

## Formule de Mackey pour $q$ grand

C. Bonnafé

*Mathématiques Paris 7, Case 7012, 2 Place Jussieu, Paris, F.75005, France*

*Communicated by Michel Broué*

Received February 3, 1997

### 0. INTRODUCTION

Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique réductif connexe défini sur une clôture algébrique  $\mathbb{F}$  du corps fini à  $p$  éléments  $\mathbb{F}_p$  (où  $p$  désigne un nombre premier). Soit  $F: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  un endomorphisme de Frobenius relatif à une  $\mathbb{F}_q$ -structure sur  $\mathbf{G}$  (où  $q$  est une puissance de  $p$  et  $\mathbb{F}_q$  désigne le sous-corps de  $\mathbb{F}$  à  $q$  éléments). On fixe un nombre premier  $l$  différent de  $p$  et on note  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  une clôture algébrique du corps  $l$ -adique  $\mathbb{Q}_l$ . Si  $\mathbf{P}$  est un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  et si  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Levi  $F$ -stable de  $\mathbf{P}$ ,  $G$ . Lusztig a construit un foncteur  $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}: \mathcal{H}^{\mathbf{L}^F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{G}^F}$  entre les groupes de Grothendieck des catégories des  $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathbf{L}^F$ -modules et des  $\overline{\mathbb{Q}}_l \mathbf{G}^F$ -modules respectivement, appelé foncteur d'induction de Lusztig. Ce foncteur admet un adjoint  $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}: \mathcal{H}^{\mathbf{G}^F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{L}^F}$ , appelé restriction de Lusztig.

La formule de Mackey pour l'induction de Lusztig décrit la composition d'un foncteur d'induction avec un foncteur de restriction de Lusztig. Plus précisément, si  $\mathbf{Q}$  est un autre sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  et si  $\mathbf{M}$  est un sous-groupe de Levi  $F$ -stable de  $\mathbf{Q}$ , on appelle *formule de Mackey* l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}
 & *R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} \\
 &= \sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \subset \mathbf{L} \cap^x \mathbf{Q}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \subset \mathbf{P} \cap^x \mathbf{M}} \circ (\text{ad } x)_*, \quad (\#)
 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  désigne l'ensemble des  $x$  dans  $\mathbf{G}$  tels que  $\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}$  contienne un tore maximal de  $\mathbf{G}$ , et où  $(\text{ad } x)_*: \mathcal{H}^{\mathbf{M}^F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}^F}$  désigne le foncteur naturel induit par la conjugaison par  $x$ . P. Deligne a montré que cette formule a lieu lorsque  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont  $F$ -stables (cf. [LS, théorème 2.5]), et, avec  $G$ . Lusztig, a montré qu'elle a lieu d'autre part lorsque  $\mathbf{L}$  ou  $\mathbf{M}$  est un

tore maximal (cf. [DL2, théorème 7]). Il est conjecturé qu'elle a lieu en toute généralité.

Le but de cet article est de montrer que la formule de Mackey a lieu si  $q$  est assez grand: on donne une borne explicite pour  $q$ , ne dépendant que de la donnée radicielle associée à  $\mathbf{G}$  (théorème 5.1.1). Plus précisément, si on note  $i(\mathbf{G})$  le plus grand des nombres  $|\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'^\circ|$  où  $\mathbf{Z}'$  parcourt l'ensemble des centres des sous-groupes réductifs connexes de  $\mathbf{G}$  de même rang que  $\mathbf{G}$  ( $\mathbf{Z}'^\circ$  désigne la composante neutre de  $\mathbf{Z}'$ ), et si on note  $l(\mathbf{G})$  le maximum des ordres (modulo le centre) des éléments semi-simples isolés des groupes  $\mathbf{G}'^*$  (c'est-à-dire dont la composante neutre du centralisateur n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique), où  $\mathbf{G}'^*$  parcourt "l'ensemble" des groupes duaux de sous-groupes réductifs connexes de  $\mathbf{G}$  de même rang que  $\mathbf{G}$ , on a le

THÉORÈME. *Supposons  $q > 1 + i(\mathbf{G})^2 l(\mathbf{G})$ . Alors la formule de Mackey (#) a lieu.*

La preuve imite la démonstration initiale de l'orthogonalité des caractères de Deligne–Lusztig donnée dans [DL1]; cette méthode m'a été suggérée par F. Digne et J. Michel qui pensent que le résultat qu'elle donne a été initialement obtenu par P. Deligne (1975, non publié). En particulier, ils m'ont fourni la proposition 2.3.6.

Le dernière section de cet article est consacrée à une approche de la formule de Mackey par la théorie des faisceaux-caractères. Elle consiste à se ramener à vérifier la formule de Mackey pour les fonctions absolument cuspidales à support unipotent: une base de l'espace de ces fonctions est donnée par les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères cuspidaux rationnels, et on sait calculer, grâce aux travaux de Lusztig, l'induit, au sens de Lusztig, de ces fonctions caractéristiques, en terme d'induction des faisceaux-caractères. On obtient alors une preuve de la formule de Mackey lorsque  $p$  est presque bon et  $q$  assez grand (théorème 6.1.1) totalement indépendante de la preuve précédente. L'intérêt de cette autre preuve est qu'elle est susceptible d'être améliorée si les résultats de [L4] le sont.

Je tiens à remercier François Digne pour les discussions que j'ai eues avec lui sur ce sujet et Jean Michel qui m'a encouragé dans ce travail et a relu avec beaucoup d'attention et de patience cet article permettant ainsi d'en améliorer considérablement la rédaction.

## 1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Si  $\mathbf{G}$  est un groupe algébrique, on notera  $\mathbf{G}^\circ$  sa composante neutre,  $\mathbf{G}_s$  (respectivement  $\mathbf{G}_{\text{uni}}$ ) l'ensemble des éléments semi-simples (respec-

tivement unipotents) de  $\mathbf{G}$ . Si  $x$  appartient à  $\mathbf{G}$ , on notera  $x_s$  (respectivement  $x_u$ ) sa partie semi-simple (respectivement unipotente); on notera aussi  $C_{\mathbf{G}}(x)$  le centralisateur de  $x$  dans  $\mathbf{G}$ , et  $C_{\mathbf{G}}^{\circ}(x)$  la composante neutre de  $C_{\mathbf{G}}(x)$ . D'autre part, si  $\mathbf{G}$  est un groupe algébrique défini sur le corps fini  $\mathbb{F}_q$ , on notera  $\sigma(\mathbf{G})$  le rang d'une tore déployé maximal de  $\mathbf{G}$ . On posera  $\varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^{\sigma(\mathbf{G})}$ . Si  $F: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  désigne l'endomorphisme de Frobenius correspondant à la  $\mathbb{F}_q$ -structure de  $\mathbf{G}$ , on notera  $H^1(F, \mathbf{G})$  l'ensemble des classes de  $F$ -conjugaison d'éléments de  $\mathbf{G}$ .

Si  $\mathbf{T}$  est un tore, on notera  $X(\mathbf{T})$  (respectivement  $Y(\mathbf{T})$ ) le groupe additif des caractères rationnels  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbb{F}^{\times}$  (respectivement des sous-groupes à un paramètre  $\mathbb{F}^{\times} \rightarrow \mathbf{T}$ ). On notera  $\langle , \rangle$  la dualité parfaite  $X(\mathbf{T}) \times Y(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

1.2. Si  $H$  est un groupe fini, les représentations de  $H$  seront considérées sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ . On notera  $\text{Irr}(H)$  l'ensemble des caractères irréductibles de  $H$  (sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ). On notera  $H^{\wedge}$  le groupe des caractères linéaires  $H \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ . Si  $H$  est abélien, on a  $\text{Irr}(H) = H^{\wedge}$ . En général, on a  $H^{\wedge} \simeq (H/H')^{\wedge}$  où  $H'$  désigne le groupe dérivé de  $H$ . On notera  $\text{Cl}(H)$  l'ensemble des classes de conjugaison de  $H$ , et par  $\mathcal{E}(H)$  le  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel des fonctions centrales  $H \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ . On notera  $\langle , \rangle_H$  (ou  $\langle , \rangle$ , s'il n'y a pas de confusion possible) le produit scalaire usuel sur  $\mathcal{E}(H)$ :

$$\forall f, g \in \mathcal{E}(H), \quad \langle f, g \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f(h) \overline{g(h)},$$

où  $x \mapsto \bar{x}$  est un automorphisme de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  tel que  $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$  pour toute racine de l'unité  $\zeta$  de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ .

On notera  $\mathcal{K}H$  le groupe de Grothendieck de la catégorie des  $H$ -modules (c'est-à-dire des  $\overline{\mathbb{Q}}_l H$ -modules) de dimension finie.

1.3. On se fixe une fois pour toutes un groupe réductif connexe  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbb{F}$ , défini sur  $\mathbb{F}_q$ , et on notera  $F: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On se fixe aussi deux sous-groupes paraboliques  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  de  $\mathbf{G}$  admettant des sous-groupes de Levi  $F$ -stables  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  respectivement ( $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  ne sont pas nécessairement  $F$ -stables). On note  $\mathbf{U}$  (respectivement  $\mathbf{V}$ ) le radical unipotent de  $\mathbf{P}$  (respectivement  $\mathbf{Q}$ ).

