UNIVERSITÉ PARIS VII

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **Mathématiques**

Présentée par : **Cédric Bonnafé**

Sujet : **Foncteurs de Lusztig dans le groupe spécial linéaire sur un corps fini**

Soutenue le **5 décembre 1996** devant le jury composé de :

Jean Michel	Directeur
Paul Fong	Rapporteur
Michel Broué	
François Digne	
Michel Duflo	

Remerciements

Lorsque, au moment de choisir un directeur de DEA, Anne-Marie Aubert m'a conseillé d'aller voir Jean Michel, je ne savais pas à quoi m'attendre. Je dois dire que son conseil était bon, et je tiens à la remercier pour cela, ainsi que pour sa patience et sa gentillesse. Jean Michel m'a donné un sujet qui m'a tout de suite intéressé, et sa disponibilité m'a grandement facilité la tâche. Il m'a toujours soutenu et conseillé dans mes travaux, et ses remarques m'étaient toujours très utiles. Il a aussi relu avec beaucoup d'attention les fragments de thèse que je lui apportais, et il a grandement contribué à améliorer la rédaction de ce travail. Autant de raisons qui font que je tiens à le remercier vivement.

J'ai aussi eu la chance de me retrouver au sein d'une équipe à la fois dynamique et chaleureuse. Ses membres se sont intéressés à mes recherches, et ils ont toujours été disponibles pour répondre à mes questions. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie également les deux rapporteurs, qui ont accordé une part de leur temps à la lecture de cette thèse, et dont les remarques m'ont permis d'en améliorer le texte. Je suis très heureux que Paul Fong ait accepter de faire le long voyage depuis Chicago pour faire partie de mon jury. Je regrette que G.I. Lehrer n'ait pu venir de Sydney en ce moment.

Je remercie François Digne et Michel Duflo d'avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que Michel Broué, qui s'est toujours montré disponible pour régler des problèmes administratifs, et qui a toujours appuyé mes demandes de crédit pour mes voyages (à but scientifique...).

Je ne pourrais terminer cette rubrique sans avoir un mot pour tous les amis dont la présence (quelquefois seulement l'existence lorsqu'ils sont loin) vous remontent le moral : Anne, François, Gilles, Hadrien, Jérôme, Laurence, Luc, Ludovic, Olivier, Sandrine, Sonia, Xavier, les rugbymen de l'ENS, les habitués de Lanchâtra...

Table des matières

Résumé

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius noté $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. On s'intéresse aux caractères irréductibles du groupe fini $\mathbf{G}^F$. Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique (non nécessairement F-stable), G. Lusztig a construit un foncteur $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \mathcal{K}\mathbf{L}^F \to \mathcal{K}\mathbf{G}^F$ entre le groupe de Grothendieck $\mathcal{K}\mathbf{L}^F$ de la catégorie des $\mathbf{L}^F$-modules de dimension finie (sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) et celui de la catégorie des $\mathbf{G}^F$-modules, appelé **foncteur de Lusztig**.

Question 1 : *calculer* $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Ce problème est central dans la théorie des caractères irréductibles du groupe $\mathbf{G}^F$ (notamment dans le but de connaître leurs valeurs). Avant d'en chercher une réponse, il faut avoir un paramétrage des caractères irréductibles, ce qui a été fait par Lusztig. Pour cela, on introduit un groupe réductif connexe $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{G}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius $F^* : \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}^*$ dual de F. À chaque classe de conjugaison semi-simple $[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}$ de $\mathbf{G}^{*F^*}$, Lusztig a associé une famille de caractères irréductibles $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ de sorte que l'on a une partition

$$\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F = \dot{\bigcup_{\substack{[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}} \text{ classe} \\ \text{semi-simple} \\ \text{de } \mathbf{G}^{*F^*}}}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}).$$

D'autre part, Lusztig a montré qu'il existait une bijection

$$\nabla_{\mathbf{G}} : \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}) \longrightarrow \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1).$$

Cette bijection est appelée **paramétrage de Lusztig**. Si $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$ et contenant s, on a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathcal{R}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}}) \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\bigstar)"] & \mathbb{Z}\mathcal{R}(C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}, 1) \arrow[d, "\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)}R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}"] \\
\mathbb{Z}\mathcal{R}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}) \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{G}}"'] & \mathbb{Z}\mathcal{R}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1),
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon_{\mathbf{G}}$ est égal à $(-1)^{\mathbb{F}_q-\mathrm{rang}(\mathbf{G})}$.

Question 2 : *Le diagramme* $(\bigstar)$ *est-il commutatif ?*

Remarque - Dans le diagramme $(\bigstar)$, les groupes $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ ne sont pas forcément connexes. Il faudra donc définir les notions de caractères unipotents et de foncteurs d'induction de Lusztig dans le cadre des groupes non connexes (cela a été fait par F. Digne et J. Michel).

Le but de cette thèse est de répondre aux questions 1 et 2 dans le cas où $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique (non nécessairement F-stable) d'un sous-groupe parabolique du groupe spécial linéaire muni de sa structure rationnelle déployée. Une des applications possibles de ce résultat est au programme établi par F. Digne, G. Lehrer et J. Michel dans [DLM1] pour le calcul de la table des caractères du groupe spécial linéaire.

Remarque - La réponse que l'on obtient à ces deux questions dépend de deux conjectures. La première dit que la formule de Mackey a lieu, et la deuxième dit que la restriction de Lusztig d'un caractère de Gel'fand-Graev est un caractère de Gel'fand-Graev. Ces deux conjectures ont été montrées lorsque p et q sont assez grands. Dans cette thèse, on montrera (en reprenant une démonstration non publiée de P. Deligne) que la formule de Mackey est vraie pour q grand (cf théorème 10.1.1).

On suppose donc que $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique (non nécessairement F-stable) d'un sous-groupe parabolique du groupe spécial linéaire muni de sa structure rationnelle déployée.

On montrera en particulier qu'il existe un paramétrage $\nabla_{\mathbf{G}}$ et un paramétrage $\nabla_{\mathbf{L}}$ (en fait, une fois $\nabla_{\mathbf{G}}$ choisi, le paramétrage $\nabla_{\mathbf{L}}$ est imposé) rendant le diagramme $(\bigstar)$ commutatif. On n'a pas de jolie preuve fonctorielle de ce fait. On se contente de calculer les foncteurs d'induction de Lusztig des deux côtés du diagramme et de les comparer.

La première partie est consacrée au calcul du foncteur de Lusztig $R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}$. C'est en fait le côté le plus facile à traiter. En effet, on montrera que les caractères unipotents de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne-Lusztig généralisés aux cas des groupes non connexes (cf théorème 5.2.1). La simple application de la transitivité des foncteurs de Lusztig permet alors d'obtenir une formule explicite pour ces derniers (cf théorème 5.5.1).

Dans la deuxième partie, on s'attaque au calcul du foncteur $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. On y établit pour commencer la formule de Mackey pour q grand (en donnant une borne explicite pour q). Pour calculer les foncteurs d'induction de Lusztig dans le groupe spécial linéaire, on établit d'abord un paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. Le problème étant résolu pour un produit de groupes linéaires, il suffit d'étudier la décomposition en caractères irréductibles des restrictions à partir du sous-groupe de Levi correspondant à $\mathbf{G}$ du groupe linéaire. Suivant les idées de [A], on caractérise les composantes irréductibles de ces restrictions par leur multiplicité dans l'induit (au sens de Harish-Chandra) de caractères réguliers (cf théorème 15.3.1), c'est-à-dire des composantes de caractères de Gel'fand-Graev. Ce paramétrage permet de calculer facilement les foncteurs d'induction de Harish-Chandra (cf théorème 7.5.1) et de montrer que tout caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'induits au sens de Harish-Chandra de caractères réguliers (cf théorème 15.5.1).

Pour calculer les foncteurs de Lusztig, il ne reste plus qu'à calculer le produit scalaire de deux induits (au sens de Lusztig) de caractères réguliers (cf théorème 12.5.1), ce qui, grâce à la formule de Mackey, se ramène au produit scalaire de deux restrictions (au sens de Lusztig) de caractères réguliers. Ces restrictions sont connues d'après [DLM1] et une autre note non publiée de F. Digne, G. Lehrer et J. Michel sur les restrictions de Lusztig de caractères de Gel'fand-Graev [DLM2]. Les formules que l'on obtient pour le foncteur de Lusztig sont en termes du groupe de Weyl (cf théorème 16.2.1).

De la comparaison des résultats obtenus pour $R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}$ et $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ découle la commutativité du diagramme $(\bigstar)$ (cf théorème 17.3.1).

Notations

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels. Si E est un ensemble fini quelconque, on notera $|E|$ son cardinal. Si X est un ensemble quelconque, et si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X, on écrira

$$X = \dot{\bigcup_{i\in I}} X_i$$

pour dire que X est la réunion des X_i ($i \in I$), et que cette réunion est disjointe.

Dans toute cette thèse, p désignera un nombre premier fixé une fois pour toutes. Si n est un nombre entier, on notera n_p la plus grande puissance de p divisant n, et $n_{p'} = n/n_p$. Si G est un groupe quelconque, on notera G_p (respectivement $G_{p'}$) l'ensemble des $\boldsymbol{p}$**-éléments** (respectivement $\boldsymbol{p'}$**-éléments**) de G, c'est-à-dire les éléments de G dont l'ordre est fini et est une puissance de p (respectivement premier à p).

Soient $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$, q une puissance de p et $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q éléments. Toutes les variétés et tous les groupes algébriques seront considérés sur $\mathbb{F}$. On désignera par ℓ un nombre premier distinct de p, et par $\mathbb{K}$ une clôture algébrique du corps ℓ-adique $\mathbb{Q}_\ell$. Dans tout ce qui suit, on choisit une fois pour toutes un morphisme injectif de groupes

$$\iota : \mathbb{F}^\times \hookrightarrow \mathbb{K}^\times.$$

On se fixe aussi une fois pour toutes une racine de q dans $\mathbb{K}$, que l'on notera $\sqrt{q}$ ou $q^{\frac{1}{2}}$.

Soit G un groupe quelconque, et soit σ un automorphisme de G. Deux éléments x et y de G sont dits σ**-conjugués** s'il existe un élément $g \in G$ tel que $y = g^{-1}x\sigma(g)$. La relation de σ-conjugaison est une relation d'équivalence, et ses classes d'équivalence sont appelées les **classes de** $\boldsymbol{\sigma}$**-conjugaison**. On notera $H^1(\sigma, G)$ l'ensemble des classes de σ-conjugaison de G. Si G est abélien, alors $H^1(\sigma, G)$ est le premier groupe de cohomologie de $\langle\sigma\rangle$ à valeurs dans G, et est isomorphe à $G/\mathcal{L}_\sigma(G)$ où $\mathcal{L}_\sigma$ est le morphisme de groupes $\mathcal{L}_\sigma : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}\sigma(g)$.

Si E est un ensemble sur lequel G agit, on notera quelquefois ${}^g x$ (où $g \in G$ et $x \in E$) le transformé de x par g. Si X est une partie de E, on notera ${}^g X$ la partie de E image de X par l'action de g. Si f est une fonction sur X, on notera ${}^g f$ la fonction sur ${}^g X$ qui envoie x sur $f({}^{g^{-1}}x)$. Ces notations s'appliqueront en particulier à l'action de G sur lui-même par conjugaison (et uniquement pour cette action-là sur lui-même). Si $g \in G$, on notera $\operatorname{ad} g$ l'application $G \to G$, $x \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$. Si f est une fonction sur une partie quelconque X

de G, on notera aussi $(\mathrm{ad}\, g)_* f$ la fonction sur ${}^g X$ égale à ${}^g f$. On notera E^G l'ensemble des points fixes de E sous l'action de G. Si $g \in G$, on notera E^g l'ensemble des points fixes de E sous g.

Si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique, on notera $\mathbf{G}^\circ$ sa composante neutre, $\mathbf{G}_s$ (respectivement $\mathbf{G}_u$) l'ensemble des éléments semi-simples (respectivement unipotents) de $\mathbf{G}$. Si x appartient à $\mathbf{G}$, on notera x_s (respectivement x_u) sa partie semi-simple (respectivement unipotente) ; on notera aussi $C_{\mathbf{G}}(x)$ le centralisateur de x dans $\mathbf{G}$, et $C^\circ_{\mathbf{G}}(x)$ la composante neutre de $C_{\mathbf{G}}(x)$. On notera $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ (ou $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$) le centre de $\mathbf{G}$. D'autre part, si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique défini sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, on notera $\sigma(\mathbf{G})$ le rang d'un tore déployé maximal de $\mathbf{G}$. On posera $\varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^{\sigma(\mathbf{G})}$.

Si $\mathbf{G}$ est réductif, on appellera **sous-groupe régulier** de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{G}$ est défini sur $\mathbb{F}_q$, un sous-groupe régulier rationnel de $\mathbf{G}$ sera dit **G-déployé** s'il est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique rationnel de $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{T}$ est un tore, on notera $X(\mathbf{T})$ (respectivement $Y(\mathbf{T})$) le réseau des caractères rationnels $\mathbf{T} \to \mathbb{F}^\times$ (respectivement des sous-groupes à un paramètre $\mathbb{F}^\times \to \mathbf{T}$). On notera $\langle , \rangle$ la dualité parfaite $X(\mathbf{T}) \times Y(\mathbf{T}) \to \mathbb{Z}$.

Si G est un groupe fini, les représentations de G seront considérées sur $\mathbb{K}$. On notera $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G (sur $\mathbb{K}$). On notera $G^\wedge$ le groupe des caractères linéaires $G \to \mathbb{K}^\times$ (si G est abélien, on a $\mathrm{Irr}(G) = G^\wedge$). On notera $\mathrm{Cl}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G, et par $\mathcal{C}(G)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions centrales $G \to \mathbb{K}$. Si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{C}(G)$, on notera $\mathbb{K}\mathcal{E}$ le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{C}(G)$ engendré par $\mathcal{E}$. On notera $\langle , \rangle_G$ (ou $\langle , \rangle$ s'il n'y a pas de confusion possible) le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}(G)$:

$$\forall \gamma, \gamma' \in \mathcal{C}(G), \quad \langle f, g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \gamma(g) \overline{\gamma'(g)},$$

où $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}$ envoyant toute racine de l'unité de $\mathbb{K}$ sur son inverse. On notera $\mathcal{K}G$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{K}G$-modules (à gauche) de dimension finie. Pour simplifier, on appellera G-module un $\mathbb{K}G$-module.

Partie 1

Groupes réductifs non connexes

CHAPITRE I

Généralités

1. Produits en couronne

On va rappeler ici quelques résultats sur les représentations de produits en couronne de groupes finis, ce qui permettra de fixer quelques notations. Si n est un entier naturel non nul, on notera $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$. Si ω est un ensemble quelconque, on notera $\mathfrak{S}_\omega$ le groupe des permutations de cet ensemble.

1.1. Notations. Les notations que nous allons introduire seront utilisées jusqu'au paragraphe 1.3. Soit W_1 un groupe fini, et soit W° le groupe W_1^d, où d est un entier naturel non nul fixé. Le groupe $\mathfrak{S}_d$ agit sur W° par permutations des composantes, c'est-à-dire que, si $\alpha \in \mathfrak{S}_d$ et si $(w_1,\ldots,w_d) \in W^\circ$, alors

$$^{\alpha}(w_1,\ldots,w_d) = (w_{\alpha^{-1}(1)},\ldots,w_{\alpha^{-1}(d)}).$$

On notera W le produit semi-direct $W^\circ \rtimes \mathfrak{S}_d$. Cette construction est appelée le **produit en couronne** de W_1 par $\mathfrak{S}_d$ et est notée $W_1 \wr \mathfrak{S}_d$.

Le but de cette section est de décrire les caractères irréductibles de W en fonction de ceux de W° et de $\mathfrak{S}_d$. Si $\alpha \in \mathfrak{S}_d$, on notera $W^{\circ\alpha}$ le centralisateur de α dans W°, c'est-à-dire le groupe des points fixes de W° sous α.

1.2. Description d'une extension d'un caractère irréductible de W°. Soit χ un caractère irréductible de W°. On notera $\mathfrak{S}_d(\chi)$ le stabilisateur de χ dans $\mathfrak{S}_d$, et $W(\chi)$ le stabilisateur de χ dans W, égal à $W(\chi) = W^\circ \rtimes \mathfrak{S}_d(\chi)$. Le caractère χ de W° s'écrit sous la forme

$$\chi = \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_d,$$

où les χ_i sont des caractères irréductibles de W_1 $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Pour $1 \leqslant i,j \leqslant d$, soit $i \sim j$ la relation d'équivalence définie par $\chi_i = \chi_j$. Alors, si $\Omega(\chi)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation, on a

$$\mathfrak{S}_d(\chi) = \prod_{\omega\in\Omega(\chi)} \mathfrak{S}_\omega.$$

Pour construire une extension de χ à $W(\chi)$, on est ramené, par produit, au cas où $\Omega(\chi) = \{1,\ldots,d\}$, c'est-à-dire au cas où $\chi_1 = \cdots = \chi_d$, ce que l'on supposera par la suite. On a alors $\mathfrak{S}_d(\chi) = \mathfrak{S}_d$.

Soit V_1 un W_1-module irréductible ayant pour caractère χ_1. Alors le W°-module

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$$

a pour caractère χ. On note $\rho : W^\circ \to \mathbf{GL}(V)$ la représentation correspondante. On posera alors, pour tous $\alpha \in \mathfrak{S}_d$ et $v_1, \ldots, v_d$ dans V_1,

(1.2.1) $$\tilde{\rho}(\alpha)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = (v_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha^{-1}(d)}),$$

et on posera, pour tous $w \in W^\circ$ et $\alpha \in \mathfrak{S}_d$,

$$\tilde{\rho}(w\alpha) = \rho(w)\tilde{\rho}(\alpha).$$

Alors $\tilde{\rho} : W \to \mathbf{GL}(V)$ est une représentation de $W(\chi)$ dont la restriction à W° est égale à ρ. On notera $\tilde{\chi}$ le caractère irréductible de W associé à la représentation $\tilde{\rho}$.

On définit de même $\tilde{\rho}$ dans le cas général (où χ n'est pas forcément stable sous $\mathfrak{S}_d$) et on pose la

Définition 1.2.2. *La représentation $\tilde{\rho}$ de $W(\chi)$ construite comme précédemment sera appelée l'**extension canonique** de ρ. On dira aussi que $\tilde{\chi}$ est l'**extension canonique** de χ à $W(\chi)$.*

1.3. Calcul du caractère de l'extension canonique. Soient $w \in W^\circ$ et $\alpha \in \mathfrak{S}_d(\chi)$. On cherche à calculer $\tilde{\chi}(w\alpha)$. Comme dans le paragraphe précédent, on peut supposer que $\mathfrak{S}_d(\chi) = \mathfrak{S}_d$. On écrit $w = (w_1, \ldots, w_d)$ où $w_i \in W_1$ ($1 \leqslant i \leqslant d$). On note Ω_α l'ensemble des orbites de α dans $\{1, \ldots, d\}$. Alors le groupe $W^{\circ\alpha}$ est isomorphe à

(1.3.1) $$W^{\circ\alpha} \simeq W_1^{\Omega_\alpha} = \prod_{\omega \in \Omega_\alpha} W_1.$$

On note χ_α le caractère irréductible de $W^{\circ\alpha}$ égal à

(1.3.2) $$\chi_\alpha = \bigotimes_{\omega \in \Omega_\alpha} \chi_1$$

via l'isomorphisme précédent 1.3.1.

Pour tout $\omega \in \Omega_\alpha$, on pose $\pi_{\alpha,\omega}(w) = w_i w_{\alpha(i)} \ldots w_{\alpha^{l-1}(i)} \in W_1$ où i est un élément arbitrairement choisi de ω et $l = |\omega|$. On pose alors :

(1.3.3) $$\begin{array}{rccc} \pi_\alpha : & W^\circ & \longrightarrow & W^{\circ\alpha} \\ & w & \longmapsto & (\pi_{\alpha,\omega}(w))_{\omega \in \Omega_\alpha}, \end{array}$$

où $W^{\circ\alpha}$ est identifié à $W_1^{\Omega_\alpha}$ via l'isomorphisme 1.3.1. Un calcul élémentaire d'algèbre linéaire montre que

(1.3.4) $$\tilde{\chi}(w\alpha) = \chi_\alpha(\pi_\alpha(w)).$$

Remarque - L'application $\pi_\alpha : W^\circ \longrightarrow W^{\circ\alpha}$ dépend du choix effectué d'un élément i dans chaque orbite de α dans $\{1, \ldots, d\}$. Cependant, il est facile de vérifier que la classe de conjugaison de $\pi_\alpha(w)$ dans $W^{\circ\alpha}$ ($w \in W^\circ$) est indépendante de ce choix.

1.4. Cas général. On va énoncer les résultats obtenus dans un cadre plus général, la généralisation se faisant par produit des situations rencontrées dans les paragraphes 1.1 à 1.3. Les notations introduites dans ce paragraphe resteront valables jusqu'à la fin de cette section.

Soit W° un groupe fini isomorphe à un produit de groupes finis de la forme :

$$W^\circ = \prod_{i=1}^{r} (\underbrace{W_i \times \cdots \times W_i}_{d_i \text{ fois}})$$

où les d_i sont des entiers naturels non nuls et les W_i sont des groupes finis ($1 \leqslant i \leqslant r$). On se donne un groupe A et un morphisme de groupes

$$\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}.$$

Si $\alpha \in A$, on notera $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ l'image de α par φ. Le groupe A agit sur W° à travers le morphisme φ, c'est-à-dire pour tout $\alpha \in A$, et pour tout $w = (w_{i1}, \ldots, w_{id_i})_{1 \leqslant i \leqslant r} \in W^\circ$, on a

$${}^{\alpha}w = (w_{i\alpha_i^{-1}(1)}, \ldots, w_{i\alpha_i^{-1}(d_i)})_{1 \leqslant i \leqslant r}.$$

On notera W le produit semi-direct $W^\circ \rtimes A$.

Si χ est un caractère irréductible de W°, on notera $W(\chi)$ (respectivement $A(\chi)$) le stabilisateur de χ dans W (respectivement A). On a $W(\chi) = W^\circ \rtimes A(\chi)$.

Définition 1.4.1. *On appelle* ***extension canonique*** *de χ le caractère $\tilde{\chi}$ de $W(\chi)$ produit des extensions canoniques définies en* 1.2.2.

