{G}^{\circ F}$ tel que γ soit une composante irréducible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \gamma^\circ$. Or, la proposition 6.4.3 est vraie si **G** est connexe (cf. par exemple, [DM1], proposition 13.20). En particulier, elle est vraie pour $\mathbf{G}^\circ$. Par suite, on a, pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$, $\gamma^\circ(z) = \gamma^\circ(1)$. Puisque **Z** est central dans **G**, on a bien $\gamma(z) = \gamma(1)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$. ∎

7. CARACTÈRES UNIPOTENTS DE PRODUITS EN COURONNE DE GROUPES LINÉAIRES

Cette section et la suivante 8 sont consacrées à l'étude des caractères unipotents d'un groupe non connexe **G** produit semi-direct d'un sous-groupe régulier rationnel d'un groupe linéaire par un groupe permutant ses composantes irréductibles.

Dans cette section est énoncé le théorème 7.3.2. La preuve de ce théorème ne sera faite que dans la section suivante 8. Au cours de cette preuve, on fera le lien entre l'étude des caractères unipotents de **G** et la descente de Shintani des caractères unipotents du groupe linéaire (cf. théorème 8.3.3) en adoptant le même point de vue que Digne (cf. [D]).

Avant de prouver le théorème 7.3.2, on en décrira d'abord dans cette section quelques conséquences. En particulier, on établit que tous les caractères unipotents de **G** sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne–Lusztig généralisés, ce qui permettra dans la dernière partie de cette section de calculer l'induction de Lusztig des caractères unipotents (cf. théorème 7.6.1) en utilisant simplement la transitivité de ces foncteurs d'induction (cf. proposition 6.3.3).

7.1. *Notations.* On note $\mathbf{G}^\circ$ le groupe

$$\mathbf{G}^\circ = \prod_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})\right)}_{d_i \text{ fois}},$$

où les n_i et les d_i sont des entiers naturels non nuls ($1 \leq i \leq r$), et on note $F_0\colon \mathbf{G}^\circ \to \mathbf{G}^\circ$ l'endomorphisme de Frobenius défini par

$$F_0\left((g_{i1}, \ldots, g_{id_i})_{1 \leq i \leq r}\right) = \left(g_{i1}^{(q)}, \ldots, g_{id_i}^{(q)}\right)_{1 \leq i \leq r},$$

où, pour tout $g_{ij} \in \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})$, $g_{ij}^{(q)}$ désigne la matrice déduite de g_{ij} en élevant chaque coefficient à la puissance q ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq d_i$).

Le groupe $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$ opère sur $\mathbf{G}^\circ$ par permutation des composantes. On se fixe un élément σ de $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. On notera F l'endomorphisme de Frobenius égal à σF_0. On se fixe un sous-groupe σ-stable A de $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. On note **G** le groupe

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ \rtimes A.$$

Alors **G** est un groupe réductif, non connexe si A est non trivial, et sa composante neutre est $\mathbf{G}^\circ$. On prolonge l'endomorphisme de Frobenius F_0 de manière triviale sur A. Alors A^F est le centralisateur de σ dans A. On a

$$\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F} \rtimes A^F.$$

Le but de cette section est de décrire les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$.

LEMME 7.1.1. *Les éléments de A induisent des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}^\circ$.*

Preuve. Soit $\alpha \in A$. Pour montrer que α induit un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}^\circ$, on peut se ramener, par produits directs, au cas où $r = 1$ et où $\alpha = (1, \ldots, d_1)$. On posera pour simplifier $n = n_1$ et $d = d_1$.

Alors l'application $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}) \to \mathbf{G}^{\circ\,\alpha}$, $g \mapsto (g, \ldots, g)$ est un isomorphisme de groupes algébriques. Donc $\dim(\mathbf{G}^{\circ\alpha}) = \dim \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ $(= n^2)$.

Soit $g = (g_1, \ldots, g_d) \in \mathbf{G}^\circ$. Il suffit de montrer que $\dim(\mathbf{G}^\circ)^{\alpha \circ \mathrm{ad}\, g} \leq \dim \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$. Pour cela, posons $\mathbf{H} = C_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})}(g_d \cdots g_1)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\to (\mathbf{G}^\circ)^{\alpha \circ \mathrm{ad}\, g} \\ h &\mapsto \left(h, {}^{g_d^{-1} \cdots g_2^{-1}}h, \ldots, {}^{g_d^{-1}}h\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes algébriques, ce qui prouve le résultat. ∎

Compte tenu du lemme 7.1.1, on pourra appliquer tous les résultats de la section 5.

Pour tout $1 \leq i \leq r$, on notera $\mathbf{T}_{n_i}$ (respectivement $\mathbf{B}_{n_i}$) le tore maximal (respectivement le sous-groupe de Borel) de $\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})$ formé des matrices diagonales (respectivement triangulaires supérieures). On notera $\mathbf{T}_1^\circ$ (respectivement $\mathbf{B}_1^\circ$) le tore maximal (respectivement le sous-groupe de Borel)

$$\mathbf{T}_1^\circ = \prod_{i=1}^{r} \underbrace{(\mathbf{T}_{n_i} \times \cdots \times \mathbf{T}_{n_i})}_{d_i \text{ fois}}$$

(respectivement

$$\mathbf{B}_1^\circ = \prod_{i=1}^{r} \underbrace{(\mathbf{B}_{n_i} \times \cdots \times \mathbf{B}_{n_i})}_{d_i \text{ fois}} \qquad)$$

de $\mathbf{G}^\circ$: ils sont tous deux F-stables.

On notera W° le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}_1^\circ$, et W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_1^\circ$. On a alors

$$W = W^\circ \rtimes A.$$

On notera ϕ l'automorphisme induit par F sur W.

Remarque. Si $\mathbf{B}$ est un quasi-sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ et si $\mathbf{T}$ est un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{B}$ (c'est-à-dire un quasi-tore maximal de $\mathbf{G}$ contenu dans $\mathbf{B}$), il résulte de [DM2], proposition 2.3 et théorème 4.5 (formule de Mackey pour un quasi-tore maximal et un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$) que le foncteur de Lusztig $R_{\mathbf{T} \subset \mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$ ne dépend pas du quasi-sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$. On le notera donc par la suite $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$. De même, on notera ${}^*\mathbf{R}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ le foncteur ${}^*R_{\mathbf{T} \subset \mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$.