1.4. *Foncteurs de Lusztig.* On va rappeler ici la définition des foncteurs d'induction et de restriction de Lusztig. On pose

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{U}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}.$$

Le groupe  $\mathbf{G}^F$  (respectivement  $\mathbf{L}^F$ ) agit par translation à gauche (respectivement à droite) sur  $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}$ . On notera  $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})$  le  $\mathbf{G}^F$ -module- $\mathbf{L}^F$  virtuel

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

G. Lusztig (cf. [L1]) a construit à partir du bimodule virtuel  $H_c^*(\mathbf{Y}_U)$  des foncteurs entre les groupes de Grothendieck  $\mathcal{H}\mathbf{G}^F$  et  $\mathcal{H}\mathbf{L}^F$  notés:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}: \mathcal{H}\mathbf{L}^F &\rightarrow \mathcal{H}\mathbf{G}^F \\ \pi &\mapsto H_c^*(\mathbf{Y}_U) \otimes_{\mathbb{Q}_i \mathbf{L}^F} \pi, \\ *R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}: \mathcal{H}\mathbf{G}^F &\rightarrow \mathcal{H}\mathbf{L}^F \\ \pi &\mapsto H_c^*(\mathbf{Y}_U)^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_i \mathbf{G}^F} \pi, \end{aligned}$$

où  $H_c^*(\mathbf{Y}_U)^\vee$  désigne le dual de  $H_c^*(\mathbf{Y}_U)$  (c'est un  $\mathbf{L}^F$ -module- $\mathbf{G}^F$ ). Les deux foncteurs  $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  et  $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  sont appelés respectivement les foncteurs d'induction et de restriction de Lusztig. Ils sont adjoints l'un de l'autre.

Les foncteurs  $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  et  $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  induisent des applications linéaires entre les espaces de fonctions centrales  $\mathcal{C}(\mathbf{L}^F)$  et  $\mathcal{C}(\mathbf{G}^F)$ , toujours notés  $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  et  $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ . Les formules les décrivant sont les suivantes:

PROPOSITION 1.4.1. *Soient  $\lambda$  une fonction centrale sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\gamma$  une fonction centrale sur  $\mathbf{G}^F$ . Alors:*

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda)(g) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{l \in \mathbf{L}^F} \text{Tr}((g, l^{-1}), H_c^*(\mathbf{Y}_U)) \lambda(l), \quad (1.4.2)$$

$$*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\gamma)(l) = \frac{1}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{g \in \mathbf{G}^F} \text{Tr}((g^{-1}, l), H_c^*(\mathbf{Y}_U)) \gamma(g), \quad (1.4.3)$$

pour tous  $g \in \mathbf{G}^F$  et  $l \in \mathbf{L}^F$ .

*Preuve.* Cf. [DM1, proposition 4.5]. ■

*Remarque.* Les foncteurs d'induction et de restriction de Lusztig dépendent a priori du choix du sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  dont  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Levi. Cependant pour alléger les notations, on notera souvent  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  (respectivement  $*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ ) le foncteur  $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  (respectivement  $*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ ).

Il est bien connu que la formule de Mackey implique que les foncteurs d'induction et de restriction de Lusztig sont indépendants du choix du sous-groupe parabolique. Il peut donc sembler étrange d'employer ces notations avant d'avoir démontré cette formule. Le lecteur pourra cependant vérifier que, par la suite, le choix du sous-groupe parabolique est soit sans importance, soit fait de telle sorte que les énoncés soient valides.

1.5. *Formule de Mackey.* On notera  $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  l'ensemble des éléments  $x \in \mathbf{G}$  tels que  $\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}$  contienne un tore maximal de  $\mathbf{G}$ . On appelle

formule de Mackey pour le triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ , et on notera  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ , l'égalité suivante:

$$*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x)_* \quad (1.5.1)$$

qui peut encore s'écrire

$$*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x)_*. \quad (1.5.2)$$

*Remarque.* Dans la formule de Mackey ci-dessus, le foncteur  $R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}}$  doit être compris comme le foncteur  $R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \subset \mathbf{L} \cap^x \mathbf{Q}}$ .

La formule de Mackey a déjà été démontrée dans quelque cas (voir l'introduction). Voici ceux qui seront utilisés par la suite:

PROPOSITION 1.5.3.  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  a lieu dans les cas suivants:

- (i) Si  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont  $F$ -stables [LS, 2.5].
- (ii) Si  $\mathbf{L}$  ou  $\mathbf{M}$  est un tore maximal de  $\mathbf{G}$  [DL2, 12.7].

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux fonctions centrales sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement, on posera:

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \mu \rangle_{\mathbf{G}^F} - \sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \lambda, *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F}.$$

La formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  est équivalente à la nullité de  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu)$  pour toutes fonctions centrales  $\lambda$  et  $\mu$  sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement.

## 2. FORMULE DE MACKEY ET FONCTIONS DE GREEN

2.1 *Fonctions de Green.* On notera par la suite  $Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  l'application:

$$Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}: \mathbf{G}_{\text{uni}}^F \times \mathbf{L}_{\text{uni}}^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$$

$$(u, v) \mapsto \text{Tr}((u, v), H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}})).$$

La fonction  $Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  est appelée la *fonction de Green* associée à  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{G}$ .

*Remarque.* Tout comme le foncteur d'induction de Lusztig, la fonction de Green  $Q_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$  dépend a priori du choix du sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$  de

$\mathbf{G}$  dont  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Levi. Cependant, toujours pour alléger les notations, on notera souvent  $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  la fonction de Green  $Q_{\mathbf{L}_{\mathbf{C}_P}}^{\mathbf{G}}$ .

Soient  $g \in \mathbf{G}^F$  et  $l \in \mathbf{L}^F$ . On pose  $s = g_s$ ,  $u = g_u$ ,  $t = l_s$  et  $v = l_u$ . Soit  $\lambda$  (respectivement  $\gamma$ ) une fonction centrale sur  $\mathbf{L}^F$  (respectivement  $\mathbf{G}^F$ ). Les "formules du caractère" (cf., par exemple, [DM1, proposition 12.2]) sont les suivantes:

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)(su) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \frac{1}{|C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)^F|} \sum_{\substack{h \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^h\mathbf{L}}} \sum_{v \in C_{h\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F_{\text{uni}}} Q_{C_{h\mathbf{L}}^{\circ}(s)}^{C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)}(u, v^{-1})^h \lambda(sv), \quad (2.1.1)$$

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\gamma)(tv) = \frac{1}{|C_{\mathbf{G}}^{\circ}(t)^F|} \sum_{u \in C_{\mathbf{G}}^{\circ}(t)^F_{\text{uni}}} Q_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(t)}^{C_{\mathbf{G}}^{\circ}(t)}(u, v^{-1}) \gamma(tu). \quad (2.1.2)$$

**2.2. Formule de Mackey pour les fonctions de Green.** On reprend les notations du paragraphe 1.5. Si  $u$  (respectivement  $v$ ) est un élément unipotent de  $\mathbf{G}^F$  (respectivement  $\mathbf{L}^F$ ), on notera  $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u, \cdot)$  (respectivement  $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\cdot, v)$ ) la fonction sur  $\mathbf{L}^F$  (respectivement  $\mathbf{G}^F$ ) valant 0 en dehors des éléments unipotents et valant  $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u, v)$  en  $v$  (respectivement  $u$ ).

On appellera par la suite *formule de Mackey pour les fonctions de Green* pour le triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  l'égalité:

$$\begin{aligned} & \langle Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\cdot, u^{-1}), Q_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\cdot, v^{-1}) \rangle_{\mathbf{G}^F} \\ &= \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle Q_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(u, \cdot), Q_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}({}^xv, \cdot) \rangle_{\mathbf{L}^F \cap {}^x\mathbf{M}^F}, \end{aligned}$$

pour tous  $u \in \mathbf{L}_{\text{uni}}^F$  et  $v \in \mathbf{M}_{\text{uni}}^F$ .

On posera, pour tous  $u \in \mathbf{L}_{\text{uni}}^F$  et  $v \in \mathbf{M}_{\text{uni}}^F$ ,

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(u, v) &= \langle Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\cdot, u^{-1}), Q_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\cdot, v^{-1}) \rangle_{\mathbf{G}^F} \\ &- \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle Q_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(u, \cdot), Q_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}({}^xv, \cdot) \rangle_{\mathbf{L}^F \cap {}^x\mathbf{M}^F}. \end{aligned}$$

La formule de Mackey pour les fonctions de Green est équivalente à la nullité de  $Q_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(u, v)$  pour tous  $u \in \mathbf{L}_{\text{uni}}^F$  et  $v \in \mathbf{M}_{\text{uni}}^F$ .

**2.3. Un lemme de récurrence.** Soit  $f$  une fonction centrale sur  $\mathbf{G}^F$  et soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^F$ . On définit une fonction centrale  $d_s^{\mathbf{G}}f$  sur  $C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)$  de la manière suivante:

$$d_s^{\mathbf{G}}f(u) = \begin{cases} f(su) & \text{si } u \text{ est unipotent,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $s$  et  $t$  sont des éléments semi-simples de  $\mathbf{G}^F$  et  $\mathbf{L}^F$  respectivement, alors les formules du caractère 2.1.1 et 2.1.2 s'écrivent:

$$d_s^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|\mathbf{L}^F| \cdot |C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)^F|} \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^s\mathbf{L}}} |C_{{}^s\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| R_{C_{{}^s\mathbf{L}}^{\circ}(s)}^{C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)} \circ d_s^{{}^s\mathbf{L}} \circ (\text{ad } g)_* \quad (2.3.1)$$

$$d_t^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(t)}^{C_{\mathbf{G}}^{\circ}(t)} \circ d_t^{\mathbf{G}}. \quad (2.3.2)$$

*Remarque.* Si  $z \in \mathbf{Z}^F$ , la formule du caractère 2.3.1 s'écrit

$$d_z^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ d_z^{\mathbf{L}}. \quad (2.3.3)$$

Deux fonctions centrales  $\lambda$  et  $\lambda'$  sur  $\mathbf{L}^F$  sont égales si et seulement si les fonctions  $d_s^{\mathbf{L}}\lambda$  et  $d_s^{\mathbf{L}}\lambda'$  sont égales pour tout élément semi-simple  $s \in \mathbf{L}^F$ . Pour vérifier la formule de Mackey, il est donc équivalent de vérifier les égalités obtenues en composant à gauche chaque membre par l'application  $d_s^{\mathbf{L}}$  (où  $s$  parcourt l'ensemble des éléments semi-simples de  $\mathbf{L}^F$ ).