On vérifie alors facilement la

Proposition 1.4.2. *Soit $\alpha \in A$. L'application $(\operatorname{Irr} W^\circ)^\alpha \to \operatorname{Irr} W^{\circ\alpha}$, $\chi \mapsto \chi_\alpha$ définie comme en* 1.3.2 *est bijective.*

L' application $\pi_\alpha : W^\circ \to W^{\circ\alpha}$ définie comme en 1.3.3 *induit une bijection entre les classes de α-conjugaison de W° et les classes de conjugaison de $W^{\circ\alpha}$; ses fibres ont toutes pour cardinal $|W^\circ|/|W^{\circ\alpha}|$ et, pour tous $\chi \in (\operatorname{Irr} W^\circ)^\alpha$ et $w \in W^\circ$, on a :*

$$\tilde{\chi}(w\alpha) = \chi_\alpha(\pi_\alpha(w)).$$

Soit $\alpha \in A$. Si f et g sont deux fonctions sur $W^\circ.\alpha$ invariantes par conjugaison sous W°, on posera

$$\langle f, g \rangle_{W^\circ.\alpha} = \frac{1}{|W^\circ|} \sum_{w \in W^\circ} f(w\alpha)\overline{g(w\alpha)}.$$

On déduit immédiatement de la proposition 1.4.2 le

Corollaire 1.4.3. *Soit $\alpha \in A$ et soient χ et χ' deux caractères irréductibles de W° invariants sous α. Alors*

$$\langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi}' \rangle_{W^\circ.\alpha} = \langle \chi_\alpha, \chi'_\alpha \rangle_{W^{\circ\alpha}}.$$

1.5. Paramétrage des caractères irréductibles de W. On a vu que tout caractère irréductible de W° admet une extension à son groupe d'inertie. La théorie de Clifford dans ce cadre-là s'en trouve considérablement simplifiée :

Proposition 1.5.1. *Soit χ un caractère irréductible de W°. Le caractère $\tilde{\chi}$ est l'unique extension de χ à $W(\chi)$ telle que $\tilde{\chi}(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in A$. D'autre part, si ξ est un caractère irréductible de $A(\chi)$ (vu comme un caractère irréductible de $W(\chi)$), alors $\tilde{\chi} \otimes \xi$ est un caractère irréductible de $W(\chi)$ et*

$$\lambda_{\chi,\xi} = \operatorname{Ind}_{W(\chi)}^{W} \tilde{\chi} \otimes \xi$$

est un caractère irréductible de W. D'autre part,

$$\operatorname{Ind}_{W^\circ}^{W} \chi = \sum_{\xi \in \operatorname{Irr} A(\chi)} \xi(1)\lambda_{\chi,\xi}.$$

Preuve - Si $\tilde{\chi}'$ est une autre extension de χ à $W(\chi)$, alors il existe un caractère linéaire ξ de $A(\chi)$ tel que

$$\tilde{\chi}' = \tilde{\chi} \otimes \xi,$$

ce qui montre l'unicité de $\tilde{\chi}$ car le seul caractère linéaire de A ne prenant que des valeurs réelles positives est le caractère trivial. Pour montrer la première assertion de la proposition 1.5.1, il suffit de montrer que $\tilde{\chi}(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in A(\chi)$. Soit donc $\alpha \in A(\chi)$. La proposition 1.4.2 montre que :

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \chi_\alpha(1) > 0.$$

Les autres assertions de la proposition 1.5.1 résultent de la théorie de Clifford. ■

On notera par la suite $\mathcal{I}(W^\circ, A)$ l'ensemble des couples (χ, ξ) où χ est un caractère irréductible de W° et ξ est un caractère irréductible de $A(\chi)$. Si $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ, A)$ et si $\alpha \in A$, alors $({}^\alpha\chi, {}^\alpha\xi) \in \mathcal{I}(W^\circ, A)$ car ${}^\alpha\xi$ est un caractère irréductible de ${}^\alpha A(\chi) = A({}^\alpha\chi)$. Cela définit une action du groupe A sur l'ensemble $\mathcal{I}(W^\circ, \xi)$. On notera $\bar{\mathcal{I}}(W^\circ, A)$ l'ensemble des orbites de A dans $\mathcal{I}(W^\circ, A)$. Si $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ, A)$, on notera $\chi * \xi$ l'orbite de (χ, ξ) sous A. On notera par la suite $\lambda_{\chi*\xi}$ le caractère irréductible de W noté $\lambda_{\chi,\xi}$ dans la proposition 1.5.1 (en effet, le caractère $\lambda_{\chi,\xi}$ de W ne dépend que de l'orbite de (χ, ξ) sous A), ce qui nous donne une application

(1.5.2)
$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}(W^\circ, A) & \longrightarrow & \operatorname{Irr} W \\ \chi * \xi & \longmapsto & \lambda_{\chi*\xi}, \end{array}$$

et cette application est bijective d'après la théorie de Clifford.

1.6. Induction tordue. Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G. On suppose donnés deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E(G)$ et $E(H)$ ainsi qu'une application linéaire $R_H^G : E(H) \to E(G)$. Soient $\rho^G : G \to E(G)$ et $\rho^H : H \to E(H)$ deux fonctions centrales telles que, pour tout $h \in H$, on ait

$$R_H^G(\rho^H(h)) = \rho^G(h).$$

Pour toute fonction centrale γ (respectivement η) sur G (respectivement H) à valeurs dans $\mathbb{K}$, on pose :

$$R_\eta^H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \eta(h)\rho^H(h)$$

(respectivement

$$R_\gamma^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\gamma(g)\rho^G(g) \qquad).$$

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 1.6.1. *Soit η une fonction centrale sur H. ALors :*

$$R_H^G(R_\eta^H) = R^G_{\mathrm{Ind}_H^G \eta}.$$

Preuve - On pose $\gamma = \mathrm{Ind}_H^G \eta$. On a, par définition,

$$\begin{aligned} R_\gamma^G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{y\in G\\ {}^{y^{-1}}g\in H}}\eta({}^{y^{-1}}g)\rho^G(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{y\in G\\ {}^{y^{-1}}g\in H}}\eta({}^{y^{-1}}g)\rho^G(y^{-1}gy) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\eta(h)R_H^G(\rho^H(h)) \\ &= R_H^G(R_\eta^H).\ \blacksquare \end{aligned}$$

On va donner dans ce paragraphe une version “tordue” du lemme 1.6.1 (qui n'en est qu'un cas particulier) ainsi qu'une précision de ce résultat dans le cadre des produits en couronne.

Soit ϕ un automorphisme de G. Soit x un élément de G tel que $x\phi \in G \rtimes \langle\phi\rangle$ normalise H. Si η est une fonction centrale sur $Hx\phi$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$), on notera $\mathrm{Ind}_{Hx\phi}^{G\phi}\eta$ la restriction à $G\phi$ de la fonction $\mathrm{Ind}_{H\rtimes\langle x\phi\rangle}^{G\rtimes\langle\phi\rangle}\tilde{\eta}$, où $\tilde{\eta}$ est une fonction centrale sur $H \rtimes \langle x\phi\rangle$ prolongeant η (le résultat ne dépend pas du choix de $\tilde{\eta}$). On a alors, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ind}_{Hx\phi}^{G\phi}\eta)(g\phi) &= \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{y\in G\\ {}^{y^{-1}}(g\phi)\in Hx\phi}}\eta({}^{y^{-1}}(g\phi)) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{y\in G\\ y^{-1}g\phi(y)\in Hx}}\eta(y^{-1}g\phi(y)\phi). \end{aligned}$$

Soient $E(H, x\phi)$ et $E(G,\phi)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $R_H^G : E(H,x\phi) \to E(G,\phi)$ une application linéaire. On suppose donnée deux applications

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & E(H,x\phi) \\ h & \longmapsto & \rho_h^H \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E(G,\phi) \\ g & \longmapsto & \rho_g^G, \end{array}$$

telles que $\rho_h^H = \rho_{h'}^H$ (respectivement $\rho_g^G = \rho_{g'}^G$) si $hx\phi$ et $h'x\phi$ (respectivement $g\phi$ et $g'\phi$) sont conjugués sous H (respectivement G) et telles que, pour tout $h \in H$, on ait

$$R_H^G\rho_h^H = \rho_{hx}^G.$$

Si η (respectivement γ) est une fonction sur $Hx\phi$ (respectivement $G\phi$) invariante par conjugaison sous H (respectivement G), on pose :

$$R_\eta^H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\eta(hx\phi)\rho_h^H$$

(respectivement

$$R_\gamma^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\gamma(g\phi)\rho_g^G \qquad).$$

Lemme 1.6.2. *Soit η une fonction sur $Hx\phi$ invariante par conjugaison sous H. On pose $\gamma = \operatorname{Ind}_{Hx\phi}^{G\phi}\eta$. Alors :*

$$R_H^G(R_\eta^H) = R_\gamma^G.$$

Preuve - Il suffit d'appliquer le lemme 1.6.1 en remplaçant G par $G \rtimes \langle\phi\rangle$ et H par $H \rtimes \langle x\phi\rangle$ et de restreindre aux classes $G\phi$ et $Hx\phi$. ■

1.7. Induction tordue et produits en couronne. On va revenir à la situation qui nous intéresse. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on note H_i un sous-groupe de W_i. On pose

$$H^\circ = \prod_{1\leqslant i\leqslant r}\underbrace{(H_i\times\cdots\times H_i)}_{d_i \text{ fois}}.$$

Le sous-groupe H° de W° est stable sous A. On suppose dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, que A est cyclique engendré par un élément ϕ. On reprend les notations du paragraphe précédent avec $G = W^\circ$, $H = H^\circ$ et $x = 1$.

Si χ est un caractère irréductible de $W^{\circ\phi}$, on notera $\boldsymbol{\chi}$ le caractère irréductible de W° stable sous ϕ associé à χ par la proposition 1.4.2 (tel que $\boldsymbol{\chi}_\phi = \chi$), et on notera $\boldsymbol{\chi}^+$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}$ à W. On identifiera $\boldsymbol{\chi}^+$ avec sa restriction à $W^\circ\phi$. Si f est une fonction centrale sur $W^{\circ\phi}$, on étendra ces définitions par linéarité en posant :

$$\boldsymbol{f}^+ = \sum_{\chi\in\operatorname{Irr}W^{\circ\phi}}\langle f,\chi\rangle\boldsymbol{\chi}^+.$$

Lemme 1.7.1. *Soit f une fontion centrale sur $H^{\circ\phi}$. On pose $g = \operatorname{Ind}_{H^{\circ\phi}}^{W^{\circ\phi}} f$. Alors*

$$\boldsymbol{g}^+ = \operatorname{Ind}_{H^\circ\phi}^{W^\circ\phi}\boldsymbol{f}^+.$$

Preuve - D'après la proposition 1.4.2, il existe une application $\pi_\phi^H : H^\circ \to H^{\circ\phi}$ vérifiant les conditions de cette proposition. Il suffit de remarquer que π_ϕ^H est la restriction de π_ϕ. ■

1.8. Transformation de Mellin. On notera $\mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$ l'ensemble des couples (χ, α) où χ est un caractère irréductible de W° et α appartient à $A(\chi)$. Si $(\chi, \alpha) \in \mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$ et si $\beta \in A$, alors $({}^\beta\chi, {}^\beta\alpha) \in \mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$ car ${}^\beta\alpha$ appartient à ${}^\beta A(\chi) = A({}^\beta\chi)$. Cela définit une action de A sur $\mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$. On notera $\bar{\mathcal{I}}^\vee(W^\circ, A)$ l'ensemble des orbites de A dans $\mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$. Si $(\chi, \alpha) \in \mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$, on notera $\chi * \alpha$ l'orbite de (χ, α) sous A.

On posera alors, pour tout $\chi * \alpha$ dans $\bar{\mathcal{I}}^\vee(W^\circ, A)$,

(1.8.1)
$$\hat{\lambda}_{\chi*\alpha} = \sum_{\xi \in A(\chi)^\wedge} \overline{\xi(\alpha)}\ \lambda_{\chi*\xi}.$$

(On remarque en effet que $\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}$ ne dépend que de l'orbite sous A de (χ, α) dans $\mathcal{I}^\vee(W^\circ, A)$.)

Lemme 1.8.2. (a) *Soit $\chi * \xi \in \bar{\mathcal{I}}(W^\circ, A)$. Alors :*
$$\lambda_{\chi*\xi} = \frac{1}{|A(\chi)|} \sum_{\alpha \in A(\chi)} \xi(\alpha)\ \hat{\lambda}_{\chi*\alpha}.$$

(b) $(\hat{\lambda}_{\chi*\alpha})_{\chi*\alpha \in \bar{\mathcal{I}}^\vee(W^\circ, A)}$ *est une base orthogonale de $\mathcal{C}(W)$.*

(c) *On suppose A* ***abélien****. Soit $\chi * \alpha \in \bar{\mathcal{I}}^\vee(W^\circ, A)$. Soient $w \in W^\circ$ et $\beta \in A$. Alors :*
$$\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}(w\beta) = \begin{cases} |A(\chi)|\ \lambda_{\chi*1}(w\beta) & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve - Le (a) est clair et le (b) résulte immédiatement du (a).

Montrons le (c). Si β n'appartient pas à $A(\chi)$, alors $\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}(w\beta) = 0$. On peut donc supposer que β appartient à $A(\chi)$. Puisque A est abélien, on a, pour tout caractère irréductible ξ de $A(\chi)$,
$$\lambda_{\chi*\xi}(w\beta) = \xi(\beta)\lambda_{\chi*1}(w\beta).$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\chi*\alpha}(w\beta) &= \sum_{\xi \in A(\chi)^\wedge} \overline{\xi(\alpha)}\xi(\beta)\lambda_{\chi*1}(w\beta) \\ &= \begin{cases} |A(\chi)|\ \lambda_{\chi*1}(w\beta) & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sinon. } \blacksquare \end{cases} \end{aligned}$$

1.9. Produits en couronne de groupes symétriques. On suppose maintenant que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, le groupe W_i est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n_i}$, où n_i est un entier naturel non nul. On va généraliser au cas du groupe W le fait qu'un caractère irréductible d'un groupe symétrique est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'induits du caractère trivial à partir de sous-groupes **paraboliques**.

Soit $1 \leqslant i \leqslant r$. On notera S_i l'ensemble des transpositions $\{(12), (23), \dots, (n_i - 1, n_i)\}$. C'est un ensemble générateur de $\mathfrak{S}_{n_i}$. On notera S la réunion disjointe :
$$S = \dot{\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r}} (\underbrace{S_i\ \dot\cup\ \dots\ \dot\cup\ S_i}_{d_i \text{ fois}}).$$

Alors S est un ensemble générateur de W°. Si I est inclus dans S, on notera W_I° le sous-groupe de W° engendré par I. On notera A_I le normalisateur dans A de W_I°, c'est-à-dire le stabilisateur dans A de I. On notera W_I le produit semi-direct $W_I^\circ \rtimes A_I$.

Proposition 1.9.1. *Soit λ un caractère irréductible de W. Alors il existe des entiers relatifs a_I et des caractères ξ_I de A_I $(I \subseteq S)$ tels que :*

$$\lambda = \sum_{I \subseteq S} a_I \operatorname{Ind}_{W_I}^W \xi_I$$

où ξ_I est vu comme un caractère de W_I.

Preuve - Il existe un caractère irréductible χ de W° tel que λ soit une composante irréductible de l'induit de χ à W. Pour tout $I \subseteq S$, on notera $A_I(\chi)$ le stabilisateur de χ dans A_I, et $W_I(\chi)$ le produit semi-direct $W_I^\circ \rtimes A_I(\chi)$.

On va tout d'abord montrer qu'il existe des entiers relatifs b_I $(I \subseteq S)$ tels que

$$\chi_0 = \sum_{I \subseteq S} b_I \operatorname{Ind}_{W_I(\chi)}^{W(\chi)} 1$$

soit une extension de χ à $W(\chi)$. Pour cela, on peut supposer, quitte à renuméroter les W_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, que $A(\chi)$ agit transitivement sur les composantes de $W_i \times \cdots \times W_i$ (d_i fois). Par suite, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un caractère irréductible χ_i de W_i tel que

$$\chi = \bigotimes_{i=1}^r (\underbrace{\chi_i \otimes \cdots \otimes \chi_i}_{d_i \text{ fois}}).$$

On sait (cf [F]) que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe des entiers relatifs c_{I_i} $(I_i \subseteq S_i)$ tels que

$$\chi_i = \sum_{I_i \subseteq S_i} c_{I_i} \operatorname{Ind}_{W_{I_i}}^{W_i} 1.$$

Par suite,

$$\chi = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant d_i}} \sum_{I_{ij} \subseteq S_i} c_{I_{i1}} \dots c_{I_{id_i}} \operatorname{Ind}_{\prod_{i=1}^r (W_{I_{i1}} \times \cdots \times W_{I_{id_i}})}^{W^\circ} 1.$$

Cela signifie qu'il existe des entiers relatifs a_I $(I \subseteq S)$ tels que

$$\chi = \sum_{I \subseteq S} a_I \operatorname{Ind}_{W_I^\circ}^{W^\circ} 1,$$

et qu'ils vérifient

$$a_{{}^\alpha I} = a_I$$

pour tous $I \subseteq S$ et $\alpha \in A(\chi)$. On note $\mathcal{P}$ un ensemble de représentants des $A(\chi)$-orbites dans l'ensemble des parties de S. On pose alors :

$$\chi_0 = \sum_{I \in \mathcal{P}} a_I \operatorname{Ind}_{W_I(\chi)}^{W(\chi)} 1.$$

On a alors, d'après la formule de Mackey :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{W^\circ}^{W(\chi)} \chi_0 &= \sum_{I \in \mathcal{P}} a_I \operatorname{Res}_{W^\circ}^{W(\chi)} \operatorname{Ind}_{W_I(\chi)}^{W(\chi)} 1 \\
&= \sum_{I \in \mathcal{P}} \Big(a_I \sum_{\alpha \in A(\chi)/A_I(\chi)} \operatorname{Ind}_{W_{{}^\alpha I}^\circ}^{W^\circ} 1 \Big) \\
&= \sum_{I \subseteq S} a_I \operatorname{Ind}_{W_I^\circ}^{W^\circ} 1 \\
&= \chi.
\end{aligned}$$

Il existe donc un caractère linéaire ξ de $A(\chi)$ tel que

$$\lambda = \mathrm{Ind}_{W(\chi)}^{W}(\chi_0 \otimes \xi).$$

Pour tout $I \in \mathcal{P}$, on note ξ_I la restriction de ξ à $A_I(\chi)$. On a alors :

$$\lambda = \sum_{I \in \mathcal{P}'} a_I \, \mathrm{Ind}_{W_I(\chi)}^{W} \xi_I,$$

car

$$(\mathrm{Ind}_{W_I(\chi)}^{W(\chi)} 1) \otimes \xi = \mathrm{Ind}_{W_I(\chi)}^{W(\chi)} \xi_I.$$

Si on pose alors, pour tout $I \subseteq S$,

$$\xi_I' = \mathrm{Ind}_{A_I(\chi)}^{A_I} \xi_I,$$

on a :

$$\lambda = \sum_{I \in \mathcal{P}} a_I \, \mathrm{Ind}_{W_I}^{W} \xi_I',$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

2. Automorphismes quasi-centraux

Cette section commence par un paragraphe sur les centralisateurs de sous-tores d'un groupe réductif. Le corollaire 2.1.3 a une application immédiate dans cette section mais il servira surtout à construire des sous-groupes réguliers des groupes réductifs (cf paragraphe 13.1). Le reste de cette section est consacré à la généralisation des résultats de [DM2] sur l'étude du groupe des points fixes d'un groupe réductif sous un groupe d'automorphismes **quasi-centraux** (pour la définition d'un automorphisme quasi-central, cf [DM2], définition-théorème 1.15). L'application essentielle de ces résultats est d'obtenir quelques résultats sur les groupes non connexes : les groupes non connexes qui nous intéresseront seront des centralisateurs d'éléments semi-simples, dont le groupe des composantes connexes est en général abélien (et pas forcément cyclique).

Les résultats des paragraphes 2.1 à 2.4 restent vrais lorsque les groupes considérés sont définis sur un corps algébriquement clos quelconque.

2.1. Centralisateurs de sous-tores. Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{G}$, et soit A un groupe fini d'automorphismes de $\mathbf{T}$. Si $\sigma \in A$, on note encore σ l'action de σ sur $Y(\mathbf{T})$, et σ l'action de σ sur $X(\mathbf{T})$ (si $x \in X(\mathbf{T})$, alors $\sigma(x) = x \circ \sigma^{-1}$). On note $\mathbf{L}$ le sous-groupe régulier de $\mathbf{G}$ égal au centralisateur $C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Il est clair que $\mathbf{T}$ est contenu dans $\mathbf{L}$.

Proposition 2.1.1. *Avec les notations ci-dessus, soit α une racine de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}$. Alors α est une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$ si et seulement si*

$$\sum_{\sigma \in A} \sigma(\alpha) = 0.$$

Preuve - Par définition de $\mathbf{L}$, α est une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$ si et seulement si la restriction de α à $(\mathbf{T}^A)^\circ$ est le caractère trivial, c'est-à-dire si et seulement si α est orthogonale à $Y((\mathbf{T}^A)^\circ) \hookrightarrow Y(\mathbf{T})$.

Lemme 2.1.2. *On a $Y((\mathbf{T}^A)^\circ) = Y(\mathbf{T})^A$.*

Preuve - Soit $y \in Y(\mathbf{T})^A$. Alors l'image de y est contenue dans $\mathbf{T}^A$, et, puisqu'elle est connexe, elle est contenue dans $(\mathbf{T}^A)^\circ$. Par suite, $y \in Y((\mathbf{T}^A)^\circ)$. La réciproque est immédiate. □

Supposons que α soit orthogonale à $Y((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Soit $y \in Y(\mathbf{T})$. On pose $y' = \sum_{\sigma\in A}\sigma(y)$, et $\alpha' = \sum_{\sigma\in A}\sigma(\alpha)$. Alors $y' \in Y(\mathbf{T})^A$, donc, d'après le lemme 2.1.2, $\langle \alpha, y'\rangle = 0$. Or, $\langle \alpha, y'\rangle = \langle \alpha', y\rangle$, ce qui montre que α' est orthogonal à $Y(\mathbf{T})$, c'est-à-dire est trivial.

Réciproquement, supposons que $\sum_{\sigma\in A}\sigma(\alpha) = 0$. Soit alors $y \in Y(\mathbf{T})^A$. On a

$$\begin{aligned} 0 = \langle \sum_{\sigma\in A}\sigma(\alpha), y\rangle &= \langle \alpha, \sum_{\sigma\in A}\sigma^{-1}(y)\rangle \\ &= |A|\langle \alpha, y\rangle \end{aligned}$$

car y est stable sous A. Par suite, $\langle \alpha, y\rangle = 0$, ce qui montre que α est une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$. ■

Corollaire 2.1.3. *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-groupe de Borel de* $\mathbf{G}$ *contenant* $\mathbf{T}$*. On suppose que* A *stabilise le système de racines positives de* $\mathbf{G}$ *relativement au couple* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$*. Alors* $C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ) = \mathbf{T}$.

Preuve - On pose $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^A)^\circ)$. Soit α une racine de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$, positive relativement à l'ordre défini par $\mathbf{B}$. Alors, puisque A stabilise le couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$, $\sigma(\alpha)$ est une racine positive pour tout $\sigma \in A$. Or, d'après la proposition 2.1.1, on a

$$\sum_{\sigma\in A}\sigma(\alpha) = 0$$

ce qui est impossible. On en déduit que le système de racines de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$ est vide, c'est-à-dire que $\mathbf{L} = \mathbf{T}$. ■

2.2. Notations. Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe. Soit $\mathbf{B}_0$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{T}_0$ un tore maximal de $\mathbf{B}_0$. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_0$, et Δ la base de Φ associée à $\mathbf{B}_0$. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on notera $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}$ associé à α.

Soit A un groupe fini **abélien** d'automorphismes de $\mathbf{G}$ stabilisant $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{B}_0$. Les éléments de A sont donc, par définition, des automorphismes **quasi-semi-simples** de $\mathbf{G}$ (cf [S]). Tout élément $\sigma \in A$ induit un automorphisme de $X(\mathbf{T}_0)$ que l'on notera toujours σ : cet automorphisme permute les racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_0$.

Définition 2.2.1 ([DM2], définition-théorème 1.15). *Un automorphisme* σ *de* $\mathbf{G}$ *est dit **quasi-central** s'il est quasi-semi-simple et si, pour tout élément* g *de* $\mathbf{G}$ *tel que l'automorphisme* $\tau = \sigma \circ \operatorname{ad} g$ *de* $\mathbf{G}$ *soit quasi-semi-simple, on a* $\dim \mathbf{G}^\tau \leqslant \dim \mathbf{G}^\sigma$.

On suppose que les éléments de A sont des automorphismes **quasi-centraux** de $\mathbf{G}$. Le but de cette section est de généraliser au cas où A est abélien les résultats de [DM2], section 1, sur l'étude du groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ sous A : dans [DM2], il n'est traité que le cas où A est cyclique (c'est cependant le cas le plus difficile, la généralisation ne se faisant que par récurrence sur le cardinal de A).