7.2. *Caractères unipotents de* $\mathbf{G}^{\circ F}$. Pour tout $w \in W^\circ$, on notera $\mathbf{T}_w^\circ$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}^\circ$ de type w. Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. On notera $\boldsymbol{\chi}$ le caractère irréductible de W° invariant sous F tel que $\boldsymbol{\chi}_\phi = \chi$ avec les notations du lemme 2.2.2. On notera $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}$ à $W^\circ \rtimes \langle \phi \rangle$ (cf. définition 2.3.3). On pose

$$R_\chi^\circ = \frac{1}{|W^\circ|} \sum_{w \in W^\circ} \tilde{\boldsymbol{\chi}}(w\phi) R_{\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1).$$

S'il y a ambiguïté, on notera $R_\chi^{\mathbf{G}^\circ}$ ou encore $R_\chi^{\mathbf{G}^{\circ F}}$ la fonction centrale R_χ° définie ci-dessus.

THÉORÈME 7.2.1 (Lusztig–Srinivasan [LS], théorème 2.2). *Pour tout caractère irréductible χ de $W^{\circ F}$, R_χ° est un caractère irréductible (unipotent) de $\mathbf{G}^{\circ F}$. De plus, l'application*

$$\begin{aligned} \operatorname{Irr} W^{\circ F} &\to \mathscr{E}(\mathbf{G}^{\circ F}, 1) \\ \chi &\mapsto R_\chi^\circ \end{aligned}$$

est bijective.

7.3. *Extension de caractères unipotents de* $\mathbf{G}^{\circ F}$. Soit $\alpha \in A^F$. On notera $\mathbf{G}(\alpha)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}^\circ$ et α, et $\mathbf{T}_1(\alpha)$ le quasi-tore maximal $\mathbf{T}_1^\circ \rtimes \langle \alpha \rangle$ de $\mathbf{G}(\alpha)$. Si $w \in W^{\circ \alpha}$, on notera $\mathbf{T}_w(\alpha)$ un quasi-tore maximal F-stable de $\mathbf{G}(\alpha)$ dont la classe de $\mathbf{G}(\alpha)^F$-conjugaison est associée à la classe de F-conjugaison de w par la proposition 6.1.5 relativement au tore maximal $(\mathbf{T}_1^\alpha)^\circ$ de $\mathbf{G}^\alpha$.

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. On notera $A^F(\chi)$ le stabilisateur dans A^F de χ et $W^F(\chi)$ le stabilisateur de χ dans W^F. Si $\alpha \in A^F(\chi)$, on notera, comme dans le lemme 2.2.2, χ_α le caractère irréductible de $(W^{\circ F})^\alpha$ associé à χ. Puisque α et F commutent, $\boldsymbol{\chi}$ est un caractère α-stable de W°, et donc il lui correspond, par le lemme 2.2.2, un caractère irréductible $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ de $W^{\circ \alpha}$ stable sous F. Toujours puisque F et α commutent, le caractère χ_α est le caractère associé à $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ par l'application $(\operatorname{Irr} W^{\circ \alpha})^F \to \operatorname{Irr}(W^{\circ \alpha})^F$ définie dans le lemme 2.2.2 (remarquons que $(W^{\circ F})^\alpha = (W^{\circ \alpha})^F$!), c'est-à-dire $(\boldsymbol{\chi}_\alpha)_\phi = \chi_\alpha$ (cf. lemme 2.2.4).

Pour finir, on notera $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_\alpha$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ au produit semi-direct $W^{\circ \alpha} \rtimes \langle \phi \rangle$.

Le stabilisateur, dans A^F, du caractère unipotent R_χ° de $\mathbf{G}^{\circ F}$ est égal à $A^F(\chi)$. On pose alors, pour tous $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ et $\alpha \in A^F(\chi)$,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\chi(g\alpha) &= \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}^F(\chi)}(g\alpha) \\ &= \frac{1}{|W^{\circ \alpha}|} \sum_{w \in W^{\circ \alpha}} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_\alpha(w\phi) R_{\mathbf{T}_w(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}(1)(g\alpha). \end{aligned} \qquad (7.3.1)$$

THÉORÈME 7.3.2. *Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. Alors $\tilde{R}_\chi$ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F(\chi)$ et sa restriction à $\mathbf{G}^{\circ F}$ est égale à R°_χ.*

DÉFINITION 7.3.3. On dira que $\tilde{R}_\chi$ est l'*extension canonique* de R_χ.

Comme annoncé, on prouvera le théorème 7.3.2 dans la prochaine section 8; on va d'abord en développer les conséquences (paramétrage des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ et description du foncteur de Lusztig).

7.4. *Paramétrage des caractères unipotents de* $\mathbf{G}^F$. On notera $\mathscr{I}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F)$ l'ensemble des couples (γ°, ξ), où γ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$ et ξ est un caractère irréductible de $A^F(\gamma^\circ)$, le stabilisateur de γ° dans A^F. Le groupe A^F agit sur $\mathscr{I}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F)$, et on notera $\bar{\mathscr{I}}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F)$ l'ensemble des orbites de A^F dans $\mathscr{I}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F)$. Si $(\gamma^\circ, \xi) \in \mathscr{I}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F)$, on notera $\gamma^\circ * \xi$ l'orbite de (γ°, ξ).

Pour finir, si γ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$, on notera $\tilde{\gamma}$ son extension canonique à $\mathbf{G}^F(\gamma^\circ) = \mathbf{G}^{\circ F} \rtimes A^F(\gamma^\circ)$.

On a une bijection

$$\begin{aligned} \bar{\mathscr{I}}(W^{\circ F}, A^F) &\to \bar{\mathscr{I}}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F) \\ \chi * \xi &\mapsto R^\circ_\chi * \xi. \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} \bar{\mathscr{I}}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F) &\to \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ \gamma^\circ * \xi &\mapsto \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^F(\gamma^\circ)}^{\mathbf{G}^F}(\tilde{\gamma} \otimes \xi) \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

est bijective.