On notera  $\mathcal{S}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  l'ensemble des triplets  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  où  $\mathbf{G}'$  est un sous-groupe réductif connexe  $F$ -stable de  $\mathbf{G}$  de même rang, et où  $\mathbf{L}'$  et  $\mathbf{M}'$  sont des sous-groupes de Levi  $F$ -stables de sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{G}'$  tels que  $\mathbf{L}'$  est contenu dans un conjugué de  $\mathbf{L}$  sous  $\mathbf{G}^F$  et  $\mathbf{M}'$  est contenu dans un conjugué de  $\mathbf{M}$  sous  $\mathbf{G}^F$  et tels que  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  ne soit pas conjugué à  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  sous  $\mathbf{G}^F$  (on a alors  $\dim \mathbf{G}' + \dim \mathbf{L}' + \dim \mathbf{M}' < \dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ ). Cette notation est introduite dans le but de raisonner par récurrence sur l'entier naturel  $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ .

LEMMA 2.3.4. *On suppose  $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  pour tout  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{S}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ . Soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathbf{L}^F$ , n'appartenant pas au centre de  $\mathbf{G}$ . Alors*

$$d_s^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x)_* .$$

*Preuve.* Cette preuve ne présente pas de difficultés: c'est simplement une application systématique des formules 2.3.1 et 2.3.2. En voici le détail.

Puisque  $s$  n'est pas central dans  $\mathbf{G}$ , alors, pour tout  $g \in \mathbf{G}^F$  tel que  $s \in {}^g\mathbf{M}$ , le triplet  $(C_{\mathbf{G}}^\circ(s), C_{\mathbf{L}}^\circ(s), C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s))$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
d_s^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} &= \frac{1}{|\mathbf{M}^F| \cdot |C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F|} \\
&\times \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} |C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)^F| *R_{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)} \circ R_{C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^g\mathbf{M}} \circ (\text{ad } g) * \\
&= \frac{1}{|\mathbf{M}^F| \cdot |C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F|} \\
&\times \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} \sum_{h \in \mathcal{S}_{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)}(C_{\mathbf{L}}^\circ(s), C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s))^F} \frac{|C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F \cap {}^h C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)^F|}{|C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F|} \\
&\times R_{C_{\mathbf{L}}^\circ(s) \cap {}^h C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)} \circ *R_{C_{\mathbf{L}}^\circ(s) \cap {}^h C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s)} \circ (\text{ad } h) * \circ d_s^{{}^g\mathbf{M}} \circ (\text{ad } g) * \\
&= \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} \sum_{h \in \mathcal{S}_{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)}(C_{\mathbf{L}}^\circ(s), C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s))^F} \frac{|C_{\mathbf{L} \cap {}^h\mathbf{M}}^\circ(s)^F|}{|\mathbf{M}^F| \cdot |C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F| \cdot |C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F|} \\
&\times R_{C_{\mathbf{L} \cap {}^h\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)} \circ *R_{C_{\mathbf{L} \cap {}^h\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{{}^h\mathbf{M}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^h\mathbf{M}} \circ (\text{ad } hg) *
\end{aligned}$$

où la première égalité vient de 2.3.1 et 2.3.2 et la deuxième de  $\mathcal{M}(C_{\mathbf{G}}^\circ(s), C_{\mathbf{L}}^\circ(s), C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s))$  appliqué sous la forme 1.5.2. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x) * \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap {}^x\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x) * \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \frac{1}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F| \cdot |C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F|} \sum_{\substack{l \in \mathbf{L}^F \\ s \in \mathbf{L} \cap {}^{lx}\mathbf{M}}} |C_{\mathbf{L} \cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)^F| \\
&\times R_{C_{\mathbf{L} \cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)} \circ *R_{C_{\mathbf{L} \cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{{}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^{lx}\mathbf{M}} \circ (\text{ad } lx) * .
\end{aligned}$$



En prenant  $y = lx$  comme nouvelle variable dans le dernier membre obtenu, on obtient:

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ (\text{ad } x) * \\ &= \sum_{\substack{y \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F \\ s \in \mathbf{L} \cap^y \mathbf{M}}} \frac{|C_{\mathbf{L} \cap^y \mathbf{M}}^{\circ}(s)^F|}{|\mathbf{M}^F| \cdot |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F|} R_{C_{\mathbf{L} \cap^y \mathbf{M}}^{\circ}(s)}^{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)} \circ *R_{C_{\mathbf{L} \cap^y \mathbf{M}}^{\circ}(s)}^{C_{\mathbf{M}}^{\circ}(s)} \circ d_s^{y\mathbf{M}} \circ (\text{ad } y) *. \end{aligned}$$

Le lemme 2.3.4 résulte du fait que l'application  $(g, h) \mapsto hg$  envoie les couples  $(g, h) \in \mathbf{G}^F \times C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)^F$  tels que  $s \in {}^g \mathbf{M}$  et  $h \in \mathcal{S}_{C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)}(C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s), C_{\mathbf{M}}^{\circ}(s))^F$  surjectivement sur l'ensemble des  $y \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F$  tels que  $s \in \mathbf{L} \cap^y \mathbf{M}$  et a toutes ses fibres de cardinal  $|C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)^F|$ . ■

**COROLLAIRE 2.3.5.** *On suppose  $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  pour tout  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$   $\in \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions centrales sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement. Alors:*

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} \sum_{z \in \mathbf{Z}^F} \sum_{\substack{v \in \mathbf{L}_{\text{uni}}^F \\ w \in \mathbf{M}_{\text{uni}}^F}} \lambda(zv) \mu(z^{-1}w^{-1}) Q_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(v, w).$$

*Preuve.* On pose

$$\begin{aligned} P(\lambda, \mu) &= \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \mu \rangle_{\mathbf{G}^F}, \\ Q(\lambda, \mu) &= \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \lambda, *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F}. \end{aligned}$$

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions centrales sur  $\mathbf{L}^F$ , on a

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^F} = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{s \in \mathbf{L}_s^F} |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| \langle d_s^{\mathbf{L}} f, d_s^{\mathbf{L}} g \rangle_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F}.$$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} P(\lambda, \mu) &= \langle \lambda, *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{\mathbf{L}^F} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{s \in \mathbf{L}_s^F} |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| \langle d_s^{\mathbf{L}}(\lambda), d_s^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F} \\ &= \sum_{z \in \mathbf{Z}^F} \langle d_z^{\mathbf{L}}(\lambda), d_z^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{\mathbf{L}^F} \\ &\quad + \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{\substack{s \in \mathbf{L}_s^F \\ s \notin \mathbf{Z}^F}} |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| \langle d_s^{\mathbf{L}}(\lambda), d_s^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda, \mu) &= \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle \lambda, R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}^x} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F} \\
 &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{s \in \mathbf{L}_s^F} |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| \\
 &\quad \times \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle d_s^{\mathbf{L}} \lambda, d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}^x} \mu \rangle_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F} \\
 &= \sum_{z \in \mathbf{Z}^F} \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle d_z^{\mathbf{L}} \lambda, d_z^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}^x} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F} \\
 &\quad + \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{\substack{s \in \mathbf{L}_s^F \\ s \notin \mathbf{Z}^F}} |C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F| \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \\
 &\quad \times \langle d_s^{\mathbf{L}} \lambda, d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^* R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}^x} \mu \rangle_{C_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^F}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu du lemme 2.3.4 et de la formula 2.3.3, on a

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^F} R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(d_z^{\mathbf{L}}(\lambda), d_z^{\mathbf{M}}(\mu)),$$

ce qui est une autre écriture du résultat annoncé. ■

**PROPOSITION 2.3.6.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) *La formule de Mackey a lieu pour tout triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ .*
- (ii) *La formule de Mackey pour les fonctions de Green a lieu pour tout triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ .*

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur  $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ . Il résulte du corollaire 2.3.5 que (ii) implique (i).

Supposons maintenant (i). Soient  $v$  et  $w$  deux éléments unipotents de  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$ . On note  $\lambda_v$  (respectivement  $\mu_{w^{-1}}$ ) la fonction caractéristique de la classe de conjugaison de  $v$  (respectivement  $w^{-1}$ ) dans  $\mathbf{L}^F$  (respectivement  $\mathbf{M}^F$ ). On a alors, toujours d'après le corollaire 2.3.5,

$$0 = R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda_v, \mu_{w^{-1}}) = \frac{1}{|C_{\mathbf{L}}(v)^F| \cdot |C_{\mathbf{M}}(w^{-1})^F|} Q_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(v, w)$$

ce qui montre (ii). ■

### 3. FONCTIONS ABSOLUMENT CUSPIDALES

**3.1 DÉFINITION.** On a défini les caractères irréductibles cuspidaux d'un groupe réductif comme étant ceux dont les restrictions de Harish-Chandra sont nulles. La notion de fonction absolument cuspidale est l'analogie lorsque l'on considère les restrictions de Lusztig:

**DÉFINITION 3.1.1.** Une fonction centrale  $\gamma$  sur  $\mathbf{G}^F$  est dite *absolument cuspidale* si, pour tout sous-groupe parabolique propre  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{G}$  et pour tout sous-groupe de Levi  $F$ -stable  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{P}$ , on a:

$$*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\gamma) = 0.$$

Comme conséquence immédiate de la formule 2.3.2, on obtient la

**PROPOSITION 3.1.2.** (a) Une fonction centrale  $f$  sur  $\mathbf{G}^F$  est absolument cuspidale si et seulement si  $d_s^{\mathbf{G}} f$  est une fonction absolument cuspidale sur  $C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)^F$  pour tout élément semi-simple  $s$  de  $\mathbf{G}^F$ .