Remarque - Le groupe cyclique engendré par un automorphisme quasi-central n'est pas nécessairement un groupe d'automorphismes quasi-centraux : il se peut qu'une puissance d'un automorphisme quasi-central ne le soit pas (cf [DM2], 1.20).

2.3. Récurrence. L'essentiel de la généralisation des résultats de [DM2] tient dans la proposition 2.3.1 que l'on va énoncer dans ce paragraphe et qui permet, en raisonnant par récurrence sur le cardinal de A, de se ramener au cas où A est cyclique.

Proposition 2.3.1. *Soit A' un sous-groupe maximal du groupe A et soit σ un élément de A n'appartenant pas à A'. On pose $\mathbf{G}' = (\mathbf{G}^\sigma)^\circ$. Alors les éléments de A' induisent des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}'$.*

Preuve - Puisque A est abélien, le groupe $\mathbf{G}'$ est stable sous A'. D'autre part, $(\mathbf{G}'^{A'})^\circ = (\mathbf{G}^A)^\circ$. D'après [DM2], théorème 1.8, (i), le groupe $\mathbf{G}'$ est un groupe réductif connexe. On pose $\mathbf{T}_0' = \mathbf{T}_0 \cap \mathbf{G}'$ et $\mathbf{B}_0' = \mathbf{B}_0 \cap \mathbf{G}'$. D'après [DM2], théorème 1.8, (iii), $\mathbf{B}_0'$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{T}_0'$ est un tore maximal de $\mathbf{B}_0'$. Le groupe A étant abélien, $\mathbf{T}_0'$ et $\mathbf{B}_0'$ sont A'-stables.

Soit $(x_\alpha : \mathbb{F} \to \mathbf{U}_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une famille d'isomorphismes. Pour tous $\tau \in A$ et $\alpha \in \Phi$, on notera $c_{\tau,\alpha}$ l'unique élément de $\mathbb{F}^\times$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{F},\ {}^\tau x_\alpha(\xi) = x_{\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi).$$

On posera d'autre part $C_{\sigma,\alpha} = c_{\sigma^i,\alpha}$, où i est le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^i(\alpha) = \alpha$ (c'est-à-dire le cardinal de l'orbite de α sous σ). Puisque σ^i est un automorphisme quasi-central, il résulte du théorème 1.8, (v), de [DM2] que $C_{\sigma,\alpha} = c_{\sigma^i,\alpha} = C_{\sigma^i,\alpha} = 1$ car $\sigma^i(\alpha) = \alpha$. Quitte à modifier les x_α ($\alpha \in \Delta$) par un automorphisme de $\mathbb{F}$ (c'est-à-dire par la multiplication par un élément de $\mathbb{F}^\times$), on peut supposer que $c_{\sigma,\alpha} = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \Delta,\ \forall \xi \in \mathbb{F},\ {}^\sigma x_\alpha(\xi) = x_{\sigma(\alpha)}(\xi).$$

Si $\tau \in A$ et si $\alpha \in \Delta$, alors on a, pour tout $\xi \in \mathbb{F}$,

$$x_{\sigma\tau(\alpha)}(c_{\sigma\tau,\alpha}\xi) = {}^{\sigma\tau}x_\alpha(\xi) = {}^\sigma x_{\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi) = x_{\sigma\tau(\alpha)}(c_{\tau,\alpha}\xi)$$

et, puisque A est abélien,

$${}^{\sigma\tau}x_\alpha(\xi) = {}^{\tau\sigma}x_\alpha(\xi) = {}^\tau x_{\sigma(\alpha)}(\xi) = x_{\tau\sigma(\alpha)}(c_{\tau,\sigma(\alpha)}\xi).$$

Par suite,

(2.3.2) $$c_{\tau,\alpha} = c_{\sigma\tau,\alpha} = c_{\tau,\sigma(\alpha)}.$$

On note Φ' le système de racines de $\mathbf{G}'$ relativement à $\mathbf{T}_0'$ et Δ' la base de Φ' associée à $\mathbf{B}_0'$. Si $\alpha \in \Phi$, on notera α' l'orbite de α sous σ. D'après [DM2], théorème 1.8, (v), Δ' peut être identifié avec avec l'ensemble des orbites de σ dans Δ. Soit $(x'_{\alpha'} : \mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Phi'}$ une famille d'isomorphismes quelconque. Pour tous $\tau \in A'$ et pour tout $\alpha' \in \Phi'$, on notera $c'_{\tau,\alpha'}$ l'unique élément de $\mathbb{F}^\times$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{F},\ {}^\tau x'_{\alpha'}(\xi) = x_{\tau(\alpha')}(c'_{\tau,\alpha'}\xi).$$

On se fixe $\tau \in A'$ et $\alpha \in \Delta$. On note i le cardinal de l'orbite de α' sous τ. Compte tenu de [DM2], définition-théorème 1.15, (v), pour montrer que τ induit un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}'$, il suffit de montrer l'égalité

$$(\sharp) \qquad c'_{\tau^i,\alpha'} = 1.$$

On remarque que $c'_{\tau^i,\alpha'}$ ne dépend pas du choix de la famille $(x'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Phi'}$.

Puisque $\tau^i(\alpha') = \alpha'$ et puisque $\tau(\alpha') = \tau(\alpha)'$ (car A est abélien), il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau^i(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$. Or, d'après la formule 2.3.2, on a

$$c_{\tau^i,\alpha} = c_{\tau^i\sigma^{-j},\alpha}.$$

On pose $\tau' = \tau^i\sigma^{-j}$. On a $\tau'(\alpha) = \alpha$ et τ' est un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}$. Donc, d'après [DM2], théorème 1.15, (v), on a $c_{\tau',\alpha} = 1$. Par suite,

$$\textbf{(2.3.3)} \qquad c_{\tau^i,\alpha} = 1.$$

Premier cas : Supposons que, pour toutes racines β et γ dans α', $\beta+\gamma$ ne soit pas une racine. On pose alors, pour tout $\xi \in \mathbb{F}$,

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{\beta \in \alpha'} x_\beta(\xi).$$

Puisque $x_\beta(\xi)$ et $x_\gamma(\xi')$ commutent pour tous β et γ dans α' et ξ et ξ' dans $\mathbb{F}$ (cela résulte des relations de Chevalley et du fait que $\beta+\gamma$ n'est pas une racine), l'application $x'_{\alpha'}$ est bien définie, ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue le produit et est un morphisme de groupes. C'est même un isomorphisme de groupes $x'_{\alpha'} : \mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$. Il est facile de vérifier que

$$c'_{\tau^i,\alpha'} = c_{\tau^i,\alpha} = 1$$

d'après la formule 2.3.3, ce qui montre ($\sharp$) dans ce cas-là.

Deuxième cas : Supposons maintenant trouvée une racine β dans α' telle que $\alpha+\beta$ soit une racine. On pose $\gamma = \alpha+\beta$. Alors α et β sont les deux racines “du milieu” d'une composante irréductible de type A_{2n} ($n \geqslant 1$) du graphe de Dynkin de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0)$. On peut donc supposer que, pour tous ξ et η dans $\mathbb{F}$, on a

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = x_\gamma(\xi\eta).$$

Par suite, $c_{\tau,\gamma} = c_{\tau,\alpha}c_{\tau,\beta} = c_{\tau,\alpha}^2$ car $c_{\tau,\alpha} = c_{\tau,\beta}$ d'après la formule 2.3.2. On note k le plus petit entier naturel tel que $\beta = \sigma^k(\alpha)$. Alors k est le cardinal de l'orbite de γ sous σ ; on remarque aussi que la somme de deux racines de γ' n'est pas une racine. On peut aussi supposer alors que, pour tous $\xi \in \mathbb{F}$ et $0 \leqslant j \leqslant k-1$,

$$x_{\sigma^j(\gamma)}(\xi) = {}^{\sigma^j}x_\gamma(\xi).$$

On a alors, d'après [DM2], théorème 1.8, (v),

$${}^{\sigma}x_{\sigma^{k-1}(\gamma)}(\xi) = x_\gamma(-\xi).$$

- Si $p = 2$: Dans ce cas, il est facile de vérifier que, si on pose

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{\delta \in \gamma'} x_\delta(\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{F}$, alors $x'_{\alpha'}$ est un isomorphisme $\mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$. Or, $c'_{\tau^i,\alpha'} = c_{\tau^i,\gamma} = c^2_{\tau^i,\alpha} = 1$ d'après la formule 2.3.3. D'où ($\sharp$).

• Si $p \neq 2$: Dans ce cas, un calcul fastidieux mais facile montre que, si on pose

$$x'_{\alpha'}(\xi) = \prod_{j=0}^{k-1} x_{\sigma^j(\alpha)}(\xi)\ x_{\sigma^j(\beta)}(\xi)\ x_{\sigma^j(\gamma)}(\frac{\xi^2}{2})$$

pour tout $\xi \in \mathbb{F}$, alors $x'_{\alpha'}$ est un isomorphisme $\mathbb{F} \to \mathbf{U}'_{\alpha'}$ et $c_{\tau^i,\alpha'} = c_{\tau^i,\alpha} = 1$ d'après la formule 2.3.3. Cela termine la démonstration de ($\sharp$). ■

2.4. Étude du groupe $(\mathbf{G}^A)^\circ$. On va étudier dans ce paragraphe les rapports entre les sous-groupes de Borel, les sous-groupes paraboliques, les tores maximaux et les sous-groupes réguliers de $\mathbf{G}$ et ceux de $(\mathbf{G}^A)^\circ$.

Proposition 2.4.1. (a) *Le groupe $\mathbf{G}^A$ est réductif.*

(b) *L'application $\mathbf{B} \longmapsto \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de Borel A-stables de $\mathbf{G}$ et l'ensemble des sous-groupes de Borel de $(\mathbf{G}^A)^\circ$.*

(c) *L'application $(\mathbf{T},\mathbf{B}) \longmapsto (\mathbf{T}\cap(\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B}\cap(\mathbf{G}^A)^\circ)$ induit une bijection entre l'ensemble des couples $(\mathbf{T},\mathbf{B})$ où $\mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ est un tore maximal A-stable de $\mathbf{B}$ et l'ensemble des couples formés d'un tore maximal de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ et d'un sous-groupe de Borel de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ le contenant.*

(d) *Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal A-stable d'un sous-groupe de Borel A-stable. On a $\mathbf{T} = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$.*

Preuve - On va montrer (a), (b) et (c) par récurrence sur $|A|$. Si $|A| = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $|A| \geqslant 2$ et les résultats (a), (b) et (c) vrais pour le couple $(\mathbf{G}', A')$ construit dans la proposition 2.3.1 dont on reprend les notations (A', σ, $\mathbf{G}'$, $\mathbf{T}'_0$, $\mathbf{B}'_0$ ...). On remarque que, puisque A est engendré par A' et σ, on a $(\mathbf{G}^A)^\circ = (\mathbf{G}'^{A'})^\circ$.

Par hypothèse de récurrence, le groupe $\mathbf{G}'^{A'}$ est réductif, donc $\mathbf{G}^A$ est réductif.

Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{G}$. Alors, d'après [DM2], théorème 1.8, (iii), $\mathbf{B}\cap\mathbf{G}'$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}'$. Puisque A est abélien, $\mathbf{B}\cap\mathbf{G}'$ est A'-stable, et donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}'^{A'})^\circ$ est un sous-groupe de Borel de $(\mathbf{G}'^{A'})^\circ = (\mathbf{G}^A)^\circ$. L'application du (b) de la proposition 2.4.1 est donc bien définie.

Soient $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux sous-groupes de Borel A-stables de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{B}_1 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}_2\cap(\mathbf{G}^A)^\circ$. Alors, par hypothèse de récurrence, $\mathbf{B}_1\cap\mathbf{G}' = \mathbf{B}_2\cap\mathbf{G}'$. Par suite, d'après [DM2], définition-théorème 1.15, (ii), on a $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, ce qui montre l'injectivité de l'application $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$.

Soit $\mathbf{B}''$ un sous-groupe de Borel de $(\mathbf{G}^A)^\circ$. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-groupe de Borel A'-stable $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{G}'$ tel que $\mathbf{B}'\cap(\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}''$. D'après [DM2], définition-théorème 1.15, (ii), il existe un unique sous-groupe de Borel σ-stable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{B}\cap\mathbf{G}' = \mathbf{B}'$. Par unicité de $\mathbf{B}$, ce dernier est A'-stable car $\mathbf{B}'$ l'est. Donc $\mathbf{B}$ est A-stable car il est aussi σ-stable. D'autre part, $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = (\mathbf{B} \cap \mathbf{G}') \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}' \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}''$. L'application $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}_0 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ est donc surjective, ce qui termine la démonstration du (b).

Le (c) se montre de la même manière que le (b) en utilisant le fait qu'il est vrai lorsque $A = \langle\sigma\rangle$, ce qui est démontré dans [DM2], corollaire 1.25.

Le (d) résulte immédiatement du corollaire 2.1.3. ■

Remarque - Le (a) de la proposition 2.4.1 n'utilise que la quasi-semi-simplicité des éléments de A.

Corollaire 2.4.2. *Soit* $(\mathbf{T},\mathbf{B})$ *un couple formé d'un tore maximal A-stable* $\mathbf{T}$ *de* $\mathbf{G}$ *et d'un sous-groupe de Borel A-stable* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{G}$ *le contenant. Alors il existe* $g \in (\mathbf{G}^A)^\circ$ *tel que*

$$^g(\mathbf{T}_0,\mathbf{B}_0) = (\mathbf{T},\mathbf{B}).$$

Preuve - D'après la proposition 2.4.1, (c) il existe $g \in (\mathbf{G}^A)^\circ$ tel que

$$^g(\mathbf{T}_0 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B}_0 \cap (\mathbf{G}^A)^\circ) = (\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ).$$

L'injectivité de l'application $(\mathbf{T},\mathbf{B}) \mapsto (\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$ montre alors que $^g(\mathbf{T}_0,\mathbf{B}_0) = (\mathbf{T},\mathbf{B})$. ■

Proposition 2.4.3. (a) *L'application* $\mathbf{P} \longmapsto \mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ *induit une bijection croissante entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques A-stables de* $\mathbf{G}$ *et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$.

(b) *L'application* $(\mathbf{L},\mathbf{P}) \longmapsto (\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ, \mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ)$ *induit une bijection croissante entre l'ensemble des couples* $(\mathbf{L},\mathbf{P})$ *où* $\mathbf{P}$ *est un sous-groupe parabolique A-stable de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi A-stable de* $\mathbf{P}$ *et l'ensemble des couples* $(\mathbf{L}',\mathbf{P}')$ *formés d'un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}'$ *de* $(\mathbf{G}^A)^\circ$ *et d'un sous-groupe de Levi* $\mathbf{L}'$ *de* $\mathbf{P}'$.

(c) *Avec les notations du (b), on a* $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(\mathrm{rad}(\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ))$.

Preuve - Cela se démontre de la même manière que le (b), le (c) et le (d) de la proposition 2.4.1, en utilisant le fait que le résultat est vrai lorsque A est cyclique (cf [DM2], corollaire 1.25). ■

Corollaire 2.4.4. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique A-stable de* $\mathbf{G}$ *et soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi A-stable de* $\mathbf{P}$. *Alors il existe un couple* $(\mathbf{T}_\mathbf{L},\mathbf{B}_\mathbf{L})$ *formé d'un tore maximal A-stable* $\mathbf{T}_\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{L}$ *et d'un sous-groupe de Borel A-stable* $\mathbf{B}_\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{L}$ *contenant* $\mathbf{T}_\mathbf{L}$. *De plus, les éléments de A induisent des automorphismes quasi-centraux de* $\mathbf{L}$.

Preuve - Soit $(\mathbf{T}',\mathbf{B}')$ un couple formé d'un tore maximal $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{L} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ et d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{P} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ contenant $\mathbf{T}'$. Par suite, d'après la proposition 2.4.1, il existe un unique couple $(\mathbf{T},\mathbf{B})$ formé d'un tore maximal A-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ et d'un sous-groupe de Borel A-stable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ tel que $\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$ et $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ$. Alors $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$ et $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}$. On pose $\mathbf{B}_\mathbf{L} = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}$. Alors $\mathbf{B}_\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{T} = \mathbf{T}_\mathbf{L}$.

Pour la dernière assertion, on peut supposer, quitte à conjuguer par un élément de $(\mathbf{G}^A)^\circ$, que $\mathbf{T}_0 \subseteq \mathbf{L}$ et $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{P}$. Il suffit alors d'appliquer par exemple [DM2], définition-théorème 1.15, (iii). ■

2.5. Cas des corps finis. On suppose dorénavant que $\mathbf{G}$ est défini sur $\mathbb{F}_q$ et on note $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ l'endomorphisme de Frobenius associé. On suppose que tous les éléments de A sont rationnels, c'est-à-dire commutent avec F.

Proposition 2.5.1. *Il existe un couple* $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ *où* $\mathbf{B}$ *est un sous-groupe de Borel A-stable et F-stable de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{T}$ *est un tore maximal A-stable et F-stable de* $\mathbf{B}$.

Preuve - Soit $\mathbf{B}'$ un sous-groupe de Borel F-stable de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ et soit $\mathbf{T}'$ un tore maximal F-stable de $(\mathbf{G}^A)^\circ$ contenu dans $\mathbf{B}'$. D'après la proposition 2.4.1, (c), il existe un unique couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ où $\mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel A-stable de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ est un tore maximal A-stable de $\mathbf{B}$ tel que $\mathbf{T} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{T}'$ et $\mathbf{B} \cap (\mathbf{G}^A)^\circ = \mathbf{B}'$. Par unicité du couple $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$, ce couple est F-stable. ∎

Corollaire 2.5.2. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique A-stable de* $\mathbf{G}$ *(non nécessairement rationnel) ayant un sous-groupe de Levi A-stable et rationnel. Alors il existe un couple* $(\mathbf{T_L}, \mathbf{B_L})$ *où* $\mathbf{B_L}$ *est un sous-groupe de Borel A-stable et F-stable de* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{T_L}$ *est un tore maximal A-stable et F-stable de* $\mathbf{B_L}$.

Preuve - Cela résulte immédiatement de la proposition 2.5.1 et du corollaire 2.4.4. ∎

Proposition 2.5.3. *Soit* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ *(non nécessairement rationnel) qui possède un sous-groupe de Levi rationnel* $\mathbf{L}$. *Alors, si la* $\mathbf{G}^F$*-orbite du couple* $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ *est A-stable, elle contient un couple A-stable.*

Preuve - On va raisonner par récurrence sur $|A|$ comme dans la proposition 2.4.1. On reprend donc les notations du paragraphe 2.3 (A', σ et $\mathbf{G}'$). On suppose donc le résultat vrai pour le couple $(\mathbf{G}', A')$.

D'après [DM2], proposition 1.38, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^F$ tel que ${}^g(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ soit σ-stable. On peut donc supposer que le couple $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, ce qui sera fait par la suite. On pose $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \cap \mathbf{G}'$ et $\mathbf{L}' = \mathbf{L} \cap \mathbf{G}'$. Alors, d'après [DM2], proposition 1.11, $\mathbf{P}'$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{L}'$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}'$.

Soit $\tau \in A'$. Par hypothèse, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^F$ tel que ${}^\tau(\mathbf{L}, \mathbf{P}) = {}^g(\mathbf{L}, \mathbf{P})$. Puisque A est abélien, le couple ${}^\tau(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, donc $g^{-1}\sigma(g)$ appartient au normalisateur dans $\mathbf{G}$ du couple, $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$, c'est-à-dire $\mathbf{L}$. D'autre part, σ commute avec F, donc $g^{-1}\sigma(g) \in \mathbf{L}^F$. D'après [DM2], proposition 1.39, on a $g \in \mathbf{G}'^F.\mathbf{L}^F$. On peut donc supposer que $g \in \mathbf{G}'^F$, ce qui montre que la $\mathbf{G}'^F$-orbite de $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est A'-stable.

Par suite, la $\mathbf{G}'^F$-orbite de $(\mathbf{L}', \mathbf{P}')$ est A'-stable. Par hypothèse de récurrence, il existe $g' \in \mathbf{G}'^F$ tel que ${}^{g'}(\mathbf{L}', \mathbf{P}')$ soit A'-stable. D'après [DM2], corollaire 1.25, puisque ${}^{g'}(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ est σ-stable, il est aussi A'-stable, donc A-stable. ∎

3. Groupes réductifs non connexes

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif non nécessairement connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. On va rappeler ici quelques résultats sur les groupes réductifs non connexes, et notamment, on va construire l'induction et la restriction de Lusztig dans ce cadre-là : cette construction a déjà été faite dans [DM2], définition 2.2. La classe de sous-groupes réguliers que l'on considère ici est légèrement plus générale que celle considérée dans [DM2] ; les deux définitions sont reliées par la proposition 3.3.3.

3.1. Généralités. Les notions de sous-groupes de Borel et de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ se définissent de la même manière que dans le cas où $\mathbf{G}$ est connexe, c'est-à-dire :

Définition 3.1.1. *On appelle **sous-groupe de Borel** de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe connexe résoluble maximal de $\mathbf{G}$. On appelle **sous-groupe parabolique** de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$ contenant un sous-groupe de Borel.*

Remarque - Les "paraboliques" de $\mathbf{G}$ construits par [DM2] (cf définition 1.4) sont les normalisateurs dans $\mathbf{G}$ des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}^\circ$. En particulier, ce sont des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ au sens de la définition précédente 3.1.1. Cependant, un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ au sens de la définition 3.1.1 n'est pas forcément un "parabolique" au sens de [DM2]. Il est contenu (en général strictement) dans un "parabolique" ayant même composante neutre.

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{U}$ son radical unipotent : $\mathbf{U}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}^\circ$. Soit $\mathbf{L}_0$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}^\circ$. On pose $\mathbf{L} = N_{\mathbf{P}}(\mathbf{L}_0)$. Alors (cf, par exemple, [DM1], corollaire 1.18) on a $\mathbf{L}^\circ = \mathbf{L} \cap \mathbf{G}^\circ = \mathbf{L}_0$, et

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{U}.$$

Définition 3.1.2. *Avec les notations ci-dessus, on dira que $\mathbf{L}$ est un **sous-groupe de Levi** du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$.*

*On appellera **sous-groupe régulier** de $\mathbf{G}$ tout sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$.*

Définition 3.1.3. *On appelle **quasi-tore maximal** de $\mathbf{G}$ tout normalisateur dans $\mathbf{G}$ d'un couple $(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ)$, où $\mathbf{T}^\circ$ est un tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$ et $\mathbf{B}^\circ$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$.*

Définition 3.1.4. *Si $\mathbf{T}^\circ$ est un tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$, on appellera **groupe de Weyl** de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$ le groupe quotient $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ)/\mathbf{T}^\circ$.*

Soit $\mathbf{T}^\circ$ un tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$ et soit $\mathbf{B}^\circ$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$. On note $\mathbf{T}$ le normalisateur, dans $\mathbf{G}$, du couple $(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ)$. Alors $\mathbf{T}$ est un quasi-tore maximal de $\mathbf{G}$, de composante neutre $\mathbf{T}^\circ$.

Si on note $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ)$ (respectivement $W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{T}^\circ)$) le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ (respectivement $\mathbf{G}^\circ$) relativement à $\mathbf{T}^\circ$, il est facile de vérifier que

$$W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^\circ) \simeq \mathbf{T}/\mathbf{T}^\circ \ltimes W_{\mathbf{G}}^\circ(\mathbf{T}^\circ).$$

Soit $\sigma \in \mathbf{G}^F$. On notera $\mathbf{G}(\sigma)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}^\circ$ et σ. C'est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$.