Des bijections (2.4.3), (7.4.1), et (7.4.2), on déduit une bijection $\mathrm{Irr}\, W^F \to \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ que l'on notera

$$\begin{aligned} \mathrm{Irr}\, W^F &\to \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ \Gamma &\mapsto \mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{R}_\Gamma^{\mathbf{G}} = \mathbf{R}_\Gamma^{\mathbf{G}^F}. \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Si $\chi * \xi \in \bar{\mathscr{I}}(W^{\circ F}, A^F)$, on notera aussi $R_{\chi * \xi} = R^{\mathbf{G}}_{\chi * \xi} = R^{\mathbf{G}^F}_{\chi * \xi}$ le caractère $\mathbf{R}_{\Gamma_{\chi * \xi}}$, c'est-à-dire,

$$R_{\chi * \xi} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^F(\chi)}^{\mathbf{G}^F}\left(\tilde{R}_\chi \otimes \xi\right). \tag{7.4.4}$$

Remarquons pour terminer que

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} R^{\mathbf{G}^\circ}_\chi = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}\, A^F(\chi)} \xi(1) R^{\mathbf{G}}_{\chi * \xi}. \tag{7.4.5}$$

7.5. *Transformation de Mellin.* On étend la bijection (7.4.3) en une application linéaire

$$\mathscr{C}(W^F) \to \overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$$
$$f \mapsto \mathbf{R}_f = \mathbf{R}_f^{\mathbf{G}} = \mathbf{R}_f^{\mathbf{G}^F}.$$

On notera, pour tout $\chi * \alpha \in \mathscr{T}^{\wedge}(W^{\circ F}, A^F)$, $\hat{R}_{\chi * \alpha}$ (ou $\hat{R}^{\mathbf{G}}_{\chi * \alpha}$, ou $\hat{R}^{\mathbf{G}^F}_{\chi * \alpha}$ s'il y a ambiguïté) la fonction centrale $\mathbf{R}_{\hat{\Gamma}_{\chi * \alpha}}$. En d'autres terms, on a

$$\hat{R}_{\chi * \alpha} = \sum_{\xi \in \operatorname{Irr} A^F(\chi)} \overline{\xi(\alpha)} R_{\chi * \xi}. \tag{7.5.1}$$

Le lemme suivant est l'analogue, dans ce contexte, du lemme 2.5.2.

LEMME 7.5.2. (a) *Soit $\chi * \xi \in \mathscr{T}(W^{\circ F}, A^F)$. Alors,*

$$R_{\chi * \xi} = \frac{1}{|A^F(\chi)|} \sum_{\alpha \in A^F(\chi)} \xi(\alpha) \hat{R}_{\chi * \alpha}.$$

(b) $(\hat{R}_{\chi * \alpha})_{\chi * \alpha \in \mathscr{T}^{\vee}(W^{\circ F}, A^F)}$ *est une base orthogonale de $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$. On a, pour tout $\chi * \alpha \in \mathscr{T}^{\vee}(W^{\circ F}, A^F)$,*

$$\langle \hat{R}_{\chi * \alpha}, \hat{R}_{\chi * \alpha} \rangle_{\mathbf{G}^F} = |C_{A^F(\chi)}(\alpha)|.$$

(c) *On suppose A* **abélien**. *Soit $\chi * \alpha \in \mathscr{T}^{\vee}(W^{\circ F}, A^F)$ et soient $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ et $\beta \in A^F$. Alors,*

$$\hat{R}_{\chi * \alpha}(g\beta) = \begin{cases} |A^F(\chi)| R_{\chi * 1}(g\beta), & si\ \alpha = \beta, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

7.6. *Induction de Lusztig.* Compte tenu du fait que l'on a réussi à écrire tous les caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ comme combinaisons linéaires de caractères de Deligne–Lusztig, il va être facile de calculer le foncteur d'induction géneralisée de Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}$: $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{L}^F, 1) \to \overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$, où $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. Il va falloir cependant faire une hypothèse, qui ne sera utilisée que dans ce paragraphe.

Hypothèse. On supposera que A est *abélien.*

Remarque. Puisque toutes les fonctions appartenant à $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{L}^F, 1)$ sont uniformes, le foncteur de Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}$: $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{L}^F, 1) \to \overline{\mathbb{Q}}_l \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ ne dépend en fait pas de $\mathbf{P}$. On le notera $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$.

On note $A_{\mathbf{L}}$ le sous-groupe de A image de $\mathbf{L}/\mathbf{L}^\circ$ par le morphisme composé

$$\mathbf{L}/\mathbf{L}^\circ \to \mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ \to A.$$

D'après la proposition 6.2.2, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ tel que ${}^g\mathbf{L}$ (donc ${}^g\mathbf{P}$) contienne $A_{\mathbf{L}}^F$. On supposera donc par la suite que $\mathbf{L}$ contient $A_{\mathbf{L}}^F$.

D'autre part, d'après le corollaire 5.4.2, il existe un tore maximal F-stable et $A_{\mathbf{L}}^F$-stable $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$ de $\mathbf{L}^\circ$ ainsi qu'un sous-groupe de Borel F-stable et $A_{\mathbf{L}}^F$-stable $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^\circ$ de $\mathbf{L}^\circ$ contenant $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$ (on utilise ici le fait que A est abélien).

On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{U}$ est $A_{\mathbf{L}}^F$-stable. Par suite, le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^\circ \ltimes \mathbf{U}$ de $\mathbf{G}^\circ$ est $A_{\mathbf{L}}^F$-stable. Par conséquent, il existe un élément g de $(\mathbf{G}^{A_{\mathbf{L}}^F})^\circ$ tel que

$${}^g(\mathbf{T}_1^\circ, \mathbf{B}_1^\circ) = (\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ, \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^\circ.\mathbf{U})$$

(cf. corollaire 5.3.2). Alors $g^{-1}F(g)$ appartient à $N_{\mathbf{G}^\circ}(\mathbf{T}_1^\circ)$. On note w_1 sa classe dans W°. Puisque g centralise $A_{\mathbf{L}}^F$, l'élément w_1 de W° centralise aussi $A_{\mathbf{L}}^F$.

On notera $W_{\mathbf{L}}^\circ$ (respectivement $W_{\mathbf{L}}$) l'image via $\operatorname{ad} g^{-1}$ du groupe de Weyl de $\mathbf{L}^\circ$ (respectivement $\mathbf{L}$) relativement à $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$: c'est un sous-groupe de W° (respectivement W). Via $\operatorname{ad} g^{-1}$, le morphisme de Frobenius agit comme $w_1\phi$. On remarquera que, puisque w_1 est centralisé par $A_{\mathbf{L}}^F$, on a $A_{\mathbf{L}}^{w_1F} = A_{\mathbf{L}}^F$.