(b) Soit  $f$  une fonction centrale absolument cuspidale sur  $\mathbf{G}^F$  et soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^F$  tel que  $d_s^{\mathbf{G}} f \neq 0$ . Alors  $s$  est isolé dans  $\mathbf{G}$  (c'est-à-dire que  $C_{\mathbf{G}}^{\circ}(s)$  n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{G}$ ).

On notera  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  l'ensemble des éléments  $n$  de  $\mathbf{G}$  tels que  ${}^n\mathbf{M} = \mathbf{L}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions absolument cuspidales sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement. On a alors

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{\mathbf{G}^F} - \sum_{n \in \mathbf{L}^F \setminus N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} \langle \lambda, {}^n\mu \rangle_{\mathbf{L}^F}.$$

Cette égalité sera notée  $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \lambda, \mathbf{M}, \mu)$ .

**3.2. Un autre lemme de récurrence.** Ce lemme va nous permettre, en raisonnant par récurrence, de n'avoir à vérifier la formule de Mackey que pour les fonctions absolument cuspidales.

**LEMME 3.2.1.** Soit  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de Levi  $F$ -stable d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{L}$ . On suppose que la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$  a lieu et que, pour tout  $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F$ , la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{L}, \mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}, \mathbf{K})$  a aussi lieu. Alors, pour toutes fonctions centrales  $\chi$  et  $\mu$  sur  $\mathbf{K}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement, on a

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}} \chi, \mu) = 0.$$

*Preuve.* Puisqu'on suppose  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$ , on a:

$$\begin{aligned} & \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}(\chi)), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu) \rangle_{\mathbf{G}^F} \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K}, \mathbf{M})} \frac{|\mathbf{K}^F \cap^z \mathbf{M}^F|}{|\mathbf{K}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} \langle *R_{\mathbf{K} \cap^z \mathbf{M}}^{\mathbf{K}}(\chi), *R_{\mathbf{K} \cap^z \mathbf{M}}^{\mathbf{M}}(\mu) \rangle_{\mathbf{K}^F \cap^z \mathbf{M}^F}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant  $\mathcal{M}(\mathbf{L}, \mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}, \mathbf{K})$  pour tout  $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F$ . On obtient:

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} \langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}(\chi)), *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}}(\mu) \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F|} \sum_{y \in \mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}, \mathbf{K})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F \cap^y \mathbf{K}^F|}{|\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F| \cdot |\mathbf{K}^F|} \\ & \quad \times \langle R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \cap^y \mathbf{K}}^{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \cap^y \mathbf{K}}^{\mathbf{K}}(\chi), *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M} \cap^y \mathbf{K}}^{\mathbf{M}}(\mu) \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \sum_{y \in \mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}, \mathbf{K})^F} \frac{|\mathbf{M}^F \cap^y \mathbf{K}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F| \cdot |\mathbf{K}^F|} \\ & \quad \times \langle *R_{\mathbf{M} \cap^y \mathbf{K}}^{\mathbf{K}}(\chi), *R_{\mathbf{M} \cap^y \mathbf{K}}^{\mathbf{M}}(\mu) \rangle_{\mathbf{M}^F \cap^y \mathbf{K}^F} \\ &= \sum_{(x, y) \in \mathcal{M}} \frac{|\mathbf{K}^F \cap^{y^{-1}x} \mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F| \cdot |\mathbf{M}^F| \cdot |\mathbf{K}^F|} \\ & \quad \times \langle *R_{\mathbf{K} \cap^{y^{-1}x} \mathbf{M}}^{\mathbf{K}}(\chi), *R_{\mathbf{K} \cap^{y^{-1}x} \mathbf{M}}^{\mathbf{M}}(\mu) \rangle_{\mathbf{K}^F \cap^{y^{-1}x} \mathbf{M}^F} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}$  l'ensemble des couples  $(x, y) \in (\mathbf{G}^F)^2$  tels que  $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F$  et  $y \in \mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}, \mathbf{K})^F$ . Le lemme 3.2.1 résulte alors du fait que l'application

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K}, \mathbf{M})^F \\ & (x, y) \mapsto y^{-1}x \end{aligned}$$

est surjective et a toutes ses fibres de cardinal  $|\mathbf{L}^F|$ . ■

On retrouve, grâce au lemme 3.2.1, le résultat suivant bien connu (cf., par exemple, [DM2, proposition 2.1, (d)]):

**COROLLAIRE 3.2.2.** *Si toutes les fonctions centrales sur  $\mathbf{L}^F$  (ou sur  $\mathbf{M}^F$ ) sont uniformes, alors la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  est vraie.*

*Preuve.* Cf. (ii) de la proposition 1.5.3. ■

Le lemme 3.2.1 sera utilisé par la suite sous la forme suivante:

**COROLLAIRE 3.2.3.** *On suppose  $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  pour tout triplet  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ . Soit  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de Levi  $F$ -stable d'un sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{L}$ . Alors, pour toutes fonctions centrales  $\chi$  et  $\mu$  sur  $\mathbf{K}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement, on a*

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}} \chi, \mu) = 0.$$

**3.3. Réduction de la formule de Mackey aux fonctions absolument cuspidales.** Comme annoncé, le lemme 3.2.1 permet de se ramener à la vérification de la formule de Mackey pour les fonctions absolument cuspidales seulement:

**PROPOSITION 3.3.1.** *La formule de Mackey a lieu pour tout triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  si et seulement si pour tout triplet  $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  et pour toutes fonctions absolument cuspidales  $\lambda$  et  $\mu$  sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement, on a  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$ .*

*Preuve.* La deuxième assertion est un cas particulier de la formule de Mackey. On suppose donc la deuxième assertion vraie. Pour montrer qu'elle implique la formule de Mackey, on raisonne par récurrence sur  $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ , de sorte que l'on peut supposer  $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  pour tout  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ . On notera  $\mathcal{L}$  l'ensemble des sous-groupes de Levi  $F$ -stables de sous-groupes paraboliques propres de  $\mathbf{L}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions centrales sur  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement. On écrit  $\lambda = \lambda' + \lambda''$  où  $\lambda'$  est une fonction absolument cuspidale de  $\mathbf{L}^F$  et

$$\lambda'' = \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{L}} a_{\mathbf{K}} R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}(\chi_{\mathbf{K}})$$

où les  $a_{\mathbf{K}}$  sont des éléments de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  et les  $\chi_{\mathbf{K}}$  sont des fonctions centrales sur  $\mathbf{K}^F$  ( $\mathbf{K} \in \mathcal{L}$ ).

On a alors

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) &= R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda', \mu) + R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda'', \mu) \\ &= R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda', \mu) \end{aligned}$$

d'après le corollaire 3.2.3 en utilisant l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer que  $\lambda$  est absolument cuspidale. De même, on peut supposer que  $\mu$  est absolument cuspidale, et donc, par hypothèse, on a

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0,$$

ce qui montre la proposition. ■

## 4. SÉRIES DE LUSZTIG

4.1. *Dual de  $\mathbf{G}$* . On notera  $\mathbf{B}_0$  un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{T}_0$  un tore maximal  $F$ -stable de  $\mathbf{B}_0$ . On note  $(\mathbf{G}^*, \mathbf{T}_0^*, F^*)$  un triplet dual de  $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, F)$ , au sens de Deligne–Lusztig. On notera  $\mathbf{Z}^*$  le centre de  $\mathbf{G}^*$ .

On notera  $\mathbf{L}^*$  (respectivement  $\mathbf{M}^*$ ) un sous-groupe de Levi  $F^*$ -stable d'un sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}^*$  (respectivement  $\mathbf{Q}^*$ ) de  $\mathbf{G}^*$  qui soit un dual de  $\mathbf{L}$  (respectivement  $\mathbf{M}$ ).

Ayant choisi un morphisme injectif  $\iota: \mathbb{F}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ , il existe une bijection entre l'ensemble des classes de  $\mathbf{G}^F$ -conjugaison de couples  $(\mathbf{T}, \theta)$  (où  $\mathbf{T}$  est un tore maximal  $F$ -stable de  $\mathbf{G}$  et  $\theta$  est un caractère linéaire de  $\mathbf{T}^F$ ) et l'ensemble des classes de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -conjugaison de couples  $(\mathbf{T}^*, s)$  (où  $s$  est un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^{*F^*}$  et  $\mathbf{T}^*$  est un tore maximal  $F^*$ -stable de  $\mathbf{G}^*$  contenant  $s$ ). Si deux tels couples  $(\mathbf{T}, \theta)$  et  $(\mathbf{T}^*, s)$  se correspondent via cette bijection, on posera:

$$R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s) = R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta).$$

4.2. *Séries de Lusztig*. Si  $s$  est un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , on notera  $(s)$  (ou  $(s)_{\mathbf{G}^*}$  s'il y a confusion possible) la classe de conjugaison de  $s$  sous  $\mathbf{G}^*$ , appelée *classe de conjugaison géométrique* de  $s$  et  $[s]$  (ou  $[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}$ ) la classe de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -conjugaison de  $s$ , appelée *classe de conjugaison rationnelle* de  $s$ .

On appelle *série de Lusztig géométrique* (respectivement *série de Lusztig rationnelle*) de  $\mathbf{G}^F$  associée à  $s$ , et on note  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$  (respectivement  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ ) l'ensemble des caractères irréductibles de  $\mathbf{G}^F$  contenus dans les  $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s')$  où  $s'$  est un élément semi-simple géométriquement (respectivement rationnellement) conjugué à  $s$  et  $\mathbf{T}^*$  est un tore maximal  $F^*$ -stable de  $\mathbf{G}^*$  contenant  $s'$ .

On a alors, d'après [DL1, corollaire 6.3],

$$\text{Irr}(\mathbf{G}^F) = \bigcup_{(s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$$

où  $(s)$  parcourt l'ensemble des classes de conjugaison géométrique d'éléments semi-simples de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ .

D'autre part, si  $s$  est un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , on a

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigcup_{[t] \subset (s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [t])$$

(cf., par exemple, [DM1, théorème 14.51]). Par conséquent,

$$\text{Irr}(\mathbf{G}^F) = \bigcup_{[s]} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$$

où  $[s]$  parcourt l'ensembles des classes de conjugaisons rationnelles semi-simples de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ .

*Remarque.* Si  $s$  est un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , l'ensemble des classes de conjugaison rationnelles contenues dans  $(s)$  est en bijection avec l'ensemble  $H^1(F^*, C_{\mathbf{G}^*}(s)/C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s))$ . En particulier, si  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$  est connexe, alors  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ .

4.3. *Groupes réductifs ayant même groupe dérivé.* Suivant les idées de [DL1], il existe un groupe réductif connexe  $\tilde{\mathbf{G}}$  défini sur  $\mathbb{F}_q$  (on note encore  $F: \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  l'endomorphisme de Frobenius correspondant) vérifiant les propriétés suivantes:

- (a)  $\mathbf{G}$  est un sous-groupe fermé de  $\tilde{\mathbf{G}}$ , et l'injection  $i: \mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  est définie sur  $\mathbb{F}_q$ ,
- (b) Le groupe dérivé de  $\mathbf{G}$  est égal au groupe dérivé de  $\tilde{\mathbf{G}}$ ,
- (c) Le centre  $\tilde{\mathbf{Z}}$  de  $\tilde{\mathbf{G}}$  est connexe.

On pose  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}$  et  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}$ . Alors  $\tilde{\mathbf{P}}$  est un sous-groupe parabolique de  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{L}}$  est un sous-groupe de Levi  $F$ -stable de  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Le radical unipotent de  $\tilde{\mathbf{P}}$  est égal à  $\mathbf{U}$ . on a

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = \bigcup_{g \in \tilde{\mathbf{G}}^F / \mathbf{G}^F} g \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}.$$

En effet, si  $\tilde{x} \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$ , alors  $\tilde{x}^{-1}F(\tilde{x}) \in \mathbf{U} \subset \mathbf{G}$  et donc, par le théorème de Lang, il existe  $x \in \mathbf{G}$  tel que  $\tilde{x}^{-1}F(\tilde{x}) = x^{-1}F(x)$ , d'où  $\tilde{x}x^{-1} \in \tilde{\mathbf{G}}^F$ , ce qui montre l'inclusion du membre de gauche dans le membre de droite. L'autre inclusion est évidente.

De même, on a:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = \bigcup_{l \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \mathbf{L}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \cdot l.$$

En effet, si  $\tilde{x} \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$ , alors  $\tilde{x}\mathbf{G} \in (\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G})^F \simeq (\tilde{\mathbf{L}}/\mathbf{L})^F \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$ , donc il existe  $x \in \mathbf{G}$  et  $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F$  tels que  $\tilde{x} = xl$  et on vérifie que  $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$  ce qui donne à nouveau l'inclusion du membre de gauche dans le membre de droite. L'autre inclusion est évidente.

Par conséquent, on a, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , un isomorphisme de  $\tilde{\mathbf{G}}^F$ -module- $\mathbf{L}^F$ ,

$$H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l \tilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \mathbf{G}^F} H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \tag{4.3.1}$$

ainsi qu'un isomorphisme de  $\mathbf{G}^F$ -module- $\tilde{\mathbf{L}}^F$

$$H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \mathbf{L}^F} \overline{\mathbb{Q}}_l \tilde{\mathbf{L}}^F. \tag{4.3.2}$$

On déduit immédiatement de ces deux isomorphismes la

PROPOSITION 4.3.3. (i)  $\text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F}$ .

(ii)  $\text{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \circ *R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \text{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}$ .

(iii) Soient  $u$  et  $v$  deux éléments unipotents de  $\mathbf{G}^F$  et  $\mathbf{L}^F$  respectivement.

Alors

$$Q_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(u, v) = \sum_{g \in \tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F} Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}({}^g u, v) = \sum_{l \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F} Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u, {}^l v).$$

Notons  $\tilde{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{T}_0 \cdot \tilde{\mathbf{Z}}$ . C'est un tore maximal  $F$ -stable de  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Si on note  $(\tilde{\mathbf{G}}^*, \tilde{\mathbf{T}}_0^*, F^*)$  un triplet dual, au sens de Deligne–Lusztig, du triplet  $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{T}}_0, F)$ , alors l'injection  $i: \mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$  induit un morphisme surjectif  $i^*: \tilde{\mathbf{G}}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$  défini sur  $\mathbb{F}_q$  tel que  $i^{*-1}(\mathbf{T}_0^*) = \tilde{\mathbf{T}}_0^*$ . Le noyau  $\text{Ker } i^*$  de  $i^*$  est un tore central  $F^*$ -stable de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$ , dual du tore  $\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ . On a donc un isomorphisme

$$(\text{Ker } i^*)^{F^*} \rightarrow (\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$$

$$z \mapsto \hat{z}.$$

Soit  $s$  un élément semi-simple de  $\mathbf{G}^{*F^*}$ . Puisque  $\text{Ker } i^*$  est connexe, il résulte du théorème de Lang qu'il existe un élément semi-simple  $\tilde{s}$  de  $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$  tel que  $i^*(\tilde{s}) = s$ . Compte tenu de la formule du caractère 2.1.1, on a, pour tout tore maximal  $F^*$ -stable  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  de  $\tilde{\mathbf{G}}$  contenant  $\tilde{s}$  et pour tout  $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$ ,

$$R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \hat{z} = R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}z). \tag{4.3.4}$$

On en déduit immédiatement le

LEMME 4.3.5. Pour tout  $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$ , l'application

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}}) \rightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}z]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$$

$$\gamma \mapsto \gamma \otimes \hat{z}$$

est bijective.

LEMME 4.3.6. Soient  $\tilde{\gamma}$  et  $\gamma$  deux caractères irréductibles de  $\tilde{\mathbf{G}}^F$  et  $\mathbf{G}^F$  respectivement tels que  $\langle \text{Res}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{\gamma}, \gamma \rangle \neq 0$ . Si  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$ , alors  $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ .

Preuve. Puisque  $\tilde{\mathbf{Z}}$  est connexe, le groupe  $D(\tilde{\mathbf{G}}^*)$  est simplement connexe et donc  $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$  est connexe (cf. [S, théorème 8.1]). Par suite, la série de Lusztig géométrique  $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{G}}^*})$  coïncide avec la série de Lusztig rationnelle  $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$ .



Supposons que  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$ . Soit  $\mathbf{T}$  un tore maximal  $F$ -stable de  $\mathbf{G}$  et soit  $\theta$  un caractère linéaire de  $\mathbf{T}^F$  tel que

$$\langle \gamma, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0.$$

Soit  $\mathbf{B}$  un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{G}$  contenant  $\mathbf{T}$ . On note  $\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$  son radical unipotent. Il existe un entier  $i$  tel que  $\gamma$  soit une composante irréductible de

$$H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{B}}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \mathbf{T}^F} \overline{\mathbb{Q}}_{l\theta},$$

où  $\overline{\mathbb{Q}}_{l\theta}$  désigne le  $\mathbf{T}^F$ -module irréductible de dimension 1 sur lequel  $\mathbf{T}^F$  agit via  $\theta$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{T}}$  le tore maximal ( $F$ -stable) de  $\tilde{\mathbf{G}}$  contenant  $\mathbf{T}$  et soit  $\tilde{\theta}$  un caractère linéaire de  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  prolongeant  $\theta$ . On note  $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}')$  un couple formé d'un tore maximal  $F^*$ -stable  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  et d'un élément  $\tilde{s}' \in \tilde{\mathbf{T}}^{*F^*}$  associé au couple  $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta})$ . On pose  $\mathbf{T}^* = i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*)$  et  $s' = i^*(\tilde{s}')$ . On a donc

$$\langle \gamma, R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s') \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0,$$

c'est-à-dire  $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s']_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ .

Alors, d'après l'isomorphisme 4.3.2, il existe un élément  $z \in (\text{Ker } i^*)^{F^*}$  tel que

$$\langle \tilde{\gamma} \otimes \hat{z}, H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{B}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \tilde{\mathbf{T}}^F} \overline{\mathbb{Q}}_{l\tilde{\theta}} \rangle_{\tilde{\mathbf{G}}^F} \neq 0,$$

où  $\overline{\mathbb{Q}}_{l\tilde{\theta}}$  désigne le  $\tilde{\mathbf{T}}^F$ -module irréductible de dimension 1 sur lequel  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  agit via  $\tilde{\theta}$ . Par suite, il résulte du lemme 4.3.5 et de [DM1, proposition 13.3], que  $\tilde{s}'$  et  $\tilde{s}z$  sont géométriquement **donc** rationnellement conjugués (car le centre de  $\tilde{\mathbf{G}}$  est connexe). Par suite,  $i^*(\tilde{s}') = s'$  et  $i^*(\tilde{s}) = s$  sont rationnellement conjugués. Donc  $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ . **■**

*Remarque.* Les résultats 4.3.1 à 4.3.6 restent vrais même lorsque le groupe  $\tilde{\mathbf{G}}$  vérifie seulement les hypothèses (a) et (b) de 4.3: la connexité du centre de  $\tilde{\mathbf{G}}$  n'intervient à aucun moment dans leur démonstration sauf pour le lemme 4.3.6. Dans ce dernier cas, si on suppose que  $\tilde{\mathbf{G}}$  ne vérifie que (a) et (b), on utilise le fait qu'il existe un groupe réductif connexe  $\tilde{\mathbf{G}}'$  défini sur  $\mathbb{F}_q$ , contenant  $\tilde{\mathbf{G}}$  et vérifiant (a), (b) et (c). Le lemme 4.3.6 étant vrai pour la restriction de  $\tilde{\mathbf{G}}'^F$  à  $\tilde{\mathbf{G}}^F$  et pour la restriction de  $\tilde{\mathbf{G}}'^F$  à  $\tilde{\mathbf{G}}^F$ , il sera vrai pour la restriction de  $\tilde{\mathbf{G}}^F$  à  $\mathbf{G}^F$ .