Proposition 3.1.5. *On suppose que σ induit un automorphisme **quasi-central** de $\mathbf{G}^\circ$. Soit $\mathbf{T}$ un quasi-tore maximal F-stable de $\mathbf{G}(\sigma)$. Alors il existe un $\mathbf{G}(\sigma)^F$-conjugué $\mathbf{T}_1$ de $\mathbf{T}$ contenant σ. De plus, $(\mathbf{T}_1^\sigma)^\circ$ est un tore maximal F-stable de $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$.*

L'application qui, à la $\mathbf{G}(\sigma)^F$*-classe de* $\mathbf{T}$*, associe la* $(\mathbf{G}^\sigma)^{\circ F}$*-classe de* $(\mathbf{T}_1^\sigma)^\circ$ *est bijective. Par suite, l'ensemble des* $\mathbf{G}(\sigma)^F$*-classes de quasi-tores maximaux* F*-stables de* $\mathbf{G}(\sigma)$ *est en bijection avec* $H^1(F, W^\sigma)$*, où* W *est le groupe de Weyl de* $\mathbf{G}^\circ$ *relativement à un tore maximal* F*-stable et* σ*-stable (il en existe toujours d'après* [DM2]*, proposition 1.36, (ii)).*

Preuve - cf [DM2], proposition 1.40. ∎

3.2. Groupes non connexes et automorphismes quasi-centraux. Soit $\mathbf{B}^\circ$ un sous-groupe de Borel F-stable de $\mathbf{G}^\circ$ et soit $\mathbf{T}^\circ$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{B}^\circ$. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$ et Δ la base de Φ relativement à $\mathbf{B}^\circ$. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on note $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}^\circ$ associée à α. On note ϕ l'automorphisme de $X(\mathbf{T}^\circ)$ tel que, pour tout $x \in X(\mathbf{T}^\circ)$, on ait

$$F(x) = q\phi(x).$$

Alors ϕ permute les racines de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On choisit une famille d'isomorphismes $(x_\alpha : \mathbb{F} \to \mathbf{U}_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ telle que, pour tous $\alpha \in \Phi$ et $\xi \in \mathbb{F}$, on ait

$${}^F x_\alpha(\xi) = x_{\phi(\alpha)}(\xi^q).$$

On note $\mathbf{B}$ le normalisateur de $\mathbf{B}^\circ$ dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ le normalisateur du couple $(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ)$ dans $\mathbf{G}$. On pose

$$A = \mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ.$$

Alors A est isomorphe à $\mathbf{B}/\mathbf{B}^\circ$ et à $\mathbf{T}/\mathbf{T}^\circ$. On pose pour finir

$$\mathbf{A} = \{\sigma \in \mathbf{T} \mid \forall\alpha \in \Delta,\ \forall\xi \in \mathbb{F},\ {}^\sigma x_\alpha(\xi) = x_{\sigma(\alpha)}(\xi)\}.$$

Alors $\mathbf{A}$ est F-stable, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ.\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \cap \mathbf{G}^\circ = \mathbf{Z}$ où $\mathbf{Z}$ désigne le centre de $\mathbf{G}^\circ$. De plus, A est isomorphe à $\mathbf{A}/\mathbf{Z}$. Par conséquent, on peut voir A comme un groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}^\circ$ (car $\mathbf{Z}$ agit trivialement sur $\mathbf{G}^\circ$). D'après [DM2], définition-théorème 1.15, (v), les éléments de A sont des automorphismes quasi-centraux de $\mathbf{G}^\circ$.

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On suppose que $\mathbf{L}$ est F-stable. On note $A_\mathbf{L}$ le sous-groupe de A image de $\mathbf{L}$ par le morphisme composé

$$\mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ \longrightarrow A$$

et on note $\mathbf{A_L}$ l'image réciproque de $A_\mathbf{L}$ dans $\mathbf{A}$.

Proposition 3.2.1. *On suppose que* A *est* ***abélien*** *et que* $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$*. Alors il existe un élément* $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ *tel que* ${}^g\mathbf{L}$ *(et donc* ${}^g\mathbf{P}$*) contienne* $\mathbf{A}_\mathbf{L}^F$*.*

Remarque - Si $H^1(F, \mathbf{Z}) = \{1\}$, alors le fait que $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$ est automatiquement vérifié (cf [DM2], proposition 1.35). En particulier, si $\mathbf{Z}$ est connexe, alors $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$.

Preuve - Par définition de $A_\mathbf{L}$, et compte tenu du fait que $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F}.\mathbf{A}^F$, l'orbite du couple $(\mathbf{L}^\circ, \mathbf{P}^\circ)$ sous $\mathbf{G}^{\circ F}$ est stable sous $A_\mathbf{L}^F$. D'après la proposition 2.5.3, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ tel que ${}^g(\mathbf{L}^\circ, \mathbf{P}^\circ)$ soit $A_\mathbf{L}^F$-stable. Puisque $N_{\mathbf{G}^\circ}(\mathbf{P}^\circ) = \mathbf{P}^\circ$ et $N_{\mathbf{P}^\circ}(\mathbf{L}^\circ) = \mathbf{L}^\circ$, on en déduit que ${}^g\mathbf{L}$ (et donc ${}^g\mathbf{P}$) contient $\mathbf{A}_\mathbf{L}^F$. ∎

3.3. Induction de Lusztig dans les groupes non connexes. Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, et soit $\mathbf{U}$ son radical unipotent. Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On suppose $\mathbf{L}$ rationnel. On note alors $\mathbf{Y_U}$ la variété :

$$\mathbf{Y_U} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}.$$

S'il y a ambiguïté on notera $\mathbf{Y_U^G}$ ou encore $\mathbf{Y_U^{G},F}$ la variété $\mathbf{Y_U}$. Le groupe $\mathbf{G}^F$ agit par translation à gauche et le groupe $\mathbf{L}^F$ agit par translation à droite sur $\mathbf{Y_U}$. On note $H_c^*(\mathbf{Y_U})$ le $\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{L}^F$ (c'est-à-dire un $\mathbf{G}^F$-module à gauche et un $\mathbf{L}^F$-module à droite tel que les actions respectives de $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{L}^F$ commutent) virtuel

$$H_c^*(\mathbf{Y_U}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i H_c^i(\mathbf{Y_U}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

On construit à partir du bimodule virtuel $H_c^*(\mathbf{Y_U})$ des foncteurs entre les groupes de Grothendieck $\mathcal{K}\mathbf{G}^F$ et $\mathcal{K}\mathbf{L}^F$ notés :

$$\begin{array}{rccl} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}: & \mathcal{K}\mathbf{L}^F & \longrightarrow & \mathcal{K}\mathbf{G}^F \\ & \pi & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y_U}) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}: & \mathcal{K}\mathbf{G}^F & \longrightarrow & \mathcal{K}\mathbf{L}^F \\ & \pi & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y_U})^\vee \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{G}^F} \pi, \end{array}$$

où $H_c^*(\mathbf{Y_U})^\vee$ désigne le dual de $H_c^*(\mathbf{Y_U})$ (c'est un $\mathbf{L}^F$-module-$\mathbf{G}^F$). Les deux foncteurs $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ induisent des foncteurs entre les espaces de fonctions centrales $\mathcal{C}(\mathbf{L}^F)$ et $\mathcal{C}(\mathbf{G}^F)$, toujours notés $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. Les formules les décrivant sont les suivantes :

Proposition 3.3.1. *Soient λ une fonction centrale sur $\mathbf{L}^F$ et γ une fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$. Alors :*

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)(g) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|} \sum_{x\in\mathbf{L}^F} \mathrm{Tr}((g, x^{-1}), H_c^*(\mathbf{Y_U}))\ \lambda(x),$$

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\gamma)(l) = \frac{1}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{y\in\mathbf{G}^F} \mathrm{Tr}((y^{-1}, l), H_c^*(\mathbf{Y_U}))\ \gamma(y),$$

pour tous $g \in \mathbf{G}^F$ et $l \in \mathbf{L}^F$.

Preuve - cf [DM1], proposition 4.5. ∎

Les foncteurs $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sont appelés respectivement les foncteurs d'**induction** et de **restriction de Lusztig**. Lorsque $\mathbf{G}$ est connexe, on retrouve les foncteurs de Lusztig habituels. Ils dépendent a priori du choix du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ dont $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi. Lorsqu'il y a un risque d'ambiguïté, on notera $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ les foncteurs $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 3.3.2. *Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ deux sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$. Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{P}$ et soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{Q}$ contenant $\mathbf{L}$.*

Alors $\mathbf{P} \cap \mathbf{M}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{M}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$. De plus :

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}},$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}} \circ {}^*R_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}^{\mathbf{G}}.$$

Preuve - On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{V}$ celui de $\mathbf{Q}$. Il est facile de voir que $\mathbf{P} \cap \mathbf{M}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{M}$ (car il contient $\mathbf{P}^\circ \cap \mathbf{M}^\circ$ qui est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{M}^\circ$), de radical unipotent $\mathbf{U} \cap \mathbf{M} = \mathbf{U} \cap \mathbf{M}^\circ$, et dont un sous-groupe de Levi est $\mathbf{L}$. Compte tenu des propriétés de la cohomologie ℓ-adique (cf, par exemple, [DM1], proposition 10.10), il suffit de montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{M}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}} & \longrightarrow & \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est un isomorphisme de variétés, où l'exposant ($\mathbf{G}$ ou $\mathbf{M}$) rappelle dans quel groupe sont définies les variétés correspondantes, et où $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{M}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ désigne le quotient de la variété produit $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ par $\mathbf{M}^F$, l'action du groupe $\mathbf{M}^F$ étant définie de la manière suivante :

$$m.(g,x) = (gm^{-1}, mx),$$

pour tous $m \in \mathbf{M}^F$, $g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$ et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$. Il suffit de montrer qu'elle est bien définie, injective et surjective.

Soient $g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$ et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$. On a alors

$$(gx)^{-1}F(gx) = x^{-1}(g^{-1}F(g))x.x^{-1}F(x).$$

Or, $x^{-1}(g^{-1}F(g))x$ appartient à $\mathbf{V}$ (car $x \in \mathbf{M}$ et $g^{-1}F(g) \in \mathbf{V}$) et $x^{-1}F(x) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{M}$. Par suite,

$$(gx)^{-1}F(gx) \in \mathbf{V}.(\mathbf{U} \cap \mathbf{M}) = \mathbf{U}$$

(cf [DM1], proposition 2.1, (iii)). L'application φ est donc bien définie.

Soient (g,x) et (g',x') dans $\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$ tels que $gx = g'x'$. On a alors $g'^{-1}g = x'x^{-1}$. On pose $m = x'x^{-1}$. On a $g = g'm$, $x = m^{-1}x'$ et $m \in \mathbf{M}$. On a alors :

$$g^{-1}F(g) = m^{-1}(g'^{-1}F(g'))m.m^{-1}F(m),$$

ce qui implique que $\mathbf{V} \cap \mathbf{V}.m^{-1}F(m)$ est non vide, c'est-à-dire que $F(m) = m$. Par suite, φ est injective.

Soit $y \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$. Il existe u dans $\mathbf{U} \cap \mathbf{M}$ et v dans $\mathbf{V}$ tels que $y^{-1}F(y) = vu$. D'autre part, d'après le théorème de Lang, il existe un élément x de $\mathbf{M}$ tel que $x^{-1}F(x) = u$. Alors $xvx^{-1} \in \mathbf{V}$, donc il existe g dans $\mathbf{G}$ tel que $g^{-1}F(g) = xvx^{-1}$. Par suite, $(gx)^{-1}F(gx) = y^{-1}F(y)$, donc on trouve $g' \in \mathbf{G}^F$ tel que $y = g'gx$. Or, $g'g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}}$ et $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{M}}^{\mathbf{M}}$, ce qui montre que φ est surjective. ■

Proposition 3.3.3. *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe* F*-stable de* $\mathbf{G}$ *contenant* $\mathbf{G}^\circ$*. Alors* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ *et un sous-groupe de Levi de lui-même. On a alors :*

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{G}^F}$$

et

$$^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\mathbf{G}^F}.$$

Preuve - En effet, dans ce cas-là, le radical unipotent de $\mathbf{L}$ est réduit à l'élément neutre. Or, la variété $\mathbf{Y}_{\{1\}}$ est égale à $\mathbf{G}^F$. Par suite, le $\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{L}^F$ $H_c^*(\mathbf{Y}_{\{1\}})$ est isomorphe à $\mathbb{K}\mathbf{G}^F$ munie des actions naturelles de $\mathbf{G}^F$ à gauche et $\mathbf{L}^F$ à droite (cf, par exemple, [DM1], proposition 10.8, (i)). ■

3.4. Caractères unipotents de groupes non connexe. On définit aussi pour les groupes non connexes la notion de caractère **unipotent**. La proposition 3.4.2 ci-dessous est bien connue lorsque $\mathbf{G}$ est connexe : la généralisation au cas non connexe est immédiate.

Définition 3.4.1. *On appelle* ***caractère unipotent*** *de* $\mathbf{G}^F$ *toute composante irréductible d'un caractère*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \rho,$$

où ρ *est un caractère unipotent de* $\mathbf{G}^{\circ F}$.

Compte tenu des propositions 3.3.2 et 3.3.3, un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ est unipotent si et seulement si il est une composante irréductible d'un $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)$ ou $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ (c'est-à-dire de $\mathbf{G}^\circ$). On notera $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ l'ensemble des caractères irréductibles unipotents de $\mathbf{G}^F$.

Proposition 3.4.2. *Soit* $\mathbf{Z}$ *un sous-groupe fermé connexe central* F*-stable de* $\mathbf{G}$. *Alors l'application naturelle*

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F, 1) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$$

est bijective.

Preuve - On note $\pi : \mathbf{G}^F \to \mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F$ l'application canonique. Si ρ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F$, alors ρ est une composante irréductible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \rho^\circ$, où ρ° est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$. Or $\rho \circ \pi$ est une composante irréductible de

$$(\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \rho^\circ) \circ \pi = \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F}(\rho^\circ \circ \pi),$$

donc $\rho \circ \pi$ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$ car $\rho^\circ \circ \pi$ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$ (cf, par exemple, [DM2], proposition 13.20). De plus, l'application naturelle $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F/\mathbf{Z}^F, 1) \to \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit ρ un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$. Il suffit de montrer que $\rho(z) = \rho(1)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$. Il existe un caractère unipotent ρ° de $\mathbf{G}^{\circ F}$ tel que ρ soit une composante irréductible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}^F} \rho^\circ$. Or, la proposition 3.4.2 est vraie si $\mathbf{G}$ est connexe (cf, par exemple, [DM1], proposition 13.20). En particulier, elle est vraie pour $\mathbf{G}^\circ$. Par suite, on a, pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$, $\rho^\circ(z) = \rho^\circ(1)$. Puisque $\mathbf{Z}$ est central dans $\mathbf{G}$, on a bien $\rho(z) = \rho(1)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}^F$. ■

CHAPITRE II

Caractères unipotents de groupes non connexes de type A

Ce chapitre est consacré à l'étude des caractères unipotents d'un groupe non connexe $\mathbf{G}$ produit semi-direct d'un sous-groupe régulier rationnel d'un groupe linéaire par un groupe permutant ses composantes irréductibles. Au passage, on fera le lien entre l'étude des caractères unipotents de $\mathbf{G}$ et la descente de Shintani des caractères unipotents du groupe linéaire (cf théorème 4.5.1) en adoptant le même point de vue que F. Digne (cf [D]).

On établit que tous les caractères unipotents de $\mathbf{G}$ sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne-Lusztig généralisés (cf théorème 5.2.1), ce qui permettra dans la dernière section de ce chapitre de calculer l'induction de Lusztig des caractères unipotents (cf théorème 5.5.1) en utilisant simplement la transitivité de ces foncteurs d'induction.

4. Groupes non connexes et descente de Shintani dans le groupe linéaire

4.1. Notations. Soit n un nombre entier naturel non nul. On note $\mathbf{G}_1$ le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$. On notera $F : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_1$ l'endomorphisme de Frobenius qui envoie la matrice $(a_{ij})_{1\,\leqslant\, i,j\,\leqslant\, n}$ sur la matrice $(a_{ij}^q)_{1\,\leqslant\, i,j\,\leqslant\, n}$. Si $g \in \mathbf{G}_1$, on notera ${}^F g$ l'image de g par F. On a donc $\mathbf{G}_1^F = \mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

On se fixe un autre entier naturel non nul d, et on note $\mathbf{G}^\circ$ le groupe $\mathbf{G}_1^d$. On notera encore F l'endomorphisme de Frobenius $F : \mathbf{G}^\circ \to \mathbf{G}^\circ$, $(g_1, \ldots, g_d) \mapsto ({}^F g_1, \ldots, {}^F g_d)$. On définit d'autre part un automorphisme σ de $\mathbf{G}^\circ$ par :

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & \mathbf{G}^\circ & \longrightarrow & \mathbf{G}^\circ \\ & (g_1, \ldots, g_d) & \longmapsto & (g_2, \ldots, g_d, g_1). \end{array}$$

Il est facile de vérifier que σ est un automorphisme quasi-central de $\mathbf{G}^\circ$, ainsi que tous les σ^i, $i \in \mathbb{Z}$ (en utilisant par exemple la caractérisation (i) de la définition 1.15 de [DM2]).

On notera A le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}^\circ)$ engendré par σ, et on notera $\mathbf{G}$ le produit semi-direct :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ \rtimes A.$$

L'endomorphisme de Frobenius F de $\mathbf{G}^\circ$ se prolonge en un endomorphisme de Frobenius toujours noté $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ agissant trivialement sur A.

Le but de cette section est de décrire, grâce à l'induction de Lusztig dans $\mathbf{G}$, les représentations unipotentes du groupe $\mathbf{G}^{\sigma F} = \mathbf{G}^{\circ\sigma F} \rtimes A$.

4.2. Caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$. Les caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$ ont été décrits dans [LS] à l'aide des caractères de Deligne-Lusztig.

On notera $\mathbf{T}_1$ le tore maximal de $\mathbf{G}_1$ formé des matrices diagonales inversibles. On notera $\mathbf{T}^\circ$ le tore maximal de $\mathbf{G}^\circ$ égal à $\mathbf{T}_1^d$. On notera de même W_1 de Weyl de $\mathbf{G}_1$ relativement à $\mathbf{T}_1$, et W° le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On a bien sûr :

$$W^\circ = W_1^d.$$

On notera W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On a :

$$W = W^\circ \rtimes A.$$

On notera d'autre part $\mathbf{B}_1$ le sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}_1$ formé des matrices triangulaires supérieures, et $\mathbf{B}^\circ$ le sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ égal à $\mathbf{B}_1^d$.

Si χ est un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$, il lui correspond, d'après la proposition 1.4.2, un caractère irréductible $\boldsymbol{\chi}$ de W° stable sous σF. On notera $\boldsymbol{\chi}^+$ son extension canonique au groupe $W^\circ \rtimes \langle\sigma F\rangle$ (cf paragraphe 1). Si w appartient à W°, on notera $\mathbf{T}_w^\circ$ un tore maximal σF-stable de $\mathbf{G}^\circ$ de type w relativement à $\mathbf{T}^\circ$ et à l'endomorphisme de Frobenius σF. On prendra $\mathbf{T}_1^\circ = \mathbf{T}^\circ$. On pose alors :

$$\textbf{(4.2.1)} \qquad R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}} = \frac{1}{|W^\circ|}\sum_{w\in W^\circ} \boldsymbol{\chi}^+(w\sigma F) R_{\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1).$$

Alors, d'après [LS], l'application

$$\textbf{(4.2.2)} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^{\circ\sigma F}, 1) \\ \chi & \longmapsto & R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}} \end{array}$$

est bijective.

On notera $\pi_1 : W^\circ \to W^{\circ\sigma F}$ construite comme dans la proposition 1.4.2 telle que, pour tout caractère irréductible χ de $W^{\circ\sigma F}$ et pour tout $w \in W^\circ$, on ait

$$\boldsymbol{\chi}^+(w\sigma F) = \chi(\pi_1(w)).$$

4.3. Description d'une extension de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}$ à $\mathbf{G}^{\sigma F}$. Pour décrire les caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\sigma F}$, on utilisera la théorie de Clifford. Pour cela, le premier résultat important est le suivant :

Proposition 4.3.1. *Les caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$ sont invariants sous σ.*

Preuve - Soit w un élément de W°. Il est facile de vérifier que

$$R_{\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1) \circ \sigma^{-1} = R_{{}^\sigma\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1) = R_{\mathbf{T}_w^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(1)$$

car le tore maximal ${}^\sigma\mathbf{T}_w^\circ$ est $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$-conjugué au tore maximal $\mathbf{T}_w^\circ$ (cela découle du fait que $\sigma(w)$ est σF-conjugué à w dans W°). Le résultat découle alors immédiatement de la formule 4.2.1. ■

Le groupe A étant cyclique, il résulte de la proposition 4.3.1 que tout caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$ a une extension à $\mathbf{G}^{\sigma F}$; les différentes extensions diffèrent par un caractère linéaire de A. On va décrire ici une extension particulière en fonction des caractères de Deligne-Lusztig du groupe $\mathbf{G}^{\sigma F}$.

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$ et soit i un entier appartenant à $\{0,1,\ldots,d-1\}$. On notera $\mathbf{G}(\sigma^i)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}^\circ$ et σ^i. On notera d'autre part $\mathbf{T}_i$ le quasi-tore maximal σF-stable $\mathbf{T}^\circ \rtimes \langle\sigma^i\rangle$ de $\mathbf{G}^\circ(\sigma^i)$. D'après la proposition 1.4.2, il correspond à χ un caractère irréductible σF-stable $\boldsymbol{\chi}_i$ de $W^{\circ\sigma^i}$, et on notera $\boldsymbol{\chi}_i^+$ l'extension canonique de χ à $W^{\circ\sigma^i} \rtimes \langle\sigma F\rangle$. Toujours d'après la proposition 1.4.2, il existe une application $\pi_i : W^{\circ\sigma^i} \to W^{\circ\sigma F}$ telle que, pour tout $w \in W^{\circ\sigma^i}$, on ait

$$\boldsymbol{\chi}_i^+(w\sigma F) = \chi(\pi_i(w)).$$

Si $w \in W^{\circ\sigma^i}$, on notera $\mathbf{T}_{w,i}$ un quasi-tore maximal σF-stable de $\mathbf{G}(\sigma^i)$ dont dont la classe de $\mathbf{G}(\sigma^i)^{\sigma F}$-conjugaison est associée à la classe de σF-conjugaison de w dans $W^{\circ\sigma^i}$ par la proposition 3.1.5. On posera alors, pour tout $g \in \mathbf{G}^{\circ\sigma F}$,

$$\textbf{(4.3.2)} \qquad \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}(g\sigma^i) = \frac{1}{|W^{\circ\sigma^i}|} \sum_{w \in W^{\circ\sigma^i}} \boldsymbol{\chi}_i^+(w\sigma F) R_{\mathbf{T}_{w,i}}^{\mathbf{G}(\sigma^i)}(1)(g\sigma^i),$$

où, pour tout $w \in W^{\circ\sigma^i}$, on a noté 1 la fonction sur $\mathbf{T}_{w,i}^{\sigma F}$ constante et égale à 1.

On a donc défini une fonction $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ sur $\mathbf{G}^{\sigma F}$ par la formule 4.3.2. On va montrer que c'est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^{\sigma F}$, et que c'est une extension de $R_\chi^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}$.