THÉORÈME 7.6.1. *Soient χ un caractère irréductible du groupe $W_{\mathbf{L}}^{\circ\, w_1F}$ et α un élément de $A_{\mathbf{L}}^F(\chi) = A_{\mathbf{L}}^{w_1F}(\chi)$. On écrit*

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^\circ\, \alpha . w_1\phi}^{W^\circ\, \alpha . \phi} \tilde{\chi}_\alpha = \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \tilde{\zeta}_\alpha,$$

où les n_ζ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Alors,

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\left(\hat{R}^{\mathbf{L}}_{\chi * \alpha}\right) = \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \hat{R}^{\mathbf{G}}_{\zeta * \alpha}.$$

Remarques. (1) Si χ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}^{\circ w_1F}$, alors $\tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}$ et le résultat du théorème 7.6.1 pour $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}^{\mathbf{L}}_{\chi * 1})$ est bien connu. En effet,

$$\hat{R}^{\mathbf{L}}_{\chi * 1} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^{\circ F}}^{\mathbf{L}^F} R_\chi^{\mathbf{L}^\circ},$$

et le résultat découle alors de la transitivité des foncteurs d'induction de Lusztig (cf. proposition 6.3.3), de la proposition 6.3.2, et du lemme 3.1.1.

(2) Compte tenu du (b) du lemme 7.5.2, le théorème 7.6.1 décrit bien le foncteur induction

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}: \overline{\mathbb{Q}}_l\mathscr{E}(\mathbf{L}^F, 1) \to \overline{\mathbb{Q}}_l\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1).$$

Preuve. On commence par rappeler le lemme suivant.

LEMME 7.6.2 (Digne–Michel). *Soit f une fonction centrale sur $\mathbf{L}^F$. Alors,*

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(f) &= \sum_{\beta \in A^F/A_{\mathbf{L}}^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F} {}^\beta f \\ &= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F} {}^\beta f.\end{aligned}$$

Preuve. C'est un cas particulier de la proposition 2.3(i) de [DM2]. ∎

Puisque $\hat{R}_{\chi * \alpha}^{\mathbf{L}}$ a son support dans $\mathbf{L}^{\circ F}.\alpha$ (cf. proposition 7.5.2(c)), la fonction $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\chi * \alpha}^{\mathbf{L}})$ a son support dans $\mathbf{G}^{\circ F}.\alpha$. Par suite, pour montrer le théorème 7.6.1, il suffit de montrer que

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\left(\hat{R}_{\chi * \alpha}^{\mathbf{L}}\right) = \operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \hat{R}_{\zeta * \alpha}^{\mathbf{G}}. \tag{7.6.3}$$

D'après le lemme 7.6.2, on a

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\left(\hat{R}_{\chi * \alpha}^{\mathbf{L}}\right) \\ &= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}\left(\operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}\left(\hat{R}_{{}^\beta\chi * \alpha}^{{}^\beta\mathbf{L}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}\left(\operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F} \operatorname{Ind}_{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}\left(\hat{R}_{{}^\beta\chi * \alpha}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}\left(\frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F(\chi)|} \sum_{\gamma \in A_{\mathbf{L}}^F} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\left(\hat{R}_{{}^{\beta\gamma}\chi * \alpha}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\gamma \in A_{\mathbf{L}}^F} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}\left(\frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F(\chi)|} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\left(\hat{R}_{{}^{\beta\gamma}\chi * \alpha}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\right)\right) \\ &= \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}\left(\frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F(\chi)|} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\left(\hat{R}_{{}^\beta\chi * \alpha}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}\right)\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $\beta \in A^F$, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}\left(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^\beta\chi*\alpha}\right)\\ &\quad = \frac{|A^F_{\mathbf{L}}(\chi)|}{|W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}|}\sum_{w\in W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}}\tilde{\chi}_\alpha\left({}^{\beta^{-1}}(ww_1)\phi\right)R^{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}(ww_1)}(\alpha)}(1_\alpha),\end{aligned}$$

où, pour tout $w \in W^{\circ\,\alpha}$, 1_α désigne la fonction sur $\mathbf{T}_w(\alpha)^F$ égale à 1 sur $\mathbf{T}_w(\alpha)^{\circ\,F}.\alpha$ et nulle en dehors. Finalement,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}\left(\hat{R}^{\mathbf{L}}_{\chi*\alpha}\right)\\ &\quad = \sum_{\beta\in A^F}\frac{1}{|W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}|}\sum_{w\in W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}}\tilde{\chi}_\alpha\left({}^{\beta^{-1}}(ww_1)\phi\right)R^{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}(ww_1)}(\alpha)}(1_\alpha). \quad (7.6.4)\end{aligned}$$

D'autre part, si ζ est un caractère irréductible de $W^{\circ\,F}$ invariant sous α, on a, par un calcul analogue,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}\hat{R}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}\\ &\quad = \mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}\mathrm{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^F(\zeta)}\hat{R}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{\zeta*\alpha}\\ &\quad = \frac{1}{|A^F(\zeta)|}\sum_{\beta\in A^F}\mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}\hat{R}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{{}^\beta\zeta\cdot\alpha}\\ &\quad = \sum_{\beta\in A^F}\frac{1}{|W^{\circ\,\alpha}|}\sum_{w\in W^{\circ\,\alpha}}\tilde{\zeta}_\alpha\left({}^{\beta^{-1}}w\phi\right)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_w(\alpha)}(1_\alpha).\end{aligned}$$

Compte tenu de la formule (7.6.4), il suffit, pour montrer la formule (7.6.3), de prouver que, pour tout $\beta \in A^F$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}|}\sum_{w\in W^{\circ\,\alpha}_{\mathbf{L}}}\tilde{\chi}_\alpha\left({}^{\beta^{-1}}(ww_1)\phi\right)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}(ww_1)}(\alpha)}(1_\alpha)\\ &\quad = \frac{1}{|W^{\circ\,\alpha}|}\sum_{\zeta\in(\mathrm{Irr}\,W^{\circ\,F})^\alpha} n_\zeta \sum_{w\in W^\circ(\alpha)}\tilde{\zeta}_\alpha\left({}^{\beta^{-1}}w\phi\right)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_w(\alpha)}(1_\alpha).\end{aligned}$$

Pour cela, on peut supposer que $\beta = 1$, et le résultat découle du lemme 3.1.1. ∎

8. PREUVE DU THÉORÈME 7.3.2

8.1. *Deux remarques.* Les deux résultats suivants découlent de [DM2].

LEMME 8.1.1 (Digne–Michel, [DM2], proposition 4.12). *On a* $\tilde{R}_1 = 1_{\mathbf{G}^F}$.