4.4. *Foncteurs de Lusztig et séries de Lusztig rationnelles.* Le but de ce paragraphe est de montrer que les foncteurs de Lusztig stabilisent les séries de Lusztig rationnelles. C'est un résultat connu (cf. par exemple, [DLM]), mais je n'en connais pas de démonstration écrite.

**COROLLAIRE 4.4.1.** *On suppose que  $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$ . Soit  $\lambda$  un caractère irréductible de  $\mathbf{L}^F$  et soit  $\gamma$  un caractère irréductible de  $\mathbf{G}^F$  tel que  $\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), \gamma \rangle \neq 0$ .*

*Si  $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ , alors  $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ .*

*Preuve.* D'après [L1, corollaire 6], le corollaire 4.4.1 est vrai pour le groupe  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

D'après le lemme 4.3.6, les éléments de  $\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$  sont les composantes irréductibles des restrictions des éléments de  $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{L}}^*})$ . Soit  $\mathbf{T}^*$  un tore maximal  $F^*$ -stable de  $\mathbf{L}^*$  tel que  $\lambda$  soit une composante irréductible de  $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{L}}(s)$ . On note  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  l'image réciproque de  $\mathbf{T}^*$  par  $i^*$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{T}}$  un tore maximal  $F$ -stable de  $\tilde{\mathbf{L}}$  dual de  $\tilde{\mathbf{T}}^*$ , et soit  $\tilde{\theta}$  le caractère linéaire de  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  associé à  $\tilde{s}$ . On pose  $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{L}$  et on note  $\theta$  la restriction de  $\tilde{\theta}$  à  $\mathbf{T}^F$ . Alors  $\mathbf{T}$  est un tore maximal  $F$ -stable de  $\mathbf{L}$  dual de  $\mathbf{T}^*$  et  $\theta$  est le caractère linéaire de  $\mathbf{T}^F$  associé à  $s$ . On note  $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$  un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{L}$  contenant  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}$  le radical unipotent de  $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ .

Par hypothèse, il existe un entier naturel  $i$  tel que  $\gamma$  soit une composante irréductible de  $H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \lambda$ , et il existe un entier  $j$  tel que  $\lambda$  soit une composante irréductible de  $H_c^j(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \theta$ . Puisque  $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}$ , il résulte de la formule de Künneth que  $\gamma$  est une composante irréductible de  $H_c^{i+j}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \theta$ . On déduit alors de l'isomorphisme 4.3.2 que  $\gamma$  est une composante irréductible d'un caractère irréductible  $\tilde{\gamma}$  de  $\tilde{\mathbf{G}}^F$ , lui-même composante irréductible de  $H_c^{i+j}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \tilde{\theta}$ . Par conséquent, le corollaire 4.4.1 étant vrai pour  $\tilde{\mathbf{G}}$ , le caractère  $\tilde{\gamma}$  appartient à  $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{G}}^*}) = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$ , ce qui montre que  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$  d'après le lemme 4.3.6. ■

**4.5. Éléments semi-simples quasi-isolés.** On rappelle que l'élément  $s$  est dit *isolé* dans  $\mathbf{G}^*$  si  $C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)$  n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{G}^*$ . On pose la

**DÉFINITION 4.5.1.** L'élément semi-simple  $s$  de  $\mathbf{G}^*$  sera dit *quasi-isolé* (dans  $\mathbf{G}^*$ ) si son centralisateur  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$  n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{G}^*$ .

On note  $\Phi_0^*$  le système de racines de  $\mathbf{G}^*$  relativement à  $\mathbf{T}_0^*$ . On note  $\langle \Phi_0^* \rangle$  le sous-groupe de  $X(\mathbf{T}_0^*)$  engendré par  $\Phi_0^*$ . On notera  $\mathcal{L}(\mathbf{G})$  l'ensemble des indices des sous-groupes  $\langle \Phi_1^* \rangle$  dans  $\langle \Phi_0^* \rangle$  lorsque  $\Phi_1^*$  parcourt l'ensemble des sous-systèmes de racines de  $\Phi_0^*$  de même rang:

**LEMME 4.5.2.** *Soit  $s$  un élément isolé de  $\mathbf{G}^*$ . Alors l'ordre de l'image de  $s$  dans  $\mathbf{G}^*/\mathbf{Z}^*$  divise un élément de  $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ .*

*Preuve.* On peut supposer que  $s \in \mathbf{T}_0^*$ . On note  $\Phi_1^*$  le système de racines de  $C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)$  relativement à  $\mathbf{T}_0^*$ . On a

$$\Phi_1^* = \{ \alpha \in \Phi_0^* \mid \alpha(s) = 1 \}.$$

Puisque  $s$  est isolé dans  $\mathbf{G}^*$ , le système de racines  $\Phi_1^*$  est de même rang que  $\Phi_0^*$ . Par conséquent, si on note  $d = |\langle \Phi_0^* \rangle / \langle \Phi_1^* \rangle|$ , alors  $s^d \in \mathbf{Z}^*$  et  $d \in \mathcal{L}(\mathbf{G})$ . ■

**COROLLAIRE 4.5.3.** *Soit  $\mathbf{Z}^*$  le centre de  $\mathbf{G}^*$ . Soit  $s$  un élément quasi-isolé de  $\mathbf{G}^*$ . Alors l'ordre de l'image de  $s$  dans  $\mathbf{G}^*/\mathbf{Z}^*$  divise un des nombres  $|\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ| \cdot r$ , où  $r$  parcourt l'ensemble des éléments de  $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ .*

*Preuve.* On pose  $k = |C_{\mathbf{G}^*}(s)/C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)|$ . Il est bien connu que  $k$  divise l'ordre de  $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ$  (on va le redémontrer car on aura besoin de la démonstration). Compte tenu du lemme 4.5.2, il suffit de montrer que  $s^k$  est isolé. On note  $A = \text{Ker } i^* \cap D(\tilde{\mathbf{G}}^*)$  où  $D(\tilde{\mathbf{G}}^*)$  désigne le groupe dérivé de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$ . On rappelle que

$$|A| = |\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ|. \tag{*}$$

En effet, si  $n$  est un entier naturel non nul tel que  $F^n$  agisse trivialement sur  $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ$  et tel que  $F^{*n}$  agisse trivialement sur  $A$ , alors il résulte de [DLM, (3.12.1)] que  $H^1(F^n, \mathbf{Z})^\wedge \simeq A^{F^{*n}}$ , c'est-à-dire  $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ)^\wedge \simeq A$ .

Soit  $\tilde{s}$  un élément de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  tel que  $\pi(\tilde{s}) = s$ . On considère l'application

$$\begin{aligned} \theta_s : C_{\mathbf{G}^*}(s) &\rightarrow A \\ g &\mapsto \tilde{g}\tilde{s}\tilde{g}^{-1}\tilde{s}^{-1} = [\tilde{g}, \tilde{s}] \end{aligned}$$

où  $\tilde{g}$  est un élément de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  tel que  $i^*(\tilde{g}) = g$  (on remarque que  $\theta_s(g)$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{g}$ ). D'autre part,  $\theta_s$  est un morphisme de groupes.

Le centralisateur  $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$  est connexe (par le même argument que dans la démonstration du lemme 4.3.6) et son image par  $i^*$  est  $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$  (cf., par exemple, [DM1, proposition 2.3, (ii)]). Le noyau de  $\theta_s$  est donc exactement  $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ . En particulier,  $C_{\mathbf{G}^*}(s)/C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$  est isomorphe à un sous-groupe de  $A$ , donc  $k$  divise  $|\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^\circ|$  d'après (\*).

Pour montrer que  $s^k$  est isolé, il suffit de montrer que  $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s^k)$  contient  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ . Soit donc  $g \in C_{\mathbf{G}^*}(s)$ . On a alors  $\theta_s(g^k) = 1$  car  $g^k \in C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ . Or, par un calcul facile,  $\theta_s(g^k) = \theta_s(g)^k = \theta_{s^k}(g)$ . Donc  $g$  est dans le noyau de  $\theta_{s^k}$  donc appartient à  $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s^k)$ . ■

## 5. FORMULE DE MACKEY POUR $q$ GRAND

**5.1. Énoncé.** On notera  $l(\mathbf{G})$  le plus grand élément de la réunion des  $\mathcal{L}(\mathbf{G}')$ , où  $\mathbf{G}'$  parcourt l'ensemble des sous-groupes réductifs connexes de  $\mathbf{G}$  de même rang. On notera  $\iota(\mathbf{G})$  le plus grand des nombres  $|\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'^\circ|$  où  $\mathbf{Z}'$  parcourt l'ensemble des centres des sous-groupes réductifs connexes  $F$ -stables de  $\mathbf{G}$  de même rang.

**THÉORÈME 5.1.1.** *Si  $q > 1 + l(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^2$ , alors la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  ainsi que la formule de Mackey pour les fonctions de Green pour  $\mathbf{G}$  ont lieu.*

*Preuve.* On suppose donc que  $q > 1 + l(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^2$ . On va montrer le théorème 5.1.1 par récurrence sur  $n = \dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ . La récurrence démarre compte tenu de la proposition 1.5.3. On peut donc supposer que, pour tout triplet  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ , la formule de Mackey pour les fonctions de Green pour tout le triplet  $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  ainsi que  $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$  ont lieu (en effet,  $q > 1 + l(\mathbf{G}')\iota(\mathbf{G}')^2$  car  $l(\mathbf{G}') \leq l(\mathbf{G})$  et  $\iota(\mathbf{G}') \leq \iota(\mathbf{G})$ ). On peut aussi supposer que  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  sont différents de  $\mathbf{G}$  car sinon, il n'y a rien à montrer.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux caractères irréductibles de  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement. On veut montrer que  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$ . Soit  $s$  (respectivement  $t$ ) un élément semi-simple de  $\mathbf{L}^{*F^*}$  (respectivement  $\mathbf{M}^{*F^*}$ ) tel que  $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$  (respectivement  $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{M}^F, [t]_{\mathbf{M}^{*F^*}})$ ).