Notations - On prolonge les définitions de $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\chi}_i$, $\boldsymbol{\chi}_i^+$ et $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}$ au cas d'une fonction centrale f sur $W^{\circ\sigma F}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F}} \langle f,\chi\rangle \boldsymbol{\chi}, \\
\boldsymbol{f}_i &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F}} \langle f,\chi\rangle \boldsymbol{\chi}_i, \\
\boldsymbol{f}_i^+ &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F}} \langle f,\chi\rangle \boldsymbol{\chi}_i^+, \\
\tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}} &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F}} \langle f,\chi\rangle \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}.
\end{aligned}$$

Lemme 4.3.3. *Soient f et g deux fonctions centrales sur $W^{\circ\sigma F}$. Alors $\tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est une fonction centrale sur $\mathbf{G}^{\sigma F}$ et*

$$\langle \tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}, \tilde{R}_{\boldsymbol{g}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \rangle = \langle f,g\rangle.$$

Preuve - Par construction, la fonction $\tilde{R}_f^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est invariante par $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$-conjugaison. Un raisonnement analogue à celui de la proposition 4.3.1 montre qu'elle est invariante par conjugaison par σ. C'est donc bien une fonction centrale sur $\mathbf{G}^{\sigma F}$.

Soient γ et δ deux fonctions centrales sur $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i$. On posera :

$$\langle\gamma,\delta\rangle_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i} = \frac{1}{|\mathbf{G}^{\circ\sigma F}|} \sum_{g \in \mathbf{G}^{\circ\sigma F}} \gamma(g\sigma^i)\overline{\delta(g\sigma^i)}.$$

Avec ces notations, on a, d'après [DM2], proposition 4.8,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}, \tilde{R}_{\boldsymbol{g}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \rangle &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|\mathbf{G}^{\circ\sigma F}|}{|\mathbf{G}^{\sigma F}|} \langle \mathrm{Res}_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}, \mathrm{Res}_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \tilde{R}_{\boldsymbol{g}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \rangle_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d-1} \langle \boldsymbol{f}_i^+, \boldsymbol{g}_i^+ \rangle_{W^{\circ\sigma^i}.\sigma F} \\ &= \langle f, g \rangle\end{aligned}$$

car, d'après le lemme 1.7.1,

$$\langle \boldsymbol{f}_i^+, \boldsymbol{g}_i^+ \rangle_{W^{\circ\sigma^i}.\sigma F} = \langle f, g \rangle. \blacksquare$$

Lemme 4.3.4 (Digne-Michel). $\tilde{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} = 1_{\mathbf{G}^{\sigma F}}$.

Preuve - cf [DM2], proposition 4.12. ■

Soit $\mathbf{P}_1$ un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}_1$ relativement à $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{B}_1$. On note $\mathbf{P}^\circ$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}^\circ$ égal à $\mathbf{P}_1^d$. Soit $\mathbf{L}_1$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}_1$ contenant $\mathbf{T}_1$. On note $\mathbf{L}^\circ$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}^\circ$ contenant $\mathbf{T}^\circ$: on a $\mathbf{L}^\circ = \mathbf{L}_1^d$. On notera $W_{\mathbf{L}_1}$ le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_1$ relativement à $\mathbf{T}_1$ et $W_{\mathbf{L}}^\circ$ le groupe de Weyl de $\mathbf{L}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On a bien sûr $W_{\mathbf{L}}^\circ = W_{\mathbf{L}_1}^d$. On notera $\mathbf{L}$ le produit semi-direct :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^\circ \rtimes A.$$

Puisque est $\mathbf{L}_1$ est isomorphe à un produit de groupes linéaires, et puisque l'endomorphisme de Frobenius F est déployé sur $\mathbf{L}_1$, on peut associer, à toute fonction centrale f sur $W_{\mathbf{L}}^{\circ\sigma F}$, une fonction centrale sur $\mathbf{L}^{\sigma F}$ notée $\tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{L}^{\sigma F}}$ définie de la même manière que pour $\mathbf{G}^{\sigma F}$.

Lemme 4.3.5. *Soit f une fonction centrale sur $W_{\mathbf{L}}^{\circ\sigma F}$. On pose*

$$g = \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ\sigma F}}^{W^{\circ\sigma F}} f.$$

On a alors :

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{L}^{\sigma F}}) = \tilde{R}_{\boldsymbol{g}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}.$$

Preuve - Si $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, on notera $\mathbf{L}(\sigma^i)$ le sous-groupe de $\mathbf{L}$ engendré par $\mathbf{L}^\circ$ et σ^i. Compte tenu de la proposition 2.3, (i), de [DM2] , on a, pour tout $0 \leqslant i \leqslant d-1$,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^i}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{L}^{\sigma F}}) = R_{\mathbf{L}(\sigma^i)}^{\mathbf{G}(\sigma^i)}(\mathrm{Res}_{\mathbf{L}^{\circ\sigma F}.\sigma^i}^{\mathbf{L}^{\sigma F}} \tilde{R}_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{L}^{\sigma F}}).$$

Le résultat découle alors immédiatement de la transitivité des foncteurs d'induction de Lusztig (cf proposition 3.3.2) grâce au lemme 1.7.1 et 1.6.2. ■

Théorème 4.3.6. *Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$. Alors $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^{\sigma F}$, et c'est une extension de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}$.*

Preuve - Par définition, la restriction de $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ à $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}$ est égale à $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}$. D'autre part, d'après le lemme 4.3.3, on a :

$$\langle \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}, \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \rangle = 1.$$

Il suffit donc de montrer que $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est un caractère virtuel de $\mathbf{G}^{\sigma F}$.

On note S l'ensemble des réflexions simples de W_1 (relativement à $\mathbf{B}_1$). Si I est une partie de S, on notera $W_{1,I}$ le sous-groupe de W_1 engendré par I. On notera $\mathbf{P}_{1,I}$ le sous-groupe parabolique standard $\mathbf{B}_1 W_{1,I} \mathbf{B}_1$ de $\mathbf{G}_1$, et $\mathbf{L}_{1,I}$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}_{1,I}$ contenant $\mathbf{T}_1$. On a alors $W_{\mathbf{L}_{1,I}} = W_{1,I}$. On notera d'autre part $\mathbf{L}_I^\circ$ le groupe $\mathbf{L}_{1,I}^d$, $\mathbf{L}_I$ le groupe $\mathbf{L}_{1,I}^d \rtimes A$. On notera W_I° le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_I^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$ et W_I le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_I$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$.

On sait (cf [F]) qu'il existe des entiers relatifs a_I $(I \subseteq S)$ tels que :

$$\chi = \sum_{I \subseteq S} a_I \operatorname{Ind}_{W_I^{\circ\sigma F}}^{W^{\circ\sigma F}} 1_{W_I^{\circ\sigma F}}.$$

Par suite, d'après les lemmes 4.3.4 et 4.3.5, on a :

$$\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} = \sum_{I \subseteq S} a_I R_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{G}}(1_{\mathbf{L}_I^{\sigma F}}),$$

ce qui montre bien que $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est un caractère virtuel de $\mathbf{G}^{\sigma F}$. ■

4.4. Caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\sigma F}$. Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$ et soit ξ un caractère linéaire de A. On peut voir ξ comme un caractère linéaire de $\mathbf{G}^{\sigma F}$. On pose :

$$R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} = \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \otimes \xi.$$

D'après la théorie de Clifford, $R_{\chi,\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ est un caractère irréductible unipotent de $\mathbf{G}^{\sigma F}$. De plus :

$$\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}} = \sum_{\xi \in A^\wedge} R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}.$$

D'autre part, toujours d'après la théorie de Clifford et le lemme 4.3.3, l'application

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F} \times A^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^{\sigma F}, 1) \\ (\chi, \xi) & \longmapsto & R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} \end{array}$$

est bijective. On remarque que $W^{\sigma F} = W^{\circ\sigma F} \rtimes A = W^{\circ\sigma F} \times A$, donc on a une bijection canonique

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W^{\circ\sigma F} \times A^\wedge & \longrightarrow & \operatorname{Irr} W^{\sigma F} \\ (\chi, \xi) & \longmapsto & \chi \otimes \xi. \end{array}$$

On pose alors

$$\mathbf{R}_{\chi\otimes\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}} = R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^{\sigma F}},$$

de sorte que l'on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W^{\sigma F} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^{\sigma F}, 1) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_{\lambda}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}. \end{array}$$

4.5. Lien avec la descente de Shintani. L'application

$$\begin{array}{rccc} \tau_d : & \mathbf{G}_1^{F^d} & \longrightarrow & \mathbf{G}^{\circ\sigma F} \\ & g & \longmapsto & ({}^{F^{d-1}}g, \ldots, {}^F g, g) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes. D'autre part, si $g \in \mathbf{G}_1^{F^d}$, alors $\tau_d({}^F g) = {}^{\sigma^{-1}}\tau_d(g)$. Par suite, τ se prolonge en un isomorphisme de groupes, toujours noté

$$\begin{array}{rccc} \tau_d : & \mathbf{G}_1^{F^d} \rtimes \langle F \rangle & \longrightarrow & \mathbf{G}^{\sigma F} \\ & gF^i & \longmapsto & \tau(g)\sigma^{-i} \end{array}$$

De même, on a un isomorphisme naturel $\tau_1 : \mathbf{G}_1^F \longrightarrow (\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F$.

Soit $g \in \mathbf{G}_1^{F^d}$. D'après le théorème de Lang, on trouve $x \in \mathbf{G}_1$ tel que $g = x^{-1}F(x)$. Alors $g' = F^d(x)x^{-1} \in \mathbf{G}_1^{F^d}$, et l'application qui, à la F-classe de g dans $\mathbf{G}_1^{F^d}$, associe la classe de conjugaison de g' dans $\mathbf{G}_1^F$ est bien définie et est bijective. On la note :

$$N_{F^d/F} : H^1(F, \mathbf{G}_1^{F^d}) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbf{G}_1^F).$$

On identifie l'espace des fonctions sur $H^1(F, \mathbf{G}_1^{F^d})$ avec l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{G}_1^{F^d}.F)$ des fonctions centrales sur $\mathbf{G}_1^{F^d}.F$. De même, on identifie l'espace des fonctions sur $\mathrm{Cl}(\mathbf{G}_1^F)$ avec l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{G}_1^F)$ des fonctions centrales sur $\mathbf{G}_1^F$. La bijection $N_{F^d/F}$ induit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels noté :

$$\mathrm{Sh}_{F^d/F} : \mathcal{C}(\mathbf{G}_1^F) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{G}_1^{F^d}.F).$$

C'est ce que l'on appelle la **descente de Shintani** de F^d à F.

On note $\mathrm{Sh}_{\sigma,F}$ l'isomorphisme $\mathcal{C}((\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1})$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(\mathbf{G}_1^F) \arrow[r, "\mathrm{Sh}_{F^d/F}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{C}(\mathbf{G}_1^{F^d}.F) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathcal{C}((\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F) \arrow[r, "\mathrm{Sh}_{\sigma,F}"'] & \mathcal{C}(\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}) \end{tikzcd}$$

commutatif.

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F} = (W^{\circ\sigma})^F$. On peut lui associer un caractère irréductible $R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F}$ de $(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F$ de la manière suivante : si $w \in W^{\circ\sigma F} = W^{\circ\sigma}$, alors $(\mathbf{T}_{w,1}^\sigma)^\circ$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}^{\circ\sigma}$ de type w relativement à $\mathbf{T}^{\circ\sigma}$ (cf proposition 3.1.5), et on pose

$$R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F} = \frac{1}{|W^{\circ\sigma F}|} \sum_{w \in W^{\circ\sigma F}} \chi(w) R_{(\mathbf{T}_{w,1}^\sigma)^\circ}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma}}(1).$$

D'autre part, on note $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}}$ la restriction de $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ à $\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}$. On a alors :

Théorème 4.5.1. *Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$. Alors :*

$$\mathrm{Sh}_{\sigma,F}\, R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F} = \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}}.$$

Preuve - D'après [DM2], théorème 5.6, il existe un racine $d^{\text{ème}}$ de l'unité ζ telle que

$$\mathrm{Sh}_{\sigma,F}\, R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F} = \zeta \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}}.$$

D'autre part, on a par définition $\mathrm{Sh}_{\sigma,F}\, R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F}(\sigma^{-1}) = R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F}(1)$, donc il suffit de montrer que $R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F}(1) = \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma^{-1}}(\sigma^{-1})$ ou encore que $R_\chi^{(\mathbf{G}^{\circ\sigma})^F}(1) = \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma F}.\sigma}(\sigma)$.

Or, d'après [DM2], théorème 4.13, on a, pour tout $w \in W^\sigma$,

$$R_{\mathbf{T}_{w,1}}^{\mathbf{G}(\sigma)}(1)(\sigma) = R_{(\mathbf{T}_{w,1}^\sigma)^\circ}^{\mathbf{G}^{\circ\sigma}}(1)(1),$$

ce qui montre le résultat. ■

4.6. Produits en couronne de descentes des scalaires. On reprend les notations du paragraphe 4.1 ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}^\circ$, σ, F, A ...). On se fixe un entier naturel non nul e, et on note $\mathbf{H}_1$ le groupe $\mathbf{G}_1^e$. On note $\mathbf{H}^\circ$ le groupe $(\mathbf{G}^\circ)^e$, et on note encore F l'endomorphisme de Frobenius égal à F sur chacune des composantes. D'autre part, on note τ l'automorphisme de $\mathbf{H}^\circ$ égal à $\sigma \times \cdots \times \sigma$ (e fois). On a donc :

$$\mathbf{H}^{\circ\tau F} = (\mathbf{G}^{\circ\sigma F})^e.$$

Le groupe $\mathfrak{S}_e$ agit sur $\mathbf{H}^\circ$ par permutation des composantes, et cette action commute avec l'endomorphisme de Frobenius τF. D'autre part, le groupe A^e agit aussi de manière rationnelle sur $\mathbf{H}^\circ$. On note B le produit semi-direct

$$B = A^e \rtimes \mathfrak{S}_e.$$

On pose alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\circ \rtimes B.$$

On prolonge à $\mathbf{H}$ l'endomorphisme de Frobenius F en le faisant agir trivialement sur B. Le but de cette section est de décrire les caractères unipotents du groupe $\mathbf{H}^{\tau F}$. Puisque τ est central dans B, on a :

$$\mathbf{H}^{\tau F} = (\mathbf{G}^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e,$$

le groupe $\mathfrak{S}_e$ agissant par permutation des composantes.

4.7. Caractères unipotents de $\mathbf{H}^{\tau F}$. On note $W_{\mathbf{H}_1}$ le groupe de Weyl de $\mathbf{H}_1$ relativement au tore maximal $\mathbf{T}_1^e$, de sorte que $W_{\mathbf{H}_1} \simeq W_1^e$, et $W_{\mathbf{H}}^\circ$ le groupe de Weyl de $\mathbf{H}^\circ$ relativement au tore maximal $(\mathbf{T}^\circ)^e$ de $\mathbf{H}^\circ$, de sorte que $W_{\mathbf{H}_1}^\circ \simeq (W^\circ)^e$. On note $W_{\mathbf{H}}$ le groupe de Weyl de $\mathbf{H}$ relativement à $(\mathbf{T}^\circ)^e$. On a alors :

$$W_{\mathbf{H}} = W_{\mathbf{H}}^\circ \rtimes B = W^e \rtimes \mathfrak{S}_e.$$

On a vu au paragraphe 4.4 que, à tout caractère irréductible λ de $W^{\sigma F}$, on pouvait associer un caractère unipotent $\mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}^{\sigma F}}$ de $\mathbf{G}^{\sigma F}$. Par suite, on a une bijection entre $\mathrm{Irr}(W^{\sigma F})^e$ et $\mathcal{E}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, 1)$ que l'on notera

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(W^{\sigma F})^e & \longrightarrow & \mathcal{E}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, 1) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_\lambda^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e}. \end{array}$$

Lemme 4.7.1. *Soit λ un caractère irréductible de $(W^{\sigma F})^e$ et soit α un élément de $\mathfrak{S}_e$. Alors :*

$${}^\alpha\mathbf{R}_\lambda^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e} = \mathbf{R}_{{}^\alpha\lambda}^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e}.$$

Preuve - Claire. ■

On reprend les notations du paragraphe 1.5. On notera aussi $\mathcal{I}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$ l'ensemble des couples (ρ, ξ) où ρ est un caractère unipotent de $(\mathbf{G}^{\sigma F})^e$ et ξ est un caractère irréductible du stabilisateur $\mathfrak{S}_e(\rho)$ de ρ dans $\mathfrak{S}_e$. Le groupe $\mathfrak{S}_e$ agit par conjugaison sur $\mathcal{I}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$, et on notera $\bar{\mathcal{I}}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$ l'ensemble des orbites de $\mathfrak{S}_e$ dans $\mathcal{I}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$. Si $(\rho, \xi) \in \mathcal{I}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$, on notera encore $\rho * \xi$ son orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_e$.

Si λ (respectivement ρ) est un caractère irréductible de $(W^{\sigma F})^e$ (respectivement un caractère unipotent de $(\mathbf{G}^{\sigma F})^e$), on notera $\tilde{\lambda}$ (respectivement $\tilde{\rho}$) l'extension canonique de λ (respectivement ρ) à $(W^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e(\lambda)$ (respectivement $(\mathbf{G}^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e(\rho)$). Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}((W^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e) & \longrightarrow & \operatorname{Irr} W_{\mathbf{H}}^{\tau F} \\ (\lambda, \xi) \bmod \mathfrak{S}_e & \longmapsto & \operatorname{Ind}_{(W^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e(\lambda)}^{W_{\mathbf{H}}^{\tau F}} \tilde{\lambda} \otimes \xi \end{array}$$

(respectivement

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{H}^{\tau F}, 1) \\ (\rho, \xi) \bmod \mathfrak{S}_e & \longmapsto & \operatorname{Ind}_{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e(\rho)}^{\mathbf{H}^{\tau F}} \tilde{\rho} \otimes \xi \quad) \end{array}$$

est bijective. D'après le lemme 4.7.1, on a une bijection naturelle entre $\bar{\mathcal{I}}((W^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$ et $\mathcal{I}((\mathbf{G}^{\sigma F})^e, \mathfrak{S}_e)$, ce qui nous donne une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W_{\mathbf{H}}^{\tau F} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{H}^{\tau F}, 1) \\ \psi & \longmapsto & \mathbf{R}_{\psi}^{\mathbf{H}^{\tau F}}. \end{array}$$

Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}$. On notera $\tilde{\chi}$ l'extension canonique de χ à $W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F} \rtimes B(\chi)$, et on posera, pour tout caractère irréductible ξ de $B(\chi)$,

$$\psi_{\chi,\xi} = \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F} \rtimes B(\chi)}^{W_{\mathbf{H}}^{\tau F}} \tilde{\chi} \otimes \xi.$$

On a donc une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}(W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}, B) & \longrightarrow & \operatorname{Irr} W_{\mathbf{H}}^{\tau F} \\ \chi * \xi & \longmapsto & \psi_{\chi,\xi}. \end{array}$$

Lemme 4.7.2. *Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{H}^\circ}^{\tau F}$ et soit $\beta \in B$. On a :*

$${}^{\beta}R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}} = R_{{}^{\beta}\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}$$

et

$${}^{\beta}\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e} = \tilde{R}_{{}^{\beta}\boldsymbol{\chi}}^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e}.$$

Preuve - Claire. ■

Soit ρ un caractère unipotent de $\mathbf{H}^{\circ\tau F}$. Il existe un caractère irréductible χ de $W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}$ tel que $\rho = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}$. On note $\tilde{\rho}$ l'extension canonique de $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{(\mathbf{G}^{\sigma F})^e}$ à $\mathbf{H}^{\circ\tau F} \rtimes B(\rho) = (\mathbf{G}^{\sigma F})^e \rtimes \mathfrak{S}_e(\chi)$. C'est une extension de ρ à $\mathbf{H}^{\circ\tau F} \rtimes B(\rho)$.

Définition 4.7.3. *Le caractère unipotent $\tilde{\rho}$ de $\mathbf{H}^{\circ\tau F} \rtimes B(\rho)$ sera appelé l'**extension canonique** de ρ.*

On posera, pour tout caractère irréductible ξ de $B(\rho)$,

$$\tilde{\rho}_\xi = \mathrm{Ind}_{\mathbf{H}^{\circ\tau F}\rtimes B(\rho)}^{\mathbf{H}^{\tau F}} \tilde{\rho}\otimes\xi.$$

On a donc une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathfrak{I}}(\mathbf{H}^{\circ\tau F}, B) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{H}^{\tau F}, 1) \\ \rho * \xi & \longmapsto & \tilde{\rho}_\xi. \end{array}$$

D'après le lemme 4.7.2, on a une bijection entre $\bar{\mathfrak{I}}(W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}, B)$ et $\bar{\mathfrak{I}}(\mathbf{H}^{\circ\tau F}, B)$, et on a, pour tout $\chi * \xi \in \bar{\mathfrak{I}}(W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}, B)$,

$$\textbf{(4.7.4)} \qquad \mathbf{R}_{\psi_{\chi,\xi}}^{\mathbf{H}^{\tau F}} = (\widetilde{R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}})_\xi.$$

On va donner une expression de $\widetilde{R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}}$ en fonction des caractères de Deligne-Lusztig de manière similaire à la formule 4.3.2.

Soit $\beta\in B$. On note $\mathbf{H}(\beta)$ le sous-groupe de $\mathbf{H}$ engendré par $\mathbf{H}^\circ$ et β et $W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}$ le centralisateur de β dans $W_{\mathbf{H}}^\circ$. Si $w\in W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}$, on notera $\mathbf{T}_{w,\beta}$ un quasi-tore maximal de $\mathbf{H}(\beta)$ dont la classe de $\mathbf{H}(\beta)^{\tau F}$-conjugaison est associée à la classe de τF-conjugaison de w via la bijection de la proposition 3.1.5.

Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}$, et soit β un élément de $B(\chi)$. On note $\mathbf{H}(\chi)$ le produit semi-direct $\mathbf{H}^\circ \rtimes B(\chi)$, de sorte que $\mathbf{H}(\chi)^{\tau F}$ soit le stabilisateur de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}$ dans $\mathbf{H}^{\tau F}$. On notera $\boldsymbol{\chi}_\beta$ le caractère irréductible de $W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}$ par la bijection de la proposition 1.4.2 et $\boldsymbol{\chi}_\beta^+$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}_\beta$ à $W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}\rtimes\langle\tau F\rangle$ associé à χ.

Théorème 4.7.5. *Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{H}}^{\circ\tau F}$ et soient $h\in\mathbf{H}^{\circ\tau F}$ et $\beta\in B(\chi)$. Alors :*

$$\textbf{(4.7.6)} \qquad \widetilde{R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}}(h\beta) = \frac{1}{|W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}} \boldsymbol{\chi}_\beta^+(w\tau F) R_{\mathbf{T}_{w,\beta}}^{\mathbf{H}(\beta)}(1)(h\beta).$$

Preuve - On définit une fonction $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}(\chi)^{\tau F}}$ sur $\mathbf{H}(\chi)^{\tau F}$ en posant, pour tous $h\in\mathbf{H}^{\circ\tau F}$ et $\beta\in B(\chi)$,

$$\tilde{R}_{\chi}^{\mathbf{H}(\chi)^{\tau F}}(h\beta) = \frac{1}{|W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{H}}^{\circ\beta}} \boldsymbol{\chi}_\beta^+(w\tau F) R_{\mathbf{T}_{w,\beta}}^{\mathbf{H}(\beta)}(1)(h\beta).$$

Le théorème 4.7.5 revient à montrer que

$$\widetilde{R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}} = \tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{H}(\chi)^{\tau F}}.$$

On écrit $\beta = (\sigma^{i_1},\ldots,\sigma^{i_e})\alpha$ où les i_j $(1\leqslant j\leqslant e)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et où $\alpha\in\mathfrak{S}_e$. En décomposant α en produits de cycles disjoints et, comme dans la section 1, on peut supposer que α est le cycle $(1,2,\ldots,e)$, ce qui implique que χ est invariant sous $\mathfrak{S}_e$. On écrit

$$\chi = \underbrace{\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_1}_{e \text{ fois}}$$

où χ_1 est un caractère irréductible de $W^{\circ\sigma F}$. Soit alors $h=(g_1,\ldots,g_e)\in\mathbf{H}^{\circ\tau F} = (\mathbf{G}^{\circ\sigma F})^e$. On a :

$$\textbf{(4.7.7)} \qquad \widetilde{R_{\chi}^{\mathbf{H}^{\circ\tau F}}}(h\beta) = \tilde{R}_{\chi_1}^{\mathbf{G}^{\sigma F}}(g_1\sigma^{i_1}.g_2\sigma^{i_2}\ldots g_e\sigma^{i_e}).$$

Soit $w = (w_1, \ldots, w_e)$ un élément de $W^\circ_{\mathbf{H}}$ où, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, $w_j \in W^\circ$. Alors :

$$ {}^{\beta}w = (\sigma^{i_1}(w_e), \sigma^{i_2}(w_1), \ldots, \sigma^{i_e}(w_{e-1})). $$

Par suite, w centralise β si et seulement si $\sigma^{i_1+\cdots+i_e}(w_1) = w_1$ et, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e-1$, $w_{j+1} = \sigma^{i_{j+1}}(w_j)$. On pose $i = i_1 + \cdots + i_e$. On a donc un isomorphisme :

$$ \begin{array}{rccc} \theta : & W^{\circ\sigma^i} & \longrightarrow & W^{\circ\beta}_{\mathbf{H}} \\ & w_1 & \longmapsto & (w_1, \sigma^{i_2}(w_1), \ldots, \sigma^{i_2+\cdots+i_e}(w_1)). \end{array} $$

D'autre part, deux éléments w_1 et w_1' de $W^{\circ\sigma^i}$ sont σF-conjugués si et seulement si $\theta(w_1)$ et $\theta(w_1')$ sont τF-conjugués.