Ce lemme montre que, lorsque χ est le caractère trivial de $W^{\circ F}$, alors le théorème 7.3.2 est vrai.

LEMMA 8.1.2. *Soit* χ *un caractère irréductible de* $W^{\circ F}$. *Alors* $\langle \tilde{R}_\chi, \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F(\chi)} = 1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{R}_\chi, \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^F(\chi)} \\
&\quad = \frac{1}{|A^F(\chi)|} \sum_{\alpha \in A^F(\chi)} \langle \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} \tilde{R}_\chi, \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} \tilde{R}_\chi \rangle_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} \\
&\quad = \frac{1}{|A^F(\chi)|} \sum_{\alpha \in A^F(\chi)} \Bigg(\sum_{\substack{w \in W^{\circ \alpha} \\ w' \in W^{\circ \alpha}}} \tilde{\chi}_\alpha(w\phi) \tilde{\chi}_\alpha(w'\phi) \\
&\qquad\qquad \times \langle \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_w(\alpha)}(1), \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{w'}(\alpha)}(1) \rangle_{\mathbf{G}^{\circ F}\alpha} \Bigg) \\
&\quad = \frac{1}{|A^F(\chi)|} \sum_{\alpha \in A^F(\chi)} \langle \tilde{\chi}_\alpha, \tilde{\chi}_\alpha \rangle_{W^{\circ \alpha}.\phi} \\
&\quad = 1,
\end{aligned}$$

la troisième égalité résultant de [DM2], proposition 4.8. ∎

Par ailleurs, on sait que la restriction de $\tilde{R}_\chi$ à $\mathbf{G}^{\circ F}$ est égale à R°_χ, donc il suffit, pour montrer le théorème 7.3.2, de montrer que $\tilde{R}_\chi$ est un caractère virtuel de $\mathbf{G}^F(\chi)$.

8.2. *Réductions.* Par produits directs, on peut supposer que $r = 1$. De plus, on peut supposer que A est le centralisateur de σ dans $\mathfrak{S}_{d_1}$ et donc, toujours par produits directs, on peut se ramener au cas où toutes les orbites de σ (dans I_{d_1}) ont même longueurs.

Donc pour simplifier, on notera $d = d_1$, $n = n_1$ et on notera e l'ordre de σ. Alors e divise d (on écrit $d = ke$) et on peut même supposer que

$$\sigma = (1, \ldots, e)(e+1, \ldots, 2e) \ldots ((k-1)e+1, \ldots, ke).$$

Pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on notera s_i l'élément de A égal à

$$s_i = ((i-1)e+1, ie+1)((i-1)e+2, ie+2) \ldots (ie, (i+1)e).$$

On notera C le sous-groupe de A engendré par $s_1, \dots, s_{k-1}$ et B le sous-groupe de A formé des éléments de A stabilisant toutes les orbites de σ. On a alors

$$C \simeq \mathfrak{S}_k,$$
$$B \simeq (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^k,$$
$$A = B \rtimes C.$$

Via ces isomorphismes, l'action de C sur B se traduit par l'action de $\mathfrak{S}_k$ sur $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^k$ par permutation des coordonnées. D'autre part, on remarque que $A^F = A$, $B^F = B$, et $C^F = C$.

8.3. *Preuve du théorème* 7.3.2 *lorsque* $e = d$. On suppose dans ce paragraphe 8.3, et dans ce paragraphe seulement, que $d = e$. Dans ce cas, on a $A = B$ et $C = \{1\}$. De plus, A est engendré par σ et donc A agit trivialement sur $W^{\circ F} = W^{\circ \sigma}$. Par conséquent, A stabilise tous les caractères irréductibles de $W^{\circ F}$ et donc tous les caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\circ F}$.

Soit $\mathbf{L}_n$ un sous-groupe de Levi standard de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ (standard relativement à $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{B}_n$). On note $\mathbf{L}^\circ = \mathbf{L}_n \times \cdots \times \mathbf{L}_n$ (d fois) et $\mathbf{L} = \mathbf{L}^\circ \rtimes A$. Alors $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$. On notera $W_{\mathbf{L}}$ (respectivement $W_{\mathbf{L}}^\circ$) le groupe de Weyl de $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{L}^\circ$) relativement à $\mathbf{T}_1$.

LEMME 8.3.1. *Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}^{\circ F}$. On écrit*

$$\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ F}}^{W^{\circ F}} \chi = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W^{\circ F}} n_\zeta \zeta,$$

où les n_ζ sont des entiers naturels ($\zeta \in \mathrm{Irr}\, W^{\circ F}$). *Alors*

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\left(\tilde{R}_\chi^{\mathbf{L}}\right) = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W^{\circ F}} n_\zeta \tilde{R}_\zeta^{\mathbf{G}}.$$

Preuve. Il suffit de le prouver pour les restrictions à $\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^i$ (où $i \in \mathbb{Z}$). Cela résulte alors de la transitivité des foncteurs de Lusztig (cf. proposition 6.3.3) et des lemmes 3.1.1 et 3.2.1. En effet, le lemme 3.2.1 montre que

$$\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ}\sigma^i\phi}^{W^{\circ}\sigma^i\phi} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{\sigma^i} = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W^{\circ F}} n_\zeta \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\sigma^i}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (remarquons que l'action de ϕ sur W° est égale à l'action de σ^{-1}). ∎

COROLLAIRE 8.3.2. *Pour tout caractère irréductible χ de $W^{\circ F}$, la fonction centrale $\tilde{R}_\chi$ est un caractère irréductible (unipotent) de $\mathbf{G}^F$ dont la restriction à $\mathbf{G}^{\circ F}$ est R°_χ.*

Preuve. Compte tenu du lemme 8.1.2 on a vu qu'il suffisait de montrer que $\tilde{R}_\chi$ est un caractère virtuel. En utilisant les lemmes 8.1.1 et 8.3.1, c'est une conséquence du fait que tout caractère irréductible du groupe symétrique est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'induits du caractère trivial à partir de sous-groupes paraboliques (cf. [F]). ▮

Avant de continuer la preuve du théorème 7.3.2, on va expliciter le lien entre le résultat précédent et les résultats sur la *descente de Shintani* des caractères irréductibles du groupe général linéaire.