**LEMME 5.1.2.** *Si les éléments  $s$  et  $t$  ne sont pas conjugués sous  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , alors  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$ .*

*Preuve.* Il résulte immédiatement du corollaire 4.4.1 que les deux membres de  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu)$  (notés  $P(\lambda, \mu)$  et  $Q(\lambda, \mu)$  dans la démonstration du corollaire 2.3.5) sont nuls. ■

**LEMME 5.1.3.** *Si  $s$  n'est pas quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$ , ou si  $t$  n'est pas quasi-isolé dans  $\mathbf{M}^*$ , alors*

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0.$$

*Preuve.* Supposons que  $s$  n'est pas quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$ . Soit  $\mathbf{K}^*$  l'intersection des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{L}^*$  contenant  $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ . Alors  $\mathbf{K}^*$  est un sous-groupe de Levi  $F^*$ -stable d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{L}^*$  et  $\mathbf{K}^* \neq \mathbf{L}^*$  par hypothèse. On note  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de Levi  $F$ -stable d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{L}$  dual de  $\mathbf{K}$ . D'après [L1, corollaire 9], il existe un caractère irréductible  $\chi$  de  $\mathbf{K}^F$  tel que  $\lambda = \varepsilon_{\mathbf{L}} \varepsilon_{\mathbf{K}} R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}} \chi$ . Par suite, il résulte du corollaire 3.2.3 que  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$ .

La formule de Mackey étant auto-duale, on a symétriquement  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$  si  $t$  n'est pas quasi-isolé dans  $\mathbf{M}^*$ . ■

Compte tenu des lemmes 5.1.2 et 5.1.3 on supposera par la suite que  $s$  et  $t$  sont conjugués sous  $\mathbf{G}^{*F^*}$  et on prendra même  $s = t$ , et on pourra aussi supposer que  $s$  est quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$  et  $\mathbf{M}^*$ .

**LEMME 5.1.4.** *Si  $s$  n'est pas quasi-isolé dans  $\mathbf{G}^*$ , alors*

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0.$$

*Preuve.* Soit  $\mathbf{K}^*$  l'intersection des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{G}^*$  contenant  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ . Alors  $\mathbf{K}^*$  est un sous-groupe de Levi  $F^*$ -stable d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}^*$ , contenant  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ , et distinct de  $\mathbf{G}^*$ . Le groupe  $\mathbf{K}^* \cap \mathbf{L}^*$  est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{L}^*$  contenant  $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ , donc  $\mathbf{K}^*$  contient  $\mathbf{L}^*$  car  $s$  est quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$ . De même,  $\mathbf{K}^*$  contient  $\mathbf{M}^*$ .

Soit  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de Levi  $F$ -stable d'un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  dual de  $\mathbf{K}^*$ . On peut supposer que  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  sont contenus dans  $\mathbf{K}$ . D'après [DM1, remarque 13.28], le foncteur  $R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}$  induit une isométrie

$$R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}: \overline{\mathbb{Q}}_l \mathcal{E}(\mathbf{K}^F, [s]_{\mathbf{K}^{*F^*}}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \mu \rangle &= \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{K}} \lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{K}} \mu \rangle_{\mathbf{K}^F} \\ &= \sum_{x \in \mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{K}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} / \mathbf{M}^F} \langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \lambda, *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F} \end{aligned}$$

car, par hypothèse de récurrence, la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  a lieu. Il suffit donc de montrer que, si  $x$  est un élément de  $\mathcal{S}_{\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F}$  n'appartenant pas à  $\mathbf{K}$ , alors

$$\langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \lambda, *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F} = 0.$$

Soit donc  $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F}$  tel que

$$\langle *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \lambda, *R_{\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \mu \rangle_{\mathbf{L}^F \cap^x \mathbf{M}^F} \neq 0. \tag{\#}$$

On a une bijection naturelle entre

$$\mathbf{L}^F \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F} \setminus \mathbf{M}^F \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^{*F^*} \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{G}^*(\mathbf{L}^*, \mathbf{M}^*)^{F^*}} \setminus \mathbf{M}^{*F^*}.$$

Il correspond donc à  $x$  un élément  $x^*$  de  $\mathcal{S}_{\mathbf{G}^*(\mathbf{L}^*, \mathbf{M}^*)^{F^*}}$  tel que  $\mathbf{L}^* \cap^{x^*} \mathbf{M}^*$  soit un dual de  $\mathbf{L} \cap^x \mathbf{M}$ . Il résulte de la non-nullité du membre de gauche de (#) et du corollaire 4.4.1 qu'il existe un élément  $l \in \mathbf{L}^{*F^*}$  et un élément  $m \in \mathbf{M}^{*F^*}$  tel que  $l s = x^*(m)$ . Par conséquent,  $l^{-1} x^* m$  centralise  $s$  donc appartient à  $\mathbf{K}^*$ , et donc  $x^*$  appartient à  $\mathbf{K}^*$  car  $\mathbf{L}^*$  et  $\mathbf{M}^*$  sont contenus dans  $\mathbf{K}^*$ . Par suite,  $x \in \mathbf{K}$  car  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  sont contenus dans  $\mathbf{K}$ . ■

On peut donc supposer dorénavant que l'élément semi-simple  $s$  est quasi-isolé dans  $\mathbf{L}^*$ ,  $\mathbf{M}^*$  et  $\mathbf{G}^*$ . On se fixe d'autre part un tore maximal  $F^*$ -stable  $\mathbf{T}^*$  de  $\mathbf{L}^*$  contenant  $s$ . On notera  $W^*$  le groupe de Weyl de  $\mathbf{G}^*$  relativement à  $\mathbf{T}^*$ . On notera  $\Phi^*$  le système de racines de  $\mathbf{G}^*$  relativement à  $\mathbf{T}^*$ .

Si  $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*}$ , on notera  $\hat{z}$  le caractère linéaire de  $\mathbf{L}^F$  induit par  $z$ . D'autre part, si  $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$ , alors  $\hat{z}$  est trivial sur  $\mathbf{Z}^F$  (cf. [DL, proposition 5.11, (i)]).

LEMME 5.1.5. *Il existe un élément  $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$  tel que  $sz$  et  $s$  ne soient pas conjugués sous  $\mathbf{G}^*$ .*

*Preuve.* D'après le théorème de Lang, l'indice de  $i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$  dans  $D(\mathbf{G}^*)^{F^*}$  est égal à  $|H^1(F^*, A)|$ . Donc, si on note  $i$  l'indice de  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$  dans  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap D(\mathbf{G}^*)^{F^*}$  alors  $i$  est inférieur ou égal à  $|H^1(F^*, A)|$ . Finalement,  $i \leq |\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0| \leq \iota(\mathbf{G})$  d'après l'égalité (\*) de la preuve du lemme 4.5.3.

Soit  $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap D(\mathbf{G}^*)^{F^*}$  d'ordre supérieur ou égal à  $q - 1$  (il en existe toujours car  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*) \cap D(\mathbf{G}^*)$  contient un tore de dimension supérieure ou égale à 1). Vu que  $z^i$  appartient à  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$ , il suffit, pour montrer le lemme 5.1.5, de prouver que

*Les éléments  $s$  et  $sz^i$  ne sont pas conjugués sous  $\mathbf{G}^*$ .*

On note  $m$  l'ordre de  $z^i$ . Alors

$$m \geq \frac{q-1}{i} > l(\mathbf{G}) \iota(\mathbf{G}) \geq l(\mathbf{G}) |\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0|. \quad (\star)$$

Soit  $\zeta$  une racine primitive  $m^{\text{ème}}$  de l'unité dans  $\mathbb{F}^\times$ . Soit  $\alpha \in X(\mathbf{T})$  tel que  $\alpha(z^i) = \zeta$  (il existe un tel  $\alpha$  car  $m$  est l'ordre de  $z^i$ ).

Supposons  $s$  et  $sz^i$  conjugués sous  $\mathbf{G}^*$ . Alors il existe  $w \in W^*$  tel que  $sz^i = w(s)$ . Par suite,

$$\zeta = \alpha(z^i) = (w(\alpha) - \alpha)(s).$$

Or,  $w(\alpha) - \alpha$  est une combinaison linéaire, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , d'éléments de  $\Phi^*$ . Par conséquent, l'ordre de  $\zeta$  divise l'ordre de l'image de  $s$  dans  $\mathbf{G}^*/\mathbf{Z}^*$ , ce qui implique, compte tenu du lemme 4.5.3, que  $\zeta^{kr} = 1$ , pour certains  $k \in \mathcal{L}(\mathbf{G})$  et  $r$  diviseur de  $|\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0|$ ; cela contredit ( $\star$ ). ■

Soit donc  $z$  un élément de  $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap i^*(D(\tilde{\mathbf{G}}^*)^{F^*})$  tel que  $s$  et  $sz$  ne soient pas conjugués sous  $\mathbf{G}^*$ . Alors, d'après le lemme 5.1.2, on a

$$R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda \otimes \hat{z}, \mu) = 0$$

car  $\lambda \otimes \hat{z} \in \mathcal{S}(\mathbf{L}^F, [sz]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ . Or, par hypothèse de récurrence, on a, d'après le corollaire 2.3.5,  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda \otimes \hat{z}, \mu)$ , ce qui termine la démonstration du théorème 5.1.1. ■

## 6. FORMULE DE MACKEY ET FAISCEAUX-CARACTÈRES

Cette section est consacrée à établir une autre démonstration de la formule de Mackey, indépendante de celle du théorème 5.1.1, utilisant la théorie des faisceaux-caractères de  $G$ . Lusztig (en particulier les résultats de [L2, L3, L4]). Le résultat que l'on obtient est un peu moins bon: on a besoin d'une (petite) restriction sur le nombre premier  $p$ , et la borne que l'on donne pour l'entier  $q$  n'est pas explicite.