D'autre part, il est facile de vérifier que, pour tout $w_1 \in W^{\circ\sigma^i}$,

(4.7.8) $$ \boldsymbol{\chi}^+_\beta(\theta(w_1)\tau F) = \boldsymbol{\chi}^+_1(w_1\sigma F). $$

On note $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}$ (respectivement $\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}$) la variété des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}^\circ$ (respectivement $\mathbf{H}^\circ$). Si $w_1 \in W^{\circ\sigma^i}$ (respectivement $w \in W^{\circ\beta}_{\mathbf{H}}$), on note $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(w_1)$ (respectivement $\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(w)$) la sous-variété de $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}$ (respectivement $\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}$) formé des sous-groupes de Borel $\mathbf{B}_{\mathbf{G}^\circ}$ de $\mathbf{G}^\circ$ (respectivement $\mathbf{B}_{\mathbf{H}^\circ}$ de $\mathbf{H}^\circ$) tels que ${}^{\sigma F}\mathbf{B}_{\mathbf{G}^\circ}$ (respectivement ${}^{\tau F}\mathbf{B}_{\mathbf{H}^\circ}$) soit en position w_1 (respectivement w) par rapport à $\mathbf{B}_{\mathbf{G}^\circ}$ (respectivement $\mathbf{B}_{\mathbf{H}^\circ}$). On rappelle le :

Lemme 4.7.9 (Digne-Michel). *Soit $w \in W^{\circ\beta}_{\mathbf{H}}$. Alors :*

$$ R^{\mathbf{H}(\beta)}_{\mathbf{T}_{w,\beta}}(1)(h\beta) = \mathrm{Tr}(h\beta, H^*_c(\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(w))). $$

Preuve - cf [DM2], proposition 5.3. □

Compte tenu des formules 4.7.7 et 4.7.8 et du lemme précédent 4.7.9, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.7.10. *Soit $w_1 \in W^{\circ\sigma^i}$. On a :*

$$ \mathrm{Tr}(h\beta, H^*_c(\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1)))) = \mathrm{Tr}(g_1\sigma^{i_1}(g_2)\ldots\sigma^{i_1+\cdots+i_{e-1}}(g_e)\sigma^i, H^*_c(\mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(w_1))). $$

Preuve - On pose $g = g_1\sigma^{i_1}(g_2)\ldots\sigma^{i_1+\cdots+i_{e-1}}(g_e)$. On remarque tout d'abord que

$$ \mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1)) = \mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(w_1) \times \mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(\sigma^{i_2}(w_1)) \times \cdots \times \mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(\sigma^{i_2+\cdots+i_e}(w_1)). $$

L'endomorphisme de Frobenius $(\tau F)^d = F^d$ (respectivement $(\sigma F)^d = F^d$) agit sur la variété $\mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1))$ (respectivement $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(\sigma^j(w_1))$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$). Soit $\mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_e \in \mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1))$. On a, pour tout $m \geqslant 1$:

$$ {}^{h\beta F^{dm}}(\mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_e) = {}^{g_1\sigma^{i_1}F^{dm}}\mathbf{B}_e \times {}^{g_2\sigma^{i_2}F^{dm}}\mathbf{B}_1 \times \ldots {}^{g_e\sigma^{i_e}F^{dm}}\mathbf{B}_{e-1}. $$

Par suite, $\mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_e \in \mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1))^{h\beta(\tau F)^{im}}$ si et seulement si ${}^{g\sigma^i F^{dem}}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1$ et, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e-1$, $\mathbf{B}_{j+1} = {}^{g_{j+1}\sigma^{j+1}F^{dm}}\mathbf{B}_j$. Par suite, l'application

$$ \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{\mathbf{G}^\circ}(w_1)^{g\sigma^i F^{dem}} & \longrightarrow & \mathbf{X}_{\mathbf{H}^\circ}(\theta(w_1))^{h\beta F^{dm}} \\ \mathbf{B}_1 & \longmapsto & \mathbf{B}_1 \times {}^{g_2\sigma^{i_2}F^{dm}}\mathbf{B}_1 \times \cdots \times {}^{g_2\sigma^{i_2}\ldots g_e\sigma^{ie}F^{d(e-1)m}}\mathbf{B}_1 \end{array} $$

est bijective. Le résultat découle alors des propriétés classiques de la cohomologie étale (cf, par exemple, [DM1], corollaire 10.5). ■

5. Caractères unipotents de produits en couronne de groupes linéaires

5.1. Notations. On note $\mathbf{G}^\circ$ le groupe

$$\mathbf{G}^\circ = \prod_{i=1}^{r} (\underbrace{\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})}_{d_i \text{ fois}})$$

où les n_i et les d_i sont des entiers naturels non nuls ($1 \leqslant i \leqslant r$), et on note $F_0 : \mathbf{G}^\circ \to \mathbf{G}^\circ$ l'endomorphisme de Frobenius défini par

$$F_0((g_{i1}, \ldots, g_{id_i})_{1 \leqslant i \leqslant r}) = (g_{i1}^{(q)}, \ldots, g_{id_i}^{(q)})_{1 \leqslant i \leqslant r}$$

où, pour tout $g_{ij} \in \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})$, $g_{ij}^{(q)}$ désigne la matrice déduite de g_{ij} en élevant chaque coefficient à la puissance q.

Le groupe $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$ opère sur $\mathbf{G}^\circ$ par permutation des composantes. On se fixe un élément σ de $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. On notera F l'endomorphisme de Frobenius égal à σF_0. On se fixe un sous-groupe F-stable (c'est-à-dire σ-stable) A de $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. On note $\mathbf{G}$ le groupe

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ \rtimes A.$$

Alors $\mathbf{G}$ est un groupe réductif, non connexe si A est non trivial, et sa composante neutre est $\mathbf{G}^\circ$. On prolonge l'endomorphisme de Frobenius F_0 de manière triviale sur A. Alors A^F est le centralisateur de σ dans A. On a :

$$\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{\circ F} \rtimes A^F.$$

Le but de cette section est de décrire les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$.

Remarque - Le cas traité dans cette section est un “produit direct” de cas traités dans la section précédente 4.6. Les théorèmes énoncés dans cette section découlent donc directement des théorèmes de la section précédente 4.6.

5.2. Extension des caractères unipotents de $\mathbf{G}^{\circ F}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on notera $\mathbf{T}_{n_i}$ (respectivement $\mathbf{B}_{n_i}$) le tore maximal (respectivement le sous-groupe de Borel) de $\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{F})$ formé des matrices diagonales (respectivement triangulaires supérieures). On notera $\mathbf{T}^\circ$ (respectivement $\mathbf{B}^\circ$) le tore maximal (respectivement le sous-groupe de Borel)

$$\mathbf{T}^\circ = \prod_{i=1}^{r} (\underbrace{\mathbf{T}_{n_i} \times \cdots \times \mathbf{T}_{n_i}}_{d_i \text{ fois}})$$

(respectivement

$$\mathbf{B}^\circ = \prod_{i=1}^{r} (\underbrace{\mathbf{B}_{n_i} \times \cdots \times \mathbf{B}_{n_i}}_{d_i \text{ fois}}) \quad)$$

de $\mathbf{G}^\circ$.

On notera W° le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\circ$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$, et W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}^\circ$. On a alors :

$$W = W^\circ \rtimes A.$$

Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. On notera $A^F(\chi)$ le stabilisateur dans A^F de χ et $W^F(\chi)$ le stabilisateur de χ dans W^F. On notera $\boldsymbol{\chi}$ le caractère irréductible F-stable $\boldsymbol{\chi}$ de

W° associé à χ par la proposition 1.4.2. On notera $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ F}}$ le caractère irréductible unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$ associé à χ. Il est facile de vérifier que le stabilisateur de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ F}}$ dans A^F est égal à $A^F(\chi)$.

Soit $\alpha \in A^F(\chi)$. On notera $\mathbf{G}(\alpha)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}^\circ$ et α, et $\mathbf{T}(\alpha)$ le quasi-tore maximal $\mathbf{T}^\circ \rtimes \langle\alpha\rangle$ de $\mathbf{G}(\alpha)$. On notera aussi $W^\circ(\alpha)$ le centralisateur de α dans W°. D'après la proposition 1.4.2, l'ensemble des classes de F-conjugaison de $W^\circ(\alpha)$ est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $W^\circ(\alpha)^F$. Si $w \in W^\circ(\alpha)^F$, on notera $\mathbf{T}_w(\alpha)$ un quasi-tore maximal F-stable de $\mathbf{G}(\alpha)$ dont la classe de $\mathbf{G}(\alpha)^F$-conjugaison est associée à la classe de conjugaison de w par la proposition 3.1.5 relativement au quasi-tore maximal $\mathbf{T}(\alpha)$ et grâce à la bijection précédente.

On pose alors, pour tout $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$,

$$\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^F(\chi)}(g\alpha) = \frac{1}{|W^\circ(\alpha)|} \sum_{w \in W^\circ(\alpha)} \boldsymbol{\chi}_\alpha^+(wF) R_{\mathbf{T}_w(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)}(1)(g\alpha)$$

où $\mathbf{G}^F(\chi)$ désigne le stabilisateur dans $\mathbf{G}^F$ de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ F}}$ (c'est-à-dire $\mathbf{G}^F(\chi) = \mathbf{G}^{\circ F} \rtimes A^F(\chi)$) et où $\boldsymbol{\chi}_\alpha^+$ est l'extension canonique à $W^\circ(\alpha) \rtimes \langle F\rangle$ du caractère irréductible $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ de $W^\circ(\alpha)$ associé à $\boldsymbol{\chi}$ par la proposition 1.4.2. On a donc défini une fonction sur $\mathbf{G}^F(\chi)$. Le théorème 4.7.5 implique de manière évidente le

Théorème 5.2.1. *Soit χ un caractère irréductible de $W^{\circ F}$. Alors $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^F(\chi)}$ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ et sa restriction à $\mathbf{G}^{\circ F}$ est égale à $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ F}}$.*

Définition 5.2.2. *On dira que $\tilde{R}_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^F(\chi)}$ est l'**extension canonique** de $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}^{\circ F}}$.*

5.3. Paramétrage des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$. D'après le lemme 4.7.2, on a une bijection

$$a : \bar{\mathfrak{I}}(W^{\circ F}, A^F) \longrightarrow \bar{\mathfrak{I}}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F).$$

D'autre part, l'application

$$\begin{array}{rccc} b: & \bar{\mathfrak{I}}(W^{\circ F}, A^F) & \longrightarrow & \operatorname{Irr} W^F \\ & \chi * \xi & \longmapsto & \lambda_{\chi,\xi} = \operatorname{Ind}_{W^F(\chi)}^{W^F} \tilde{\chi} \otimes \xi \end{array}$$

est bijective, où $\tilde{\chi}$ désigne l'extension canonique de χ à $W^F(\chi)$.

De manière analogue, si ρ est un caractère unipotent de $\mathbf{G}^{\circ F}$, on notera $\mathbf{G}^F(\rho)$ le stabilisateur de ρ dans $\mathbf{G}^F(\rho)$. On notera $\tilde{\rho}$ son extension canonique à $\mathbf{G}^F(\rho)$ (cf définition 5.2.2). Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} c: & \bar{\mathfrak{I}}(\mathbf{G}^{\circ F}, A^F) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ & \rho * \xi & \longmapsto & \operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F(\rho)}^{\mathbf{G}^F} \tilde{\rho} \otimes \xi \end{array}$$

est bijective.

Finalement, l'application $c \circ a \circ b^{-1}$ induit une bijection que l'on notera :

$$\textbf{(5.3.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W^F & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}^F}. \end{array}$$

5.4. Transformation de Mellin. Si f est une fonction centrale sur W^F, on écrit

$$f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}\, W^F} a_\lambda \lambda$$

où les a_λ sont dans $\mathbb{K}$ ($\lambda \in \mathrm{Irr}\, W^F$), et on pose :

$$\mathbf{R}_f^{\mathbf{G}^F} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}\, W^F} a_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}^F}.$$

On posera par la suite, pour tout $\chi * \xi \in \bar{\mathfrak{I}}(W^{\circ F}, A^F)$,

$$R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^F} = \mathbf{R}_{\lambda_{\chi,\xi}}^{\mathbf{G}^F}. \tag{5.4.1}$$

De même, on posera, pour tout $\chi * \alpha \in \bar{\mathfrak{I}}^\vee(W^{\circ F}, A^F)$,

$$\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{G}^F} = \mathbf{R}_{\hat{\lambda}_{\chi,\alpha}}^{\mathbf{G}^F}. \tag{5.4.2}$$

On a donc, d'après la formule 1.8.1,

$$\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{\xi \in A^F(\chi)^\wedge} \overline{\xi(\alpha)}\ R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}^F} \tag{5.4.3}$$

pour tout $\chi * \alpha \in \bar{\mathfrak{I}}^\vee(W^{\circ F}, A^F)$.

5.5. Induction de Lusztig. Compte tenu du fait que l'on a réussi à écrire tous les caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ comme combinaisons linéaires de caractères de Deligne-Lusztig, il va être facile de calculer le foncteur d'induction généralisée de Lusztig $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, 1) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, 1)$ où $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$ (cf définition 3.1.2).

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, et soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On suppose que $\mathbf{L}$ est rationnel. On note $A_{\mathbf{L}}$ le sous-groupe de A image de $\mathbf{L}/\mathbf{L}^\circ$ par le morphisme composé

$$\mathbf{L}/\mathbf{L}^\circ \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{G}^\circ \longrightarrow A.$$

D'après la proposition 3.2.1, il existe un élément $g \in \mathbf{G}^{\circ F}$ tel que ${}^g\mathbf{L}$ (donc ${}^g\mathbf{P}$) contienne $A_{\mathbf{L}}^F$. On supposera donc par la suite que $\mathbf{L}$ contient $A_{\mathbf{L}}^F$.

D'autre part, d'après le corollaire 2.5.2, il existe un tore maximal F-stable et $A_{\mathbf{L}}^F$-stable $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$ de $\mathbf{L}^\circ$ ainsi qu'un sous-groupe de Borel F-stable et $A_{\mathbf{L}}^F$-stable $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^\circ$ de $\mathbf{L}^\circ$ contenant $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$.

On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{U}$ est $A_{\mathbf{L}}^F$-stable. Par suite, le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}_1^\circ = \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^\circ \ltimes \mathbf{U}$ de $\mathbf{G}^\circ$ est $A_{\mathbf{L}}^F$-stable. Par conséquent, il existe un élément g de $(\mathbf{G}^{\circ A_{\mathbf{L}}^F})^\circ$ tel que

$${}^g(\mathbf{T}^\circ, \mathbf{B}^\circ) = (\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ, \mathbf{B}_1^\circ)$$

(cf corollaire 2.4.2). Alors $g^{-1}F(g)$ appartient à $N_{\mathbf{G}^\circ}(\mathbf{T}^\circ)$. On note w_L sa classe dans W°. Puisque g centralise $A_{\mathbf{L}}^F$, l'élément w_L de W° centralise aussi $A_{\mathbf{L}}^F$.

On notera $W_{\mathbf{L}}^\circ$ (respectivement $W_{\mathbf{L}}$) l'image via $\mathrm{ad}\, g^{-1}$ du groupe de Weyl de $\mathbf{L}^\circ$ (respectivement $\mathbf{L}$) relativement à $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^\circ$: c'est un sous-groupe W° (respectivement W). Via $\mathrm{ad}\, g^{-1}$, le morphisme de Frobenius agit comme $w_L F$.

Théorème 5.5.1. *Soient χ un caractère irréductible du groupe $W_{\mathbf{L}}^{\circ w_L F}$ et α un élément de $A_{\mathbf{L}}^F(\chi) = A_{\mathbf{L}}^{w_L F}(\chi)$. On écrit :*

$$\operatorname{Ind}_{W^\circ(\alpha).w_L F}^{W^\circ(\alpha).F} \boldsymbol{\chi}_\alpha^+ = \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \boldsymbol{\zeta}_\alpha^+$$

où les n_ζ sont dans $\mathbb{K}$ ($\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha$). Alors :

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}^F}) = \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}^F}.$$

Remarque - (1) Si χ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}^{\circ w_L F}$, alors $\boldsymbol{\chi}_1^+ = \boldsymbol{\chi}^+$ et le résultat du théorème 5.5.1 pour $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},1}^{\mathbf{L}^F})$ est bien connu. En effet,

$$\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},1}^{\mathbf{L}^F} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^{\circ F}}^{\mathbf{L}^F} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{L}^{\circ F}}$$

et le résultat découle alors de la transitivité des foncteurs d'induction de Lusztig (cf proposition 3.3.2), de la proposition 3.3.3 et du lemme 1.6.2.

(2) Compte tenu du (b) du lemme 1.8.2, le théorème 5.5.1 décrit bien le foncteur induction

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, 1) \longrightarrow \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1).$$

Preuve - On commence par rappeler le

Lemme 5.5.2 (Digne-Michel). *Soit f une fonction centrale sur $\mathbf{L}^F$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(f) &= \sum_{\beta \in A^F/A_{\mathbf{L}}^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F} {}^\beta f \\
&= \frac{1}{|A_{\mathbf{L}}^F|} \sum_{\beta \in A^F} R_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}^{\mathbf{G}(\alpha)} \operatorname{Res}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}^{{}^\beta\mathbf{L}^F} {}^\beta f.
\end{aligned}$$

Preuve - C'est un cas particulier de la proposition 2.3, (i), de [DM2]. ■

Puisque $\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}^F}$ a son support dans $\mathbf{L}^{\circ F}.\alpha$, la fonction $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}^F})$ a son support dans $\mathbf{G}^{\circ F}.\alpha$. Par suite, pour montrer le théorème 5.5.1, il suffit de montrer que :

(5.5.3)
$$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}^F}) = \operatorname{Res}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}^{\mathbf{G}^F} \sum_{\zeta \in (\operatorname{Irr} W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}^F}.$$

D'après le lemme 5.5.2, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\hat{R}^{\mathbf{L}^F}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}) &= \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}|}\sum_{\beta\in A^F} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)} \operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}_{{}^\beta\chi,\alpha}) \\
&= \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}|}\sum_{\beta\in A^F} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)} \operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)^F} \operatorname{Ind}^{{}^\beta\mathbf{L}^F}_{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^\beta\chi,\alpha}) \\
&= \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}|}\sum_{\beta\in A^F} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)} \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}(\chi)|}\sum_{\gamma\in A^F_{\mathbf{L}}} \operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{\mathbf{L}(\alpha)^F}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^{\beta\gamma}\boldsymbol{\chi},\alpha}) \\
&= \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}|}\sum_{\gamma\in A^F_{\mathbf{L}}}\sum_{\beta\in A^F} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)} \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}(\chi)|} \operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{\mathbf{L}(\alpha)^F}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^{\beta}\boldsymbol{\chi},\alpha}) \\
&= \sum_{\beta\in A^F} R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)} \frac{1}{|A^F_{\mathbf{L}}(\chi)|} \operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{\mathbf{L}(\alpha)^F}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^{\beta}\boldsymbol{\chi},\alpha})
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\beta\in A^F$, on a :

$$\operatorname{Res}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{\mathbf{L}(\alpha)^F}(\hat{R}^{{}^\beta\mathbf{L}^F(\chi)}_{{}^{\beta}\boldsymbol{\chi},\alpha}) = \frac{|A^F_{\mathbf{L}}(\chi)|}{|W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)|}\sum_{w\in W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)} \boldsymbol{\chi}^+_\alpha({}^{\beta^{-1}}(ww_L)F)R^{{}^\beta\mathbf{L}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}(ww_L)}(\alpha)}(1_\alpha).$$

Finalement,

$$\textbf{(5.5.4)}\qquad \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\hat{R}^{\mathbf{L}^F}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}) = \frac{1}{|W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)|}\sum_{\substack{\beta\in A^F\\ w\in W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)}} \boldsymbol{\chi}^+_\alpha({}^{\beta^{-1}}(ww_L)F)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}(ww_L)}(\alpha)}(1_\alpha).$$

D'autre part, si ζ est un caractère irréductible de $W^{\circ F}$ invariant sous α, on a, par un calcul analogue :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F} \hat{R}^{\mathbf{G}^F}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha} &= \operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}(\alpha)^F}\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}^F(\zeta)} \hat{R}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha} \\
&= \frac{1}{|A^F(\zeta)|}\sum_{\beta\in A^F}\operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{\mathbf{G}(\alpha)^F} \hat{R}^{\mathbf{G}^F(\zeta)}_{{}^\beta\boldsymbol{\zeta},\alpha} \\
&= \sum_{\beta\in A^F}\frac{1}{|W^\circ(\alpha)|}\sum_{w\in W^\circ(\alpha)} \boldsymbol{\zeta}^+_\alpha({}^{\beta^{-1}}wF)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_w(\alpha)}(1_\alpha).
\end{aligned}$$

Compte tenu de la formule 5.5.4, il suffit, pour montrer la formule 5.5.3, de prouver que, pour tout $\beta\in A^F$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)|}\sum_{w\in W^\circ_{\mathbf{L}}(\alpha)} \boldsymbol{\chi}^+_\alpha({}^{\beta^{-1}}(ww_L)F)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_{\beta^{-1}ww_L}(\alpha)}(1_\alpha) \\
&= \frac{1}{|W^\circ(\alpha)|}\sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr}W^{\circ F})^\alpha} n_\zeta \sum_{w\in W^\circ(\alpha)} \boldsymbol{\zeta}^+_\alpha({}^{\beta^{-1}}wF)R^{\mathbf{G}(\alpha)}_{\mathbf{T}_w(\alpha)}(1_\alpha).
\end{aligned}$$

Pour cela, on peut supposer que $\beta = 1$, et le résultat découle du lemme 1.6.2. ■

Partie 2

Groupes réductifs connexes

Notations

Dans toute cette partie, on se fixe un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius noté $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. On se fixe un sous-groupe de Borel F-stable $\mathbf{B}_0$ de $\mathbf{G}$, ainsi qu'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}_0$ de $\mathbf{B}_0$. On notera $\mathbf{U}_0$ le radical unipotent de $\mathbf{B}_0$, et $\mathbf{Z}$ le centre de $\mathbf{G}$.