On notera $\mathbf{G}_n$ le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$, et on notera $F_0\colon \mathbf{G}_n \to \mathbf{G}_n$, $g \mapsto g^{(q)}$. L'application

$$\begin{aligned} \tau_d\colon \quad \mathbf{G}_n^{F_0^d} &\to \mathbf{G}^{\circ F} \\ g &\mapsto \left(g, g^{(q)}, \dots, g^{(q^{d-1})}\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. D'autre part, si $g \in \mathbf{G}_n^{F_0^d}$, alors $\tau_d(F_0(g)) = {}^{\sigma^{-1}}\tau_d(g)$. Par suite, τ_d se prolonge en un isomorphisme de groupes, toujours noté

$$\begin{aligned} \tau_d\colon \quad \mathbf{G}_n^{F_0^d} \rtimes \langle \phi_0 \rangle &\to \mathbf{G}^F \\ g\phi_0^i &\mapsto \tau_d(g)\sigma^{-i} \end{aligned}$$

où ϕ_0 désigne l'automorphisme de $\mathbf{G}_n^{F_0^d}$ induit par F_0.

Soit $g \in \mathbf{G}_n^{F_0^d}$. D'après le théorème de Lang, on trouve $x \in \mathbf{G}_n$ tel que $g = x^{-1}F_0(x)$. Alors $g' = F_0^d(x)x^{-1} \in \mathbf{G}_n^{F_0}$, et l'application qui, à la ϕ_0-classe de g dans $\mathbf{G}_n^{F_0^d}$, associe la classe de conjugaison de g' dans $\mathbf{G}_n^{F_0}$ est bien définie et est bijective. On la note

$$N_{F_0^d/F_0}\colon H^1\left(F_0, \mathbf{G}_n^{F_0^d}\right) \to \mathrm{Cl}\left(\mathbf{G}_n^{F_0}\right).$$

On identifie l'espace des fonctions sur $H^1(F_0, \mathbf{G}_n^{F_0^d})$ avec l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{G}_n^{F_0^d}.\phi_0)$ des fonctions centrales sur $\mathbf{G}_n^{F_0^d}.\phi_0$. De même, on identifie l'espace des fonctions sur $\mathrm{Cl}(\mathbf{G}_n^{F_0})$ avec l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{G}_n^{F_0})$ des fonctions centrales sur $\mathbf{G}_n^{F_0}$. La bijection $N_{F_0^d/F_0}$ induit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels noté:

$$\mathrm{Sh}_{F_0^d/F_0}\colon \mathscr{C}\left(\mathbf{G}_n^{F_0}\right) \to \mathscr{C}\left(\mathbf{G}_n^{F_0^d}.\phi_0\right),$$

appelée *descente de Shintani* de F_0^d à F_0.

D'autre part, l'isomorphisme τ_d induit un isomorphisme τ_d^*: $\mathscr{C}(\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^{-1}) \to \mathscr{C}(\mathbf{G}_n^{F_0^d}.\phi_0)$, $f \mapsto f \circ \tau_d$. On pose

$$\mathrm{Sh} = \tau_d^{*-1} \circ \mathrm{Sh}_{F_0^d/F_0}: \mathscr{C}\left(\mathbf{G}_n^{F_0}\right) \to \mathscr{C}\left(\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^{-1}\right)$$

de sorte que l'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(\mathbf{G}_n^{F_0}) \arrow[r, "\mathrm{Sh}_{F_0^d/F_0}"] \arrow[dr, "\mathrm{Sh}"'] & \mathscr{C}(\mathbf{G}_n^{F_0^d}.\phi_0) \arrow[d, "\tau_d^*"] \\ & \mathscr{C}(\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^{-1}) \end{tikzcd}$$

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. Si on note W_n le groupe de Weyl de $\mathbf{G}_n$ relativement à $\mathbf{T}_n$, alors on a un isomorphisme naturel $W^{\circ F} \simeq W_n$. De plus, F_0 agit trivialement sur W_n, et donc le caractère χ définit un caractère irréductible de $W_n^{F_0} = W_n$ que l'on notera χ_n. Par conséquent, on peut aussi définir un caractère irréductible unipotent $R_{\chi_n}^{G_n}$ de $\mathbf{G}_n^{F_0}$.

THÉORÈME 8.3.3. *Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. Alors,*

$$\mathrm{Sh}\left(R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n}\right) = \mathrm{Res}_{\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^{-1}}^{\mathbf{G}^F} \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}}.$$

Preuve. D'après [DM2], théorème 5.6, il existe un racine $d^{\text{ème}}$ de l'unité ζ telle que

$$\mathrm{Sh}\left(R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n}\right) = \zeta \ \mathrm{Res}_{\mathbf{G}^{\circ F}.\sigma^{-1}}^{\mathbf{G}^F} \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}}.$$

D'autre part, on a, par définition, $\mathrm{Sh}(R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n})(\sigma^{-1}) = R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n}(1)$, donc il suffit de montrer que $R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n}(1) = \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}}(\sigma^{-1})$ ou encore que $R_{\chi_n}^{\mathbf{G}_n}(1) = \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}}(\sigma)$.

Or, d'après [DM2], théorème 4.13, on a, pour tout $w \in W^{\circ \sigma}$,

$$R_{\mathbf{T}_w(\sigma)}^{\mathbf{G}(\sigma)}(1)(\sigma) = R_{(\mathbf{T}_w^\sigma)^\circ}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma}}(1)(1),$$

ce qui montre le résultat. ∎

8.4. *Fin de la preuve du théorème* 7.3.2. On revient aux notations du paragraphe 8.2. On notera $\mathbf{H}$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ égal à $\mathbf{G}^\circ \rtimes B$. Alors $\mathbf{H}$ est un sous-groupe distingué F-stable de $\mathbf{G}$, de même composante neutre, et $\mathbf{G}$ est le produit semi-direct $\mathbf{H} \rtimes C$. D'autre part, $\mathbf{H}$ est un produit direct de groupes isomorphes aux groupes considérés dans le paragraphe précédent 8.3. Donc le théorème 7.3.2 est valide pour $\mathbf{H}$.

On notera $\mathbf{H}_e$ le groupe $\mathbf{G}$ du paragraphe précédent 8.3 (lorsque $d = e$). Alors on a $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e \times \cdots \times \mathbf{H}_e$ (k fois) et le groupe $C \simeq \mathfrak{S}_k$ agit par permutation des composantes.

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. Alors χ est invariant par B, c'est-à-dire $B(\chi) = B$, et donc $A(\chi) = B \rtimes C(\chi)$. D'autre part, comme on l'a fait remarquer, $\tilde{R}_\chi^{\mathbf{H}}$ est un caractère irréductible de $\mathbf{H}^F$. Le théorème 7.3.2 résulte alors du lemme suivant.