**6.1. Énoncé.** Si  $\Phi$  est un système de racines, on dira que  $p$  est *presque bon* pour  $\Phi$  si, pour toute composante irréductible  $\Phi_0$  de  $\Phi$  de type exceptionnel,  $p$  ne divise aucun des coefficients de la plus grande racine (relativement à une base arbitraire) de  $\Phi_0$  (c'est-à-dire si  $p$  est *bon* pour toute composante irréductible de  $\Phi$  de type exceptionnel). On dira que  $p$  est *presque bon* pour  $\mathbf{G}$  s'il est presque bon pour son système de racines (relatif à un tore maximal quelconque).

**THÉORÈME 6.1.1.** *On suppose  $p$  presque bon pour  $\mathbf{G}$ . Il existe une constante  $q_0$  dépendant seulement de la donnée radicielle associée à  $\mathbf{G}$  telle que la formule de Mackey  $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$  a lieu si  $q > q_0$ .*

**6.2. Preuve du théorème 6.1.1.** En raisonnant par récurrence sur  $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$ , le lemme 2.3.4 montre qu'il suffit de montrer la formule de Mackey pour les fonctions à support dans  $\mathbf{Z}^F$ .  $\mathbf{G}_u^F$  et, puisque la translation par un élément de  $\mathbf{Z}^F$  est inoffensive (cf. formule 2.3.3), il suffit de la montrer pour les fonctions à support unipotent. D'autre part, compte tenu de la proposition 3.3.1, il suffit de montrer que  $R_{\mathbf{L}, \mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = 0$  lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions absolument cuspidales à support dans  $\mathbf{L}_{\text{uni}}^F$  et  $\mathbf{M}_{\text{uni}}^F$  respectivement.

Soient donc  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions absolument cuspidales à support unipotent de  $\mathbf{L}^F$  et  $\mathbf{M}^F$  respectivement. Le théorème 1.14, (b) de [L4] indique que, si  $p$  est presque bon et  $q$  est suffisamment grand, on obtient une base de l'espace des fonctions absolument cuspidales à support unipotent en prenant les fonctions caractéristiques de systèmes locaux cuspidaux  $F$ -stables sur les classes de conjugaison unipotentes  $F$ -stables de  $\mathbf{G}$ . Il suffit donc de vérifier la formule de Mackey lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  sont de telles fonctions.

Soit  $C_1$  une classe unipotente  $F$ -stable de  $\mathbf{L}$ , et soit  $\mathcal{E}_1$  un système local  $\mathbf{L}$ -équivariant  $F$ -stable cuspidal sur  $C_1$ . On choisit un isomorphisme

$\varphi_1: F^*\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ . On suppose donc que  $\lambda = \chi_{\mathcal{E}_1, \varphi_1}$  où  $\chi_{\mathcal{E}_1, \varphi_1}$  est la fonction sur  $\mathbf{L}_{\text{uni}}^F$  définie par

$$\chi_{\mathcal{E}_1, \varphi_1}(u) = \begin{cases} \text{Tr}((\varphi_1)_u, (\mathcal{E}_1)_u) & \text{si } u \in C_1^F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, on suppose que  $\bar{\mu} = \chi_{\mathcal{E}_2, \varphi_2}$  où  $\mathcal{E}_2$  est un système local cuspidal  $F$ -stable sur une classe de conjugaison unipotente  $F$ -stable  $C_2$  de  $\mathbf{M}$  et  $\varphi_2: F^*\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2$  est un isomorphisme.

On note  $K_1$  (respectivement  $K_2$ ) le faisceau pervers obtenu par induction parabolique à partir du faisceau pervers associé au système local  $\mathcal{E}_1 \boxtimes \mathbb{Q}_l$  (respectivement  $\mathcal{E}_2 \boxtimes \mathbb{Q}_l$ ) sur  $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \cdot C_1$  (respectivement  $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \cdot C_2$ ) et  $\psi_1: F^*K_1 \rightarrow K_1$  (respectivement  $\psi_2: F^*K_2 \rightarrow K_2$ ) l'isomorphisme de faisceaux pervers induit par  $\varphi_1$  (respectivement  $\varphi_2$ ). On notera  $\tilde{\chi}_{K_1, \varphi_1}$  et  $\tilde{\chi}_{K_2, \varphi_2}$  les restrictions de  $\chi_{K_1, \psi_1}$  et  $\chi_{K_2, \psi_2}$  à  $\mathbf{G}_{\text{uni}}^F$ . D'après [L4, théorème 1.14, (a)], on a

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \tilde{\chi}_{K_1, \varphi_1},$$

$$R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\bar{\mu}) = \tilde{\chi}_{K_2, \varphi_2}.$$

Un élément  $g$  de  $\mathbf{G}^F$  est tel que  ${}^g\mathbf{M} = \mathbf{L}$  et  $\langle \lambda, {}^g\bar{\mu} \rangle \neq 0$  si et seulement si  ${}^gC_2 = C_1$  et  $(\text{ad } g)^*\mathcal{E}_2 \simeq \mathcal{E}_1^\vee$  où  $\mathcal{E}_1^\vee$  désigne le système local dual de  $\mathcal{E}_1$ . D'autre part, s'il n'existe pas de tels  $g \in \mathbf{G}^F$ , alors, d'après le corollaire 9.11 de [L3, partie II], on a

$$\langle \tilde{\chi}_{K_1, \varphi_1}, \tilde{\chi}_{K_2, \varphi_2} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 0$$

et donc la formule  $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \lambda, \mathbf{M}, \bar{\mu})$  est donc vérifiée dans ce cas-là.

On peut donc supposer, et ce sera fait par la suite, que  $\mathbf{L} = \mathbf{M}$ ,  $C_1 = C_2$ ,  $\mathcal{E}_1^\vee = \mathcal{E}_2$  et  $\varphi_1^\vee = \varphi_2$ . D'après [L2, théorème 9.2], on a, pour tout  $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ ,

$${}^nC_1 = C_1 \quad (\text{ad } n)^*\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_1.$$

D'après [L3, partie II, lemme 9.8 et les formules 9.10.1 et 9.10.2], on a, pour tout  $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ ,

$$\langle \lambda, {}^n\bar{\mu} \rangle = \frac{q^d}{|\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ F}|}$$

où  $d = \dim C_1 + \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ - \dim \mathbf{L}$ . D'autre part, le corollaire 9.11 de [L3, partie II], nous dit que

$$\langle \tilde{\chi}_{K_1, \varphi_1}, \tilde{\chi}_{K_2, \varphi_2} \rangle = \frac{|N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})/\mathbf{L}^F|}{|\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ F}|} q^d.$$

Cela montre la formule  $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \lambda, \mathbf{L}, \bar{\mu})$ . ■



7. QUELQUES APPLICATIONS DE LA FORMULE DE MACKEY

On va rappeler dans cette section quelques conséquences connues de la formule de Mackey.

7.1. *Indépendance du choix du sous-groupe parabolique.* Soit  $\mathbf{P}'$  un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  dont  $\mathbf{L}$  est un sous-groupe de Levi. Le résultat suivant se montre par récurrence sur  $\dim \mathbf{G}$  comme dans le cas où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}'$  sont  $F$ -stables (cf., par exemple, [DM, proposition 6.1]):

PROPOSITION 7.1.1. *Supposons  $q > 1 + l(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^2$ . Alors*

$$R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}'}^{\mathbf{G}},$$

$$*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = *R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}'}^{\mathbf{G}}.$$

7.2. *Dualité d'Alvis–Curtis et foncteurs de Lusztig.* On notera  $D_{\mathbf{G}}: \mathcal{H}\mathbf{G}^F \rightarrow \mathcal{H}\mathbf{G}^F$  l'opérateur de dualité d'Alvis–Curtis. Le résultat suivant est démontré par exemple dans [DM1, remarque suivant le théorème 8.11]:

PROPOSITION 7.2.1. *Supposons  $q > 1 + l(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^2$ . Alors*

$$\varepsilon_{\mathbf{G}} D_{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{L}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{L}},$$

$$\varepsilon_{\mathbf{G}} *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{L}} D_{\mathbf{L}} \circ *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[DL1] P. Deligne et G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), 103–161.

[DL2] P. Deligne et G. Lusztig, Duality for representations of a reductive group over a finite field, II, *J. Algebra* **81** (1983), 540–545.

[DLM] F. Digne, G. Lehrer, et J. Michel, The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre, *J. Reine Angew Math.* **425** (1992), 155–192.

[DM1] F. Digne et J. Michel, Representations of finite groups of Lie type, in *London Math. Soc. Students Texts*, Vol. 21, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.

[DM2] F. Digne et J. Michel, Foncteurs de Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires sur un corps fini, *J. Algebra* **107** (1987), 217–255.

[L1] G. Lusztig, On the finiteness of the number of unipotent classes, *Invent. Math.* **34** (1976), 201–213.

[L2] G. Lusztig, Intersection cohomology complexes on a reductive group, *Invent. Math.* **75** (1984), 205–272.

- [L3] G. Lusztig, Character sheaves, I, *Adv. in Math.* **56** (1985), 193–237; II, **57** (1985), 226–265; III, **57** (1985), 266–315; IV, **59** (1986), 1–63; V, **61** (1986), 103–155.
- [L4] G. Lusztig, Green functions and character sheaves, *Ann. of Math.* **131** (1990), 355–408.
- [LS] G. Lusztig et N. Spaltenstein, Induced unipotent classes, *J. London Math. Soc.* (2) **19** (1979), 41–52.
- [S] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **80** (1968).