On note $(\mathbf{G}^*, \mathbf{T}_0^*, F^*)$ un triplet dual du triplet $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, F)$. Puisqu'on s'est fixé un morphisme de groupes injectif $\iota : \mathbb{F}^\times \to \mathbb{K}^\times$, on a une bijection entre l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de couples $(\mathbf{T}, \theta)$, où $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et θ est un caractère linéaire de $\mathbf{T}^F$, et l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison de couples $(\mathbf{T}^*, s)$ où $\mathbf{T}^*$ est un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ et s est un élément de $\mathbf{T}^{*F^*}$ (cf [DL], 5.21.5). Si $(\mathbf{T}, \theta)$ et $(\mathbf{T}^*, s)$ sont deux tels couples associés via cette bijection, on posera

$$R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s) = R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta).$$

Si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, on notera (s) (ou $(s)_{\mathbf{G}^*}$) la classe de conjugaison de s dans $\mathbf{G}^*$ (que l'on appellera **classe de conjugaison géométrique**), et on notera $[s]$ (ou $[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}$) la classe de conjugaison de s dans $\mathbf{G}^{*F^*}$ (que l'on appellera **classe de conjugaison rationnelle**).

Définition : *Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$. On appelle **série de Lusztig géométrique** (respectivement **série de Lusztig rationnelle**), et on note $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ (respectivement $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$) l'ensemble des composantes irréductibles des caractères de la forme $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s')$ où s' est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$ appartenant à la classe de conjugaison géométrique (respectivement rationnelle) de s et $\mathbf{T}^*$ est un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ contenant s.*

On rappelle (cf [DL], corollaire 6.3) que

$$\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F = \dot{\bigcup_{(s)}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)),$$

où (s) parcourt l'ensemble des classes de conjugaison géométrique d'éléments semi-simples $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. D'autre part, si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, alors (cf, par exemple, [DM1], théorème 14.51)

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \dot{\bigcup_{[t] \subseteq (s)}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [t]).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F = \dot{\bigcup_{[s]}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]),$$

où $[s]$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$.

Remarque - Si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, il résulte du théorème de Lang que l'ensemble des classes de conjugaisons rationnelles contenues dans (s) est en bijection avec $H^1(F^*, C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s))$. En particulier, si $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est connexe, la série de Lusztig géométrique $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ et la série de Lusztig rationnelle $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ coïncident.

On se fixe une fois pour toutes un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. On se fixe aussi un sous-groupe de Borel F^*-stable $\mathbf{B}^*(s)$ de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ ainsi qu'un tore maximal F^*-stable $\mathbf{T}_1^*$ de $\mathbf{B}^*(s)$. On notera W^* le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^*$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. On notera $W(s)$ (respectivement $W^\circ(s)$) le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ (respectivement $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$) relativement à $\mathbf{T}_1^*$. On a

$$W(s) = \{w \in W^* \mid w(s) = s\}.$$

On notera Φ_s (ou $\Phi_{\mathbf{G},s}$) le système de racine de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$, et on notera Φ_s^+ (ou $\Phi^+_{\mathbf{G},s}$) le système de racines positives de Φ_s associé à $\mathbf{B}^*(s)$. On posera

$$A(s) = \{w \in W(s) \mid w(\Phi_s^+) = \Phi_s^+\}.$$

Alors $A(s)$ est un sous-groupe F^*-stable de $W(s)$ et

$$W(s) = W^\circ(s) \rtimes A(s).$$

De plus,

$$C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s) \simeq A(s),$$

et cet isomorphisme commute avec l'action du morphisme de Frobenius.

Par un argument classique, il résulte du théorème de Lang que l'ensemble des classes de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$-conjugaison de tores maximaux F^*-stables de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est en bijection avec l'ensemble $H^1(F^*, W^\circ(s))$. Pour tout $w \in W^\circ(s)$, on choisira un tore maximal F^*-stable $\mathbf{T}_w^*$ associé à la classe de F^*-conjugaison de w via la bijection précédente.

Plongement dans un groupe à centre connexe. Pour étudier les caractères irréductibles du groupe $\mathbf{G}^F$, il est commode de plonger le groupe $\mathbf{G}$ dans un groupe de même type ayant un centre connexe. En effet, dans le cas des groupes à centre connexe, la théorie de Lusztig fournit beaucoup plus de résultats. La théorie de Clifford permet alors de récupérer des résultats sur le groupe $\mathbf{G}^F$.

A partir de maintenant, on se place dans le cas où le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas forcément connexe. Suivant toujours les idées de Deligne-Lusztig (cf [DL], 5.18), on sait qu'il existe un groupe $\tilde{\mathbf{G}}$ ayant les propriétés suivantes :

- $\tilde{\mathbf{G}}$ est un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, d'endomorphisme de Frobenius encore noté F et dont $\mathbf{G}$ est un sous-groupe fermé F-stable et distingué. De plus, l'inclusion $\mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ est définie sur $\mathbb{F}_q$.
- Le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ est connexe.
- Le groupe dérivé de $\tilde{\mathbf{G}}$ coïncide avec celui de $\mathbf{G}$.

On notera $\tilde{\mathbf{Z}}$ le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$. On a donc $\mathbf{Z} = \mathbf{G} \cap \tilde{\mathbf{Z}}$ et $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}.\tilde{\mathbf{Z}}$. On note $\tilde{\mathbf{T}}_0$ l'unique tore maximal contenant $\mathbf{T}_0$, et $\tilde{\mathbf{B}}_0$ l'unique sous-groupe de Borel de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\mathbf{B}_0$. Alors $\tilde{\mathbf{T}}_0$ et $\tilde{\mathbf{B}}_0$ sont F-stables.

Soit $(\tilde{\mathbf{G}}^*, \tilde{\mathbf{T}}_0^*, F^*)$ un triplet dual de $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{T}}_0, F)$. L'injection $i : \mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ induit une surjection $i^* : \tilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}^*$, elle aussi définie sur $\mathbb{F}_q$. Le noyau $\operatorname{Ker} i^*$ de i^* est un tore central F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ (cf [DM1], 14.47, 14.48). Puisque $\operatorname{Ker} i^*$ est connexe, il résulte du théorème de Lang qu'il existe un élément $\tilde{s}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}) = s$. D'autre part, un tel élément est semi-simple. On se fixe donc aussi un élément semi-simple $\tilde{s}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\tilde{s}) = s$.

Puisque le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ est connexe, le groupe dérivé du dual $\tilde{\mathbf{G}}^*$ a un recouvrement simplement connexe purement inséparable, ce qui implique, d'après un théorème de Steinberg (cf [S], théorèmes 8.1 et 9.1), que le centralisateur de tout élément semi-simple de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ est connexe (cf aussi [DL], corollaire 5.24). En particulier, d'après la remarque précédente, les séries de Lusztig géométriques et rationnelles coïncident sur $\tilde{\mathbf{G}}^F$.

Soit $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ l'image réciproque de $\mathbf{T}_1^*$ dans $\tilde{\mathbf{G}}^*$; alors $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ est un tore maximal F^*-stable maximalement déployé dans $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ (qui est connexe). On notera aussi $\tilde{\mathbf{B}}^*(\tilde{s})$ l'image réciproque de $\mathbf{B}^*(s)$ dans $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$: c'est un sous-groupe de Borel F^*-stable de $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ contenant $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$. On peut alors identifier le groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ avec W^*, et on peut construire, de la même manière qu'avec $\mathbf{G}^*$ les groupes $W(\tilde{s})$, $W^\circ(\tilde{s})$ et $A(\tilde{s})$. Puisque $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est connexe, on a $i^*(C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})) = C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ (cf [DM1], 2.3). Par conséquent, $W(\tilde{s}) = W^\circ(\tilde{s}) = W^\circ(s)$; en particulier, $A(\tilde{s})$ est trivial.

Pour tout $w \in W(\tilde{s})$, on notera $\tilde{\mathbf{T}}_w^*$ l'image réciproque de $\mathbf{T}_w^*$ dans $\tilde{\mathbf{G}}^*$ (via i^*).

CHAPITRE I

De $\tilde{\mathbf{G}}$ à $\mathbf{G}$

Le but de ce chapitre est d'établir les liens généraux que l'on peut établir *a priori* entre les foncteurs d'induction de Lusztig ou de Harish-Chandra entre les groupes $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{G}$. La plupart des résultats sont des rappels (notamment toute la section 6).

6. Séries de Lusztig entre groupes de même type

6.1. Rapports entre les foncteurs de Lusztig dans $\mathbf{G}$ et $\tilde{\mathbf{G}}$. Soit $\tilde{\mathbf{P}}$ un sous-groupe parabolique de $\tilde{\mathbf{G}}$ et soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi de $\tilde{\mathbf{P}}$. On suppose que $\tilde{\mathbf{L}}$ est F-stable. On pose $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$. On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{P}}$ (c'est aussi le radical unipotent de $\mathbf{P}$). On a alors (cf paragraphe 3.3 pour la définition de $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$)

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}} = \dot{\bigcup_{g \in \tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F}} g.\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \dot{\bigcup_{l \in \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F}} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}.l$$

car, si $\tilde{g} \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$, alors il existe $g \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ tel que $\tilde{g}^{-1}F(\tilde{g}) = g^{-1}F(g) \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{G}$. Par conséquent, en tant que $\mathbb{K}\mathbf{G}^F$-modules-$\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F$, on a un isomorphisme canonique

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite, si $\tilde{\pi}$ est un $\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F$-module, on a un isomorphisme canonique de $\mathbb{K}\mathbf{G}^F$-modules

$$\textbf{(6.1.1)} \qquad \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\pi} \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\pi}.$$

De même, on a un isomorphisme canonique de $\mathbb{K}\tilde{\mathbf{G}}^F$-modules-$\mathbb{K}\mathbf{L}^F$

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathbb{K}\tilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{G}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ qui induit, pour tout $\mathbb{K}\mathbf{L}^F$-module π, un isomorphisme canonique de $\mathbb{K}\tilde{\mathbf{G}}^F$-modules

$$\textbf{(6.1.2)} \qquad \operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F} \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \pi.$$

En particulier, on déduit immédiatement des isomorphismes 6.1.1 et 6.1.2 les égalités suivantes :

(6.1.3) $$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} = \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}},$$

(6.1.4) $$R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \circ \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}},$$

et, par adjonction,

(6.1.5) $${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} = \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}},$$

(6.1.6) $${}^*R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \circ \operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}.$$

Remarque - Au vu des démonstrations, les équations 6.1.1 à 6.1.6 restent vraies même lorsque le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ n'est pas connexe.

On note $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{L}}$.

Lemme 6.1.7. *On suppose que $\tilde{\mathbf{L}}^*$ contient $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$. Soit $\tilde{\pi} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F, (\tilde{s}))$ et soit π un sous-$\mathbf{L}^F$-module irréductible de la restriction de $\tilde{\pi}$ à $\mathbf{L}^F$. Alors $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\pi)$ est un sous-module de la restriction à $\mathbf{G}^F$ du $\tilde{\mathbf{G}}^F$-module irréductible $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{L}}}R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\pi})$.*

Preuve - Ce lemme est une conséquence de [L1], de [DM1] et [A]. La démonstration ci-dessous reprend celle écrite dans [A], lemme 5.1.1, mais en effectuant une petite correction.

En utilisant [L1] et [DM1], théorème 13.25 (correction personnellement signalée), il existe un entier $i(\tilde{\pi})$ tel que $H_c^{i(\tilde{\pi})}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\pi}$ soit un $\tilde{\mathbf{G}}^F$-module irréductible et tel que $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\pi} = 0$ si $k \neq i(\tilde{\pi})$. De plus, $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{L}}} = (-1)^{i(\tilde{\pi})}$. Par suite, $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{L}}}R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\pi}) \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{G}}^*})$ et le lemme 6.1.7 résulte alors de l'isomorphisme 6.1.1 (en remarquant que $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{L}}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}$). ∎

On termine ce paragraphe en remarquant que, grâce à la transitivité du produit tensoriel, on a, pour tous caractères λ et γ sur $\tilde{\mathbf{L}}^F$ et $\tilde{\mathbf{G}}^F$ respectivement et pour tout caractère linéaire φ de $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ (vu comme caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ ou de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ par restriction),

(6.1.8) $$R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\lambda \otimes \varphi) = R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\lambda) \otimes \varphi.$$

6.2. Caractères de Deligne-Lusztig et séries rationnelles. Soit $\tilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ contenant $\tilde{s}$. Soit $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta})$ est un couple formé d'un tore maximal F-stable $\tilde{\mathbf{T}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ et d'un caractère linéaire $\tilde{\theta} : \tilde{\mathbf{T}}^F \to \mathbb{K}^\times$ associé au couple $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s})$. Alors, si on pose

$$\mathbf{T}^* = i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*), \qquad \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$$

et $$\theta = \operatorname{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\tilde{\mathbf{T}}^F} \tilde{\theta},$$

le couple $(\mathbf{T}, \theta)$ est associé au couple $(\mathbf{T}^*, s)$. Il résulte de la formule 6.1.3 que

(6.2.1) $$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s).$$

De plus, $\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ est un tore dual de $\operatorname{Ker} i^*$; cette dualité est compatible avec les morphismes de Frobenius. Par conséquent, on a un isomorphisme de groupes que l'on notera :

(6.2.2)
$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*} & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge \\ z & \longmapsto & \hat{z} \end{array}.$$

Si $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$, alors le couple $(\tilde{\mathbf{T}}, \operatorname{Res}_{\tilde{\mathbf{T}}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \hat{z})$ est associé au couple $(\tilde{\mathbf{T}}^*, z)$. L'équation 6.1.8 montre que

(6.2.3)
$$R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}z) = R_{\tilde{\mathbf{T}}^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \hat{z}.$$

En particulier, l'application

(6.2.4)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}z]) \\ \tilde{\gamma} & \longmapsto & \tilde{\gamma} \otimes \hat{z} \end{array}$$

est bijective.

Le résultat suivant est bien connu :

Lemme 6.2.5. *Soit $\tilde{\gamma}$ un caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ et soit γ une composante irréductible de la restriction de $\tilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$.*

Si $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$, alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Preuve - Supposons que $\tilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et soit θ un caractère linéaire de $\mathbf{T}^F$ tel que

$$\langle \gamma, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0.$$

Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. On note $\mathbf{U}$ son radical unipotent. Il existe un entier i tel que γ soit une composante irréductible de

$$H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{T}^F} \mathbb{K}_\theta,$$

où $\mathbb{K}_\theta$ désigne le $\mathbf{T}^F$-module irréductible de dimension 1 sur lequel $\mathbf{T}^F$ agit via θ.

Soit $\tilde{\mathbf{T}}$ le tore maximal (F-stable) de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\mathbf{T}$ et soit $\tilde{\theta}$ un caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{T}}^F$ prolongeant θ. On note $(\tilde{\mathbf{T}}^*, \tilde{s}')$ un couple formé d'un tore maximal F^*-stable $\tilde{\mathbf{T}}^*$ de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ et d'un élément $\tilde{s}' \in \tilde{\mathbf{T}}^{*F^*}$ associé au couple $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\theta})$. On pose $\mathbf{T}^* = i^*(\tilde{\mathbf{T}}^*)$ et $s' = i^*(\tilde{s}')$. On a donc

$$\langle \gamma, R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s') \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0,$$

c'est-à-dire $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s'])$.

Alors, d'après l'isomorphisme 6.1.1, il existe un élément $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$ tel que

$$\langle \tilde{\gamma} \otimes \hat{z}, H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{T}}^F} \mathbb{K}_{\tilde{\theta}} \rangle_{\tilde{\mathbf{G}}^F} \neq 0,$$

où $\mathbb{K}_{\tilde{\theta}}$ désigne $\tilde{\mathbf{T}}^F$-module irréductible de dimension 1 sur lequel $\tilde{\mathbf{T}}^F$ agit via $\tilde{\theta}$. Par suite, il résulte de 6.2.4 et de [DM1], proposition 13.3, que $\tilde{s}'$ et $\tilde{s}z$ sont géométriquement **donc** rationnellement conjugués (car le centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ est connexe). Par suite, $i^*(\tilde{s}') = s'$ et $i^*(\tilde{s}) = s$ sont rationnellement conjugués. Donc $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. ■

6.3. Foncteurs de Lusztig et séries rationnelles. On va démontrer dans ce paragraphe que les foncteurs de Lusztig stabilisent les séries rationnelles. C'est un résultat bien connu (cf, par exemple, [DLM1], lemme 6.3), mais aucune démonstration n'en a été publiée.

Soit $\tilde{\mathbf{P}}$ un sous-groupe parabolique de $\tilde{\mathbf{G}}$ (non nécessairement F-stable) ayant un sous-groupe de Levi F-stable $\tilde{\mathbf{L}}$. On pose alors $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$. On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{P}}$ (c'est aussi le radical unipotent de $\mathbf{P}$). On note $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{L}}$. On rappelle tout d'abord le

Lemme 6.3.1 (Lusztig). *Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{L}^{*F^*}$. Soit λ un caractère irréductible de $\mathbf{L}^F$ et soit γ un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ tel que $\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), \gamma\rangle \neq 0$.*

Si $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, (s)_{\mathbf{L}^*})$, alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)_{\mathbf{G}^*})$.

Preuve - cf [L1], corollaire 6. ■

Lemme 6.3.2. *On suppose que $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$. Soit λ un caractère irréductible de $\mathbf{L}^F$ et soit γ un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ tel que $\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), \gamma\rangle \neq 0$.*

Si $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$, alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$.

Preuve - D'après le lemme 6.2.5, les éléments de $\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ sont les composantes irréductibles des restrictions des éléments de $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{L}}^*})$. Soit $\mathbf{T}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{L}^*$ tel que λ soit une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{L}}(s)$. On note $\tilde{\mathbf{T}}^*$ l'image réciproque de $\mathbf{T}^*$ par i^*.

Soit $\tilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F-stable de $\tilde{\mathbf{L}}$ dual de $\tilde{\mathbf{T}}^*$, et soit $\tilde{\theta}$ un caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{T}}^F$ associé à $\tilde{s}$. On pose $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{L}$ et on note θ la restriction de $\tilde{\theta}$ à $\mathbf{T}^F$. Alors $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{L}$ dual de $\mathbf{T}^*$ et θ est le caractère linéaire de $\mathbf{T}^F$ associé à s. On note $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}$ le radical unipotent de $\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$.

Par hypothèse, il existe un entier naturel i tel que γ soit une composante irréductible de $H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \lambda$, et il existe un entier j tel que λ soit une composante irréductible de $H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{T}^F} \theta$. Par la formule de Künneth, γ est une composante irréductible de $H_c^{i+j}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}.\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{T}^F} \theta$. Par suite, il résulte de l'isomorphisme 6.1.3 que γ est une composante irréductible d'un caractère irréductible $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$, lui-même composante irréductible de $H_c^{i+j}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}.\mathbf{U}}^{\tilde{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\tilde{\mathbf{T}}^F} \tilde{\theta}$. Par conséquent, d'après le lemme 6.3.1, le caractère $\tilde{\gamma}$ appartient à $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{G}}^*}) = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}})$, ce qui montre que γ appartient à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ d'après le lemme 6.2.5. ■

7. Comparaison des séries de Harish-Chandra de G et de $\tilde{\mathbf{G}}$

Dans [L2], Lusztig détermine les structures des algèbres d'endomorphismes des caractères induits de Harish-Chandra de caractères cuspidaux dans le cas d'un groupe à centre connexe. On étudie dans cette section la situation dans le cas d'un groupe à centre non connexe, en essayant comme cela sera fait dans toute la suite d'utiliser le groupe à centre connexe $\tilde{\mathbf{G}}$. Dans le cas particulier où $\mathbf{G}$ est le groupe spécial linéaire (qui est le cas qui nous intéressera par la suite), les résultats peuvent être trouvés dans [G.I. Lehrer, *The characters of the finite special linear groups*, J. of Alg. **26** (1973), pp 564-583].

7.1. Notations. Soit $\tilde{\mathbf{P}}$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ et soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\tilde{\mathbf{G}}$. On supposera que $\tilde{\mathbf{T}}_0 \subseteq \tilde{\mathbf{L}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}_0 \subseteq \tilde{\mathbf{P}}$. On pose

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}, \qquad \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}.$$

Soit $\tilde{\lambda}$ un caractère irréductible cuspidal de $\tilde{\mathbf{L}}^F$. On pose

$$\lambda = \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\lambda}.$$

Alors, d'après [L5], le caractère λ de $\mathbf{L}^F$ est sans multiplicité. Soit λ_1 une composante irréductible de λ. On note $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ le stabilisateur, dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$, de λ_1. Alors :

$$\lambda = \sum_{l \in \tilde{\mathbf{L}}^F / \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^l\lambda_1.$$

Puisque $\tilde{\lambda}$ est cuspidal, les ${}^l\lambda_1$ sont aussi cuspidaux d'après la formule 6.1.5 ($l \in \tilde{\mathbf{L}}^F$). On notera $l_1, \dots, l_r$ des représentants (dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$) de tous les éléments de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ (on choisit $l_1 = 1$). Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on posera $\lambda_i = {}^{l_i}\lambda_1$. On a donc

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r.$$

7.2. Algèbres d'endomorphismes. On note $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ le groupe $N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/\tilde{\mathbf{L}}^F$ (qui est isomorphe à $N_{\mathbf{G}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})/\mathbf{L}^F$). D'après [L2], le groupe $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ est un groupe de réflexions et l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda})$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})]$. Si χ est un caractère irréductible de $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$, on notera $\tilde{\rho}_\chi$ (où $\rho_\chi^{\tilde{\mathbf{G}}}$ s'il y a confusion possible) le caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ associé à χ. On a alors :

(7.2.1)
$$R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda}) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})} \chi(1)\tilde{\rho}_\chi.$$

L'application $\chi \mapsto \tilde{\rho}_\chi$ est bien définie car on s'est fixé une fois pour toutes un racine de q dans $\mathbb{K}$ et car les représentations de $\operatorname{End}_{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{\lambda})$ sont définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ (cf [C.T. Benson & C.W. Curtis, *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. A.M.S. **165** (1972), pp 251-273, théorème 2.9]).

De même, on note $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)$ (respectivement $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$) le groupe $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)/\mathbf{L}^F$ (respectivement $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$). D'après [HL1], l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)]$, tordue par un 2-cocycle ω. On rappelle le théorème de M. Geck (cf [G]) :

Théorème 7.2.2 (Geck). *Le caractère $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ contient une composante irréductible sans multiplicité et donc le 2-cocycle ω est trivial.*

Remarque - Dans son article [G], M. Geck énonce en fait le théorème suivant : "*Le caractère $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1)$ contient une composante irréductible sans multiplicité*". Pour montrer la trivialité du cocycle ω, il n'a en effet besoin que de ce résultat. Cependant, au cours de sa démonstration (cf page 400 de [G]), il démontre le résultat plus fort énoncé ci-dessus 7.2.2 dont on a besoin pour montrer le corollaire suivant :

Corollaire 7.2.3. *On a* $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$. *Par conséquent,* $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$ *est un sous-groupe de* $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ *et, si* $1 \leqslant i < j \leqslant r$, *alors les caractères irréductibles* λ_i *et* λ_j *ne sont pas conjugués sous* $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$, *c'est-à-dire*

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_i), R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_j)\rangle_{\mathbf{G}^F} = 0.$$

Preuve - On remarque tout d'abord que $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$ est un sous-groupe de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. D'autre part, $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1) \subseteq W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$.