LEMME 8.4.1. *$\tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}^F(\chi)}$ est l'extension canonique à $\mathbf{G}^F(\chi)$ (au sens de la définition 2.3.3) du caractère irréductible $\tilde{R}_\chi^{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}^F$.*

Preuve. On note $\tilde{\rho}$ l'extension canonique à $\mathbf{G}^F(\chi)$ du caractère irréductible $\tilde{R}_\chi^{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}^F$. Il suffit de montrer que, pour tout $\gamma \in C(\chi)$ et pour tout $h \in \mathbf{H}^F$, on a

$$\tilde{\rho}(h\gamma) = \tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}^F(\chi)}(h\gamma).$$

Encore en raisonnant par produits directs, on peut supposer que χ est invariant sous C et que $\gamma = s_1 \dots s_{k-1}$ (cf. notations du paragraphe 8.2).

On écrit $h = (h_1, \dots, h_k) \in (\mathbf{H}_e^F)^k$. On note τ l'élément de $\mathbf{H}_e$ correspondant à σ dans le cas où $d = e$, de sorte que l'on peut identifier $\sigma \in \mathbf{H}$ avec $(\tau, \dots, \tau) \in \mathbf{H}_e^k$. Il existe $a_1, \dots, a_k$ dans $\mathbb{Z}$ et $h_1^\circ, \dots, h_k^\circ$ dans $\mathbf{H}_e^{\circ F}$ tels que

$$\forall 1 \leq i \leq k, \quad h_i = h_i^\circ \tau^{a_i}.$$

On posera $\beta = (\tau^{a_1}, \dots, \tau^{a_k})$ et $h^\circ = (h_1'^\circ, \dots, h_k^\circ)$ de sorte que $h = h^\circ\beta$.

Quitte à remplacer $\beta\gamma$ par

$$\begin{aligned}(1, \tau^{-a_2}, \tau^{-a_2-a_3}, \dots, \tau^{-a_2-\cdots-a_k})\beta\gamma(1, \tau^{-a_2}, \tau^{-a_2-a_3}, \dots, \tau^{-a_2-\cdots-a_k})^{-1} \\ = (\tau^a, 1, \dots, 1)\gamma\end{aligned}$$

(où $a = a_1 + \cdots + a_k$), on peut supposer, et ce sera fait par la suite, que $a_2 = \cdots = a_k = 0$.

On note $\pi_\gamma \colon \mathbf{H}^F\gamma \to (\mathbf{H}^\gamma)^F$ l'application définie dans le lemme 2.2.1. Ici, on a

$$\pi_\gamma(h) = \underbrace{(h', \dots, h')}_{k \text{ fois}},$$

où

$$h' = h_k^\circ \dots h_2^\circ h_1^\circ \tau^a.$$

On posera $h'^\circ = h_k^\circ \dots h_2^\circ h_1^\circ$ et $\pi_\gamma(h)^\circ = (h'^\circ, \dots, h'^\circ)$. On a alors $\pi_\gamma(h) = \pi_\gamma(h)^\circ \sigma^a$.

On notera aussi ρ_γ le caractère irréductible de $(\mathbf{H}^\gamma)^F$ associé à $\tilde{\rho}$ par la proposition 2.2.2. On a alors

$$\tilde{\rho}(h\gamma) = \rho_\gamma\big(\pi_\gamma(h)\big).$$

D'autre part, par définition,

$$\tilde{R}_\chi^{\mathbf{G}}(h\gamma) = \frac{1}{|W^{\circ\,\beta\gamma}|} \sum_{w \in W^{\circ\,\beta\gamma}} \tilde{\chi}_{\beta\gamma}(w\phi) R_{\mathbf{T}_w(\beta\gamma)}^{\mathbf{G}(\beta\gamma)}(1)(h\gamma).$$

Le groupe $W^{\circ\,\gamma}$ est stable par l'action de σ donc au caractère irréductible χ_γ de $W^{\circ\,\gamma}$ est associé un caractère $(\chi_\gamma)_{\sigma^a}$ de $(W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a}$. De plus, $(\chi_\gamma)_{\sigma^a}$ est invariant sous F et on notera $(\tilde{\chi}_\gamma)_{\sigma^a}$ son extension canonique à $(W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a} \rtimes \langle F \rangle$.

On peut alors vérifier que

$$\begin{aligned}\rho_\gamma&\big(\pi_\gamma(h)^\circ\,\sigma^a\big)\\ &= \frac{1}{\big|\big(W^{\circ\,\gamma}\big)^{\sigma^a}\big|} \sum_{w \in (W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a}} \big(\tilde{\chi}_\gamma\big)_{\sigma^a}(w\phi) R_{\mathbf{T}'_w(\sigma^a)}^{\mathbf{G}(\sigma^a)^\gamma}(1)\big(\pi_\gamma(h)^\circ\,\sigma^a\big),\end{aligned}$$

où $\mathbf{T}'_w(\sigma^a)$ désigne un quasi-tore maximal F-stable de $\mathbf{G}(\sigma^a)^\gamma$ associé à la F-classe de w dans $(W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a}$.

On vérifie alors le lemme suivant.

LEMME 8.4.2. (a) *On a* $W^{\circ\,\beta\gamma} = (W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a}$.

(b) *On a* $\tilde{\chi}_{\beta\gamma} = (\tilde{\chi}_\gamma)_{\sigma^a}$.

(c) *Pour tout* $w \in W^{\circ\,\beta\gamma}$, $\mathbf{T}'_w(\sigma^a) = \mathbf{T}_w(\beta\gamma)^\gamma$.

(Pour le (c), on vérifie que $\mathbf{T}_w(\beta\gamma)^\gamma \subset \mathbf{G}(\sigma^a)$ et que $\sigma^a \in \mathbf{T}_w(\beta\gamma)^\gamma$; en effet, $(\beta\gamma)^k = \sigma^a$ et $\langle \beta\gamma \rangle^\gamma = \langle \sigma^a \rangle$.)

Compte tenu de ce lemme, il suffit, pour montrer le lemme 8.4.1, de prouver que, pour tout $w \in W^{\circ\,\beta\gamma}$, on a

$$R_{\mathbf{T}_w(\beta\gamma)}^{\mathbf{G}(\beta\gamma)}(1)(h\gamma) = R_{\mathbf{T}'_w(\sigma^a)}^{\mathbf{G}(\sigma^a)^\gamma}(1)\big(\pi_\gamma(h)^\circ\,\sigma^a\big). \tag{8.4.3}$$

On note $\mathbf{X}$ la variété des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}^\circ$. Si $w \in W^\circ$, on note $\mathbf{X}(w)$ la sous-variété de $\mathbf{X}$ formé des sous-groupes de Borel $\mathbf{B}^\circ$ de $\mathbf{G}^\circ$ tels que $F(\mathbf{B}^\circ)$ soit en position w par rapport à $\mathbf{B}^\circ$.

LEMMA 8.4.4 (Digne–Michel, [DM2], proposition 5.3). *Soit* $w \in W^{\circ\,\beta\gamma}$. *Alors,*

$$R_{\mathbf{T}_w(\beta\gamma)}^{\mathbf{G}(\beta\gamma)}(1)(h^\circ\beta\gamma) = \mathrm{Tr}\big(h^\circ\beta\gamma, H_c^*(\mathbf{X}(w))\big).$$

On notera $\mathbf{X}^{\gamma}$ la variété des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}^{\circ\,\gamma}$ (compte tenu de [DM2], définition-théorème 1.15, la variété $\mathbf{X}^{\gamma}$ est isomorphe à la sous-variété de $\mathbf{X}$ formé des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}^{\circ}$ stables sous γ, ce qui justifie la notation). Pour $w \in W^{\circ\,\gamma}$, on notera $\mathbf{X}^{\gamma}(w)$ la sous-variété de $\mathbf{X}^{\gamma}$ formé des sous-groupes de Borel $\mathbf{B}_1^{\circ}$ de $\mathbf{G}^{\circ\,\gamma}$ tel que $F(\mathbf{B}_1^{\circ})$ soit en position w par rapport à $\mathbf{B}_1^{\circ}$. Compte tenu du lemme précédent 8.4.4, il suffit de montrer le lemme suivant.

LEMME 8.4.5. *Soit* $W^{\circ\,\beta\gamma} = (W^{\circ\,\gamma})^{\sigma^a}$. *On a*

$$\mathrm{Tr}\big(h^{\circ}\beta\gamma, H_c^*(\mathbf{X}(w))\big) = \mathrm{Tr}\big(\pi_{\gamma}(h)^{\circ}\,\sigma^a, H_c^*(\mathbf{X}^{\gamma}(w))\big).$$

Preuve du lemme 8.4.5. Soit $\mathbf{B}^{\circ} \in \mathbf{X}(w)$. On écrit $\mathbf{B}^{\circ} = (\mathbf{B}_1^{\circ}, \dots, \mathbf{B}_k^{\circ})$, où $\mathbf{B}_i^{\circ}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{H}_e^{\circ}$ (on remarque que $\mathbf{G}^{\circ} = (\mathbf{H}_e^{\circ})^k$). Alors on considère l'application

$$\begin{array}{llll} \theta\colon & \mathbf{X}(w) & \to & \mathbf{X}^{\gamma}(w)^k \\ & \mathbf{B}^{\circ} & \mapsto & \Big(\underbrace{(\mathbf{B}_1^{\circ} \times \cdots \times \mathbf{B}_1^{\circ})^{\gamma}}_{k \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\mathbf{B}_k^{\circ} \times \cdots \times \mathbf{B}_k^{\circ})^{\gamma}}_{k \text{ fois}}\Big). \end{array}$$

Alors θ est un isomorphisme de variétés.

On a alors

$$\begin{aligned} \theta\big({}^{h^{\circ}\,\beta\gamma}(\mathbf{B}_1^{\circ}, \dots, \mathbf{B}_k^{\circ})\big) &= \theta\big({}^{h^{\circ}}\big({}^{\tau^a}\mathbf{B}_k^{\circ}, \mathbf{B}_1^{\circ}, \dots, \mathbf{B}_{k-1}^{\circ}\big)\big) \\ &= \theta\big({}^{h_1^{\circ}\tau^a}\mathbf{B}_k^{\circ}, {}^{h_2^{\circ}}\mathbf{B}_1^{\circ}, \dots, {}^{h_k^{\circ}}\mathbf{B}_k^{\circ}\big) \\ &= {}^{(h_1^{\circ}\tau^a, h_2^{\circ}, \dots, h_k^{\circ})\varphi}\theta(\mathbf{B}_1^{\circ}, \dots, \mathbf{B}_k^{\circ}), \end{aligned}$$

où φ désigne l'automorphisme $\mathbf{X}^{\gamma}(w)^k \to \mathbf{X}^{\gamma}(w)^k$, $(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k) \mapsto (\mathbf{B}_k, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{k-1})$. Par la formule de Künneth, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\big((h_1^{\circ}\tau^a, h_2^{\circ}, \dots, h_k^{\circ})\,\varphi, H_c^*\big(\mathbf{X}^{\gamma}(w)^k\big)\big) \\ &\qquad = \mathrm{Tr}\big(h_k^{\circ} \dots h_2^{\circ} h_1^{\circ}\tau^a, H_c^*(\mathbf{X}^{\gamma}(w))\big). \end{aligned}$$

Cela termine a preuve du lemme 8.4.5 et donc la preuve du lemme 8.4.1. ∎

ACKNOWLEDGMENT

Je remercie tout particulièrement Jean Michel qui a été à l'origine de ce travail et avec qui j'ai eu de très nombreuses et fructueuses discussions. Je remercie aussi Paul Fong qui a relu avec beaucoup d'attention une première version de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[D] F. Digne, Descente de Shintani et descente des scalaires, à paraître dans le *J. London Math. Soc.*

[DM1] F. Digne et J. Michel, "Representations of finite groups of Lie type," London Math. Soc. Students Texts 21, Cambridge Univ. Press, 1991.

[DM2] F. Digne et J. Michel, Groupes réductifs non connexes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 4^e *série* **27** (1994), 345–406.

[F] F. G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, *Preuß. Akad. Wiss.* (1900), 516–534 ($\simeq$ *Ges. Abhandlungen* **3**, 148–166).

[L1] G. Lusztig, On the finiteness of the number of unipotent classes, *Invent. Math.* **34** (1976), 201–213.

[L2] G. Lusztig, "Representations of finite Chevalley groups," Regional Conf. Series in Math., AMS **39**, 1977.

[LS] G. Lusztig et B. Srinivasan, The characters of the finite unitary groups, *J. Algebra* **49** (1977), 167–171.