Le groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ agit sur les composantes irréductibles de λ. Soit t le cardinal de l'orbite de λ_1 sous cette action. Alors, puisque $\tilde{\mathbf{L}}^F$ permute transitivement les orbites de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, toutes ces orbites ont même cardinal t. D'autre part, si λ_i et λ_j sont dans la même orbite sous l'action de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, alors $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_i) = R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_j)$ $(1 \leqslant i,j \leqslant r)$, et donc t divise la multiplicité de toutes les composantes irréductibles de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$, ce qui montre que $t = 1$ d'après le théorème 7.2.2, que $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, et que, si $1 \leqslant i < j \leqslant r$, alors λ_i et λ_j ne sont pas conjugués sous l'action de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$. ■

Il résulte du théorème 7.2.2 que l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)]$. Si ζ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, on notera ρ_ζ (ou $\rho_\zeta^{\mathbf{G}}$) le caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ associé à ζ. On a alors

(7.2.4)
$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1) = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)} \zeta(1)\rho_\zeta.$$

D'autre part, si χ et ζ sont des caractères irréductibles de $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$ et $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ respectivement, alors :

(7.2.5)
$$\langle \mathrm{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{\rho}_\chi, \rho_\zeta\rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \mathrm{Ind}_{W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)} \chi, \zeta\rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)}.$$

7.3. Structure de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$. On remarque tout d'abord que le sous-groupe $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$ de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ est distingué. D'autre part, $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ peut-être réalisé comme un sous-groupe du groupe d'automorphismes de $X(\mathbf{T}_0)/\langle\Phi_{\mathbf{L}}\rangle$ (où $\Phi_{\mathbf{L}}$ désigne le système de racines de $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}_0$), et, via cette représentation, $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$ est un groupe de réflexions. Par suite, il existe un sous-groupe A de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ (le stabilisateur dans $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ d'une base du système de racines associé à $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$) tel que

$$W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1) = W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda}) \rtimes A.$$

On va étudier d'un peu plus près la structure du groupe A défini ci-dessus. Soit w un élément de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1) = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. Alors, par définition, les caractères irréductibles ${}^w\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ ont la même restriction à $\mathbf{G}^F$. Par suite, il existe un caractère linéaire $\tilde{\varphi}_w$ de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$ tel que

$${}^w\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \otimes \tilde{\varphi}_w.$$

Proposition 7.3.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\mathbf{L}^F)^\wedge \\ & w & \longmapsto & \varphi_w = \mathrm{Res}_{\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)}^{\tilde{\mathbf{L}}^F} \tilde{\varphi}_w \end{array}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes de noyau $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})$.

Preuve - Dire que φ est bien définie équivaut à dire que, si $\tilde{\varphi}'_w$ est un autre caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$ tel que ${}^w\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \otimes \tilde{\varphi}'_w$, alors

$$\operatorname{Res}^{\tilde{\mathbf{L}}^F}_{\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \tilde{\varphi}_w = \operatorname{Res}^{\tilde{\mathbf{L}}^F}_{\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \tilde{\varphi}'_w.$$

Cela résulte de la théorie de Clifford.

Les autres assertions de cette proposition sont alors évidentes. ■

Il résulte de la proposition 7.3.1 que le groupe A est abélien, et qu'il existe un sous-groupe $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ de $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ contenant $\mathbf{L}^F$ tel que l'on ait un isomorphisme

(7.3.2) $$A \simeq W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)/W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda}) \simeq (\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1))^\wedge.$$

Par dualité, on obtient un isomorphisme

(7.3.3) $$\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1) \simeq (W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)/W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda}))^\wedge \simeq A^\wedge.$$

Proposition 7.3.4. *Soit $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. On note ξ le caractère linéaire de A associé à la classe de l dans $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ via l'isomorphisme* 7.3.3. *Alors, pour tout caractère irréductible ζ de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, on a*

$${}^l\rho_\zeta = \rho_{\zeta\otimes\xi}.$$

Preuve - On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\tilde{\mathbf{P}}$ (ou de $\mathbf{P}$). On note $\tilde{\lambda}^\circ$ (respectivement λ_i°, $1 \leqslant i \leqslant r$) le caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{P}}^F$ (respectivement $\mathbf{P}^F$) obtenu en composant $\tilde{\lambda}$ (respectivement λ) avec le morphisme surjectif $\tilde{\mathbf{P}}^F \to \tilde{\mathbf{L}}^F$ (respectivement $\mathbf{P}^F \to \mathbf{L}^F$).

Soit $\tilde{M}$ un $\tilde{\mathbf{P}}^F$-module ayant pour caractère $\tilde{\lambda}^\circ$. On a alors

$$\operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M}) = \{f : \tilde{\mathbf{G}}^F \to \tilde{M} \mid \forall p \in \tilde{\mathbf{P}}^F,\ \forall g \in \tilde{\mathbf{G}}^F, f(pg) = p.f(g)\}.$$

Alors $\operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M})$ est un $\tilde{\mathbf{G}}^F$-module pour l'action définie par

$$g.f(h) = f(hg)$$

pour tous $f \in \operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M})$ et g, $h \in \tilde{\mathbf{G}}^F$, et le caractère de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ associé à $\operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M})$ est $\operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{\lambda})$.

On note M la restriction à $\mathbf{P}^F$ du $\tilde{\mathbf{P}}^F$-module $\tilde{M}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on note M_i le sous-$\mathbf{P}^F$-module irréductible de M ayant pour caractère λ_i°. On peut voir $\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M)$ comme la restriction à $\mathbf{G}^F$ du $\tilde{\mathbf{G}}^F$-module $\operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M})$ et on a :

($\sharp$) $$\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M) = \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M_r).$$

On note $\tilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_{\tilde{\mathbf{G}}^F} \operatorname{Ind}^{\tilde{\mathbf{G}}^F}_{\tilde{\mathbf{P}}^F}(\tilde{M})$. Alors $\tilde{\mathcal{H}}$ est une sous-algèbre de l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M)$ et, d'après le corollaire 7.2.3, $\tilde{\mathcal{H}}$ stabilise chaque facteur de la décomposition en somme directe ($\sharp$). Si on note $\mathcal{H}$ l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_{\mathbf{G}^F} \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M_1)$, on a un morphisme injectif $\tilde{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{H}$.

On a un isomorphisme $\mathcal{H} \simeq \mathbb{K}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)]$ dont la restriction à $\tilde{\mathcal{H}}$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{K}[W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})]$. Si ζ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, on notera ζ_q le caractère irréductible de $\mathcal{H}$ associé à ζ via cet isomorphisme et on notera e_ζ l'idempotent primitif central de $\mathcal{H}$ associé à ζ_q. Si $g \in \mathbf{G}^F$, on a alors

(7.3.5) $$\rho_\zeta(g) = \frac{1}{\zeta(1)} \operatorname{Tr}(e_\zeta g, \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F}(M_1)).$$

La restriction $\sigma_1 : \mathbf{L}^F \to \mathbf{GL}(M_1)$ de la représentation de $\mathbf{P}^F$ associée à M_1 s'étend en une représentation $\bar{\sigma}_1 : \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1) \to \mathbf{GL}(M_1)$ (car la restriction de λ à $\mathbf{L}^F$ est sans multiplicité). Pour tout $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)$, on note $\dot{w}$ un représentant de w dans $\mathbf{G}^F$. Il existe alors un automorphisme $\sigma(\dot{w}) : M_1 \to M_1$ tel que, pour tout $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, on ait

(7.3.6) $$\bar{\sigma}_1({}^{\dot{w}^{-1}}l) = \varphi_w(l)^{\sigma(\dot{w})^{-1}} \bar{\sigma}_1(l).$$

Soit $l \in \tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. On note τ_l l'automorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)$ défini par

$$\begin{array}{rccl} \tau_l : & \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1) \\ & f & \longmapsto & \tau_l(f) : \qquad g \mapsto \bar{\sigma}_1(l) f({}^{l^{-1}}g). \end{array}$$

Si $g \in \mathbf{G}^F$, il est facile de vérifier que ${}^{l^{-1}}g$ agit sur $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)$ comme $\tau_l^{-1} g \tau_l$. Par suite, d'après la formule 7.3.5, on a, pour tout caractère irréductible ζ de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)$,

$$\begin{aligned} {}^l\rho_\zeta(g) &= \mathrm{Tr}(e_\zeta {}^{l^{-1}}g, \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)) \\ &= \mathrm{Tr}(e_\zeta \tau_l^{-1} g \tau_l, \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)) \\ &= \mathrm{Tr}(\tau_l e_\zeta \tau_l^{-1} g, \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)). \end{aligned}$$

La conjugaison par τ_l induit un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}$, et il reste à montrer que

$$\tau_l e_\zeta \tau_l^{-1} = e_{\zeta \otimes \xi}.$$

Pour tous $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, $f \in \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)$ et $g \in \mathbf{G}^F$, on pose

$$T_w(f)(g) = \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \sigma(\dot{w}) f(\dot{w}^{-1} u g).$$

Il est bien connu que $(T_w)_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda_1)}$ est une base de $\mathcal{H}$ et, par un argument de déformation, il suffit de montrer que

$(*)$ $$\tau_l T_w \tau_l^{-1} = \varphi_w(l)^{-1} T_w.$$

C'est un calcul fastidieux mais sans difficulté dont voici le détail. Soit $f \in \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F}(M_1)$ et soit $g \in \mathbf{G}^F$. On a alors

$$\begin{aligned} (\tau_l T_w \tau_l^{-1} f)(g) &= \bar{\sigma}_1(l)(T_w \tau_l^{-1} f)(l^{-1} g l) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}).(\tau_l^{-1} f)(\dot{w}^{-1} u l^{-1} g l) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}) \bar{\sigma}_1(l)^{-1}.f(l \dot{w}^{-1} u l^{-1} g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}) \bar{\sigma}_1(l)^{-1}.f(l \dot{w}^{-1} l^{-1} u g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}) \bar{\sigma}_1(l)^{-1}.f(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w} \dot{w}^{-1} u g) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}^F} \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}) \bar{\sigma}_1(l)^{-1} \sigma_1(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}).f(\dot{w}^{-1} u g) \\ &= \bar{\sigma}_1(l) \sigma(\dot{w}) \bar{\sigma}_1(l)^{-1} \sigma_1(l \dot{w}^{-1} l^{-1} \dot{w}) \sigma(\dot{w})^{-1}.(T_w f)(g). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\bar\sigma_1(l)\sigma(\dot w)\bar\sigma_1(l)^{-1}\sigma_1(l\dot w^{-1}l^{-1}\dot w)\sigma(\dot w)^{-1} &= \bar\sigma_1(l)\sigma(\dot w)\bar\sigma_1(l)^{-1}\bar\sigma_1(l)\bar\sigma_1(\dot w^{-1}l^{-1}\dot w)\sigma(\dot w)^{-1}\\ &= \bar\sigma_1(l)\sigma(\dot w)\bar\sigma_1(\dot w^{-1}l^{-1}\dot w)\sigma(\dot w)^{-1}\\ &= \varphi_w(l^{-1})\,\mathrm{Id}\end{aligned}$$

d'après la formule 7.3.6. Cela montre $(*)$ et la proposition. ∎

Remarque - Le paramétrage $\zeta \mapsto \rho_\zeta$ n'est défini qu'à conjugaison près de ρ_ζ par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ ou, compte tenu de la proposition 7.3.4, à tensorisation près de ζ par un caractère linéaire de A. Cela dépend du choix de l'isomorphisme $\mathrm{End}_{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1) \simeq \mathbb{K}[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)]$ que l'on a choisi.

7.4. Paramétrage des composantes irréductibles de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$. On notera $\bar A$ le groupe $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1))^\wedge$. On a, d'après l'isomorphisme 7.3.2, un morphisme surjectif de groupes $\bar A \longrightarrow A$. On note $\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ le produit semi-direct

$$\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) = W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde\lambda) \rtimes \bar A,$$

où $\bar A$ agit via le morphisme $\bar A \to A$. On a un morphisme surjectif de groupes $\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) \longrightarrow W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$. Si ζ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, on notera $\bar\zeta$ le caractère irréductible de $\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ obtenu via ce morphisme surjectif.

Soit $\bar\xi$ un caractère linéaire du groupe $\bar A$. On note $l_{\bar\xi}$ un représentant de $\bar\xi$ dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$ via l'isomorphisme $\bar A^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$. On pose alors, pour tout caractère irréductible ζ de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$,

(7.4.1) $$\boldsymbol{\rho}_{\bar\zeta\otimes\bar\xi} = \boldsymbol{\rho}^{\mathbf{G}}_{\bar\zeta\otimes\bar\xi} = {}^{l_{\bar\xi}}\rho_\zeta.$$

Avec ces notations, on a alors le

Théorème 7.4.2. *La formule* 7.4.1 *définit une application bijective*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Irr}\,\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda)\\ \bar\zeta & \longmapsto & \boldsymbol{\rho}_{\bar\zeta}\end{array}$$

où $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda)$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$. De plus,

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{\bar\zeta\in\mathrm{Irr}\,\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \bar\zeta(1)\boldsymbol{\rho}_{\bar\zeta}.$$

Preuve - Soient ζ et ζ' deux caractères irréductibles de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$, et soient $\bar\xi$ et $\bar\xi'$ deux caractères linéaires de $\bar A$. On suppose que $\bar\zeta\otimes\bar\xi = \bar\zeta'\otimes\bar\xi'$. Alors, d'après la proposition 7.3.4, on a

$${}^{l_{\bar\xi}}\rho_\zeta = {}^{l_{\bar\xi'}}\rho_{\zeta'}.$$

Cela montre que l'application du théorème 7.4.2 est bien définie. La bijectivité est immédiate. ∎

Remarque - (1) On note K le noyau du morphisme surjectif $\bar A \to A$. Alors K est un sous-groupe central de $\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, isomorphe à $(\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$. Soit $\bar\zeta$ un caractère irréductible de $\bar W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. Alors $\bar\zeta$ définit un caractère linéaire de K, c'est-à-dire un élément de

$\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, mettons l. La définition de $\boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}$ montre alors que c'est une composante irréductible de $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}({}^l\lambda_1)$. On peut donc retrouver à quelle série de Harish-Chandra appartient un caractère de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ grâce au paramétrage 7.4.2.

(2) Si l est un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ et si $\bar{\xi}$ désigne le caractère linéaire de $\bar{A}$ associé à la classe de l modulo $\tilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$, alors on a, pour tout caractère irréductible $\bar{\zeta}$ de $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$,

(7.4.3) $${}^l\boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}} = \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}\otimes\bar{\xi}}.$$

Puisque $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F \simeq \tilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$, on peut retrouver l'action de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ sur $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ via le paramétrage 7.4.2.

(3) Si χ est un caractère irréductible de $W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\lambda})$ et si $\bar{\zeta}$ est un caractère irréductible de $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, il résulte de 7.2.5 que

(7.4.4) $$\langle \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \tilde{\rho}_\chi, \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}} \rangle = \langle \operatorname{Ind}_{W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})}^{\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \chi, \bar{\zeta} \rangle$$

(4) Le paramétrage $\bar{\zeta} \mapsto \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}$ n'est défini qu'à conjugaison près par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F$: en effet, il dépend du choix d'une composante irréductible λ_1 de λ et du paramétrage $\zeta \mapsto \rho_\zeta$ qui lui aussi n'est pas bien défini (cf remarque suivant la proposition 7.3.4). Compte tenu de la formule 7.4.3, cela revient à remplacer le caractère irréductible $\bar{\zeta}$ par $\bar{\zeta} \otimes \bar{\xi}$ où $\bar{\xi}$ est un caractère linéaire de $\bar{A}$.

7.5. Induction de Harish-Chandra. Soit $\mathbf{Q}$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{P}$ et soit $\mathbf{M}$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{Q}$ contenant $\mathbf{L}$. Puisqu'il est unique, $\mathbf{M}$ est F-stable. On peut définir de la même manière qu'au paragraphe précédent 7.4 un groupe $\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, et on a alors une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} \bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{M}^F, \mathbf{L}, \lambda) \\ \bar{\mu} & \longmapsto & \boldsymbol{\rho}_{\bar{\mu}}^{\mathbf{M}} \end{array}$$

Le groupe $\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ est un sous-groupe de $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, et on a le

Théorème 7.5.1. *Soient $\bar{\mu}$ et $\bar{\zeta}$ deux caractères irréductibles de $\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ respectivement. Alors*

$$\langle R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \boldsymbol{\rho}_{\bar{\mu}}^{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}^{\mathbf{G}} \rangle = \langle \operatorname{Ind}_{\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \bar{\mu}, \bar{\zeta} \rangle.$$

Preuve - Soient τ et τ' les caractères linéaires de K (on rappelle que K est le noyau du morphisme $\bar{A} \to A$, qui est aussi le noyau du morphisme $\bar{A}_{\mathbf{M}} \to A_{\mathbf{M}}$ car il est isomorphe à $\tilde{\mathbf{L}}^F/\tilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, où $A_{\mathbf{M}}$ et $\bar{A}_{\mathbf{M}}$ sont définis relativement à $\mathbf{M}$ de la même manière que A et $\bar{A}$). Puisque K est central dans $\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, si τ et τ' sont différents, alors

$$\langle \operatorname{Ind}_{\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \bar{\mu}, \bar{\zeta} \rangle = 0.$$

D'autre part, d'après la remarque 1 du paragraphe précédent, les composantes irréductibles de $R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \boldsymbol{\rho}_{\bar{\mu}}^{\mathbf{M}}$ et $\boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}^{\mathbf{G}}$ ne sont pas dans la même série de Harish-Chandra. Par suite

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \boldsymbol{\rho}_{\bar{\mu}}^{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}^{\mathbf{G}} \rangle = 0.$$

Cela montre que l'on peut supposer que $\tau = \tau'$. Quitte à conjuguer par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F$, on peut même supposer que $\tau = \tau' = 1$. Par conséquent, $\bar{\zeta}$ et $\bar{\mu}$ se factorisent par des caractères irréductibles ζ et μ de $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ et $\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ respectivement. On a donc $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{G}}_{\bar{\zeta}} = \rho^{\mathbf{G}}_{\zeta}$ et $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{M}}_{\bar{\mu}} = \rho^{\mathbf{M}}_{\mu}$. D'après [HL2], théorème 5.9, on a alors

$$\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}\rho^{\mathbf{M}}_{\mu}, \rho^{\mathbf{G}}_{\zeta}\rangle = \langle \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}\,\mu, \zeta\rangle.$$

Il reste alors à vérifier que

$$\langle \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}\,\mu, \zeta\rangle = \langle \mathrm{Ind}_{\bar{W}_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}\,\bar{\mu}, \bar{\zeta}\rangle,$$

ce qui est évident. ■

7.6. Restriction à un sous-groupe réductif connexe de G de même type. Soit $\mathbf{G}'$ un sous-groupe réductif connexe F-stable de $\mathbf{G}$, contenant le groupe dérivé $D(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$. On pose $\mathbf{T}'_0 = \mathbf{T}_0 \cap \mathbf{G}'$. On note $(\mathbf{G}'^*, \mathbf{T}'^*_0, F^*)$ un triplet dual de $(\mathbf{G}', \mathbf{T}'_0, F)$. Les injections $j : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ et $i' : \mathbf{G}' \to \tilde{\mathbf{G}}$ induisent des surjections $j^* : \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}'^*$ et $i'^* : \tilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}'^*$, commutant avec F^* et de sorte que l'on peut supposer que $i'^* = j^* \circ i^*$. On note $\mathbf{Z}'$ le centre de $\mathbf{G}'$, et $s' = j^*(s)$. Alors $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \cap \mathbf{G}'$. On peut alors définir les groupes $W(s')$ et $A(s')$ de manière similaire à $W(s)$ et $A(s)$. Il est alors clair que $W(s) \subseteq W(s')$, et donc que $A(s) \subseteq A(s')$.

On pose $\mathbf{L}' = \mathbf{G}' \cap \mathbf{P}$ et $\mathbf{P}' = \mathbf{G}' \cap \mathbf{P}$. D'après [L5], la restriction λ' de λ à $\mathbf{G}'^F$ est sans multiplicité. On note λ'_1 une composante irréductible de la restriction à $\mathbf{L}'$ de λ_1. D'après le corollaire 7.2.3, le groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ (respectivement $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$) est un sous-groupe du groupe $W_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda'_1)$ (respectivement $\bar{W}_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda')$). On a donc une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}\,\bar{W}_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda') & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}',\mathbf{L}',\lambda') \\ \bar{\zeta}' & \longmapsto & \boldsymbol{\rho}'_{\bar{\zeta}'}. \end{array}$$

Proposition 7.6.1. *Soient $\bar{\zeta}$ et $\bar{\zeta}'$ deux caractères irréductibles de $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ et $\bar{W}_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda')$ respectivement. Alors*

$$\langle \mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}'^F}\,\boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}}, \boldsymbol{\rho}_{\bar{\zeta}'}\rangle = \langle \mathrm{Ind}_{\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}^{\bar{W}_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda')}\,\bar{\zeta}, \bar{\zeta}'\rangle.$$

Preuve - Quitte à conjuguer par un élément de $\tilde{\mathbf{L}}^F$, on peut supposer que $\bar{\zeta}$ et $\bar{\zeta}'$ proviennent de caractères irréductibles ζ et ζ' de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_1)$ et $W_{\mathbf{G}'^F}(\mathbf{L}',\lambda'_1)$ respectivement. Le résultat découle alors de propriétés élémentaires des algèbres de Hecke comme par exemple la formule 7.2.5. ■

CHAPITRE II

Formule de Mackey

Ce chapitre est consacré à la démonstration de la formule de Mackey lorsque q est grand. Nous en donnons deux démonstrations. La première est élémentaire et donne une borne explicite sur q. La seconde utilise la théorie des faisceaux-caractères de Lusztig (cf [L4]) : elle ne donne pas de borne explicite sur q et nécessite une condition sur p mais elle est susceptible d'être améliorée si des progrès sont faits dans la théorie des faisceaux-caractères. Un des autres objectifs de ce chapitre est de faire le point sur ce qui est connu sur la formule de Mackey.

Dans ce chapitre, et dans ce chapitre seulement, on se fixe deux sous-groupes paraboliques $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{G}$ ainsi que deux sous-groupes de Levi $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ respectivement. On notera $\mathbf{U}$ (respectivement $\mathbf{V}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ (respectivement $\mathbf{Q}$). On suppose de plus que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ sont F-stables. On se fixe aussi deux sous-groupes réguliers F^*-stables $\mathbf{L}^*$ et $\mathbf{M}^*$ de $\mathbf{G}^*$ duaux de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ respectivement.

8. Formule de Mackey et fonctions de Green

8.1. Fonctions de Green. On notera par la suite $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ (ou $Q_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ s'il y a confusion possible) l'application :

$$\begin{array}{rccc} Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : & \mathbf{G}_u^F \times \mathbf{L}_u^F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u,v) & \longmapsto & \mathrm{Tr}((u,v), H_c^*(\mathbf{Y_U})). \end{array}$$

La fonction $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ est appelée la **fonction de Green** associée à $\mathbf{L}$ et $\mathbf{G}$. Soient $g \in \mathbf{G}^F$ et $l \in \mathbf{L}^F$. On pose $s = g_s$, $u = g_u$, $t = l_s$ et $v = l_u$. Soit λ (respectivement γ) une fonction centrale sur $\mathbf{L}^F$ (respectivement $\mathbf{G}^F$). Les "formules du caractère" (cf, par exemple, [DM1], proposition 12.2) sont les suivantes :

(8.1.1)
$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)(su) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|}\frac{1}{|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|}\sum_{\substack{h\in\mathbf{G}^F \\ s\in {}^h\mathbf{L}}}\ \sum_{v\in C^\circ_{{}^h\mathbf{L}}(s)^F_u} Q_{C^\circ_{{}^h\mathbf{L}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(u,v^{-1})^h\lambda(sv),$$

(8.1.2)
$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\gamma)(tv) = \frac{1}{|C^\circ_{\mathbf{G}}(t)^F|}\sum_{u\in C^\circ_{\mathbf{G}}(t)^F_u} Q_{C^\circ_{\mathbf{L}}(t)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}(u,v^{-1})\gamma(tu).$$

Remarque - Tout comme le foncteur d'induction de Lusztig, la fonction de Green $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ dépend a priori du choix du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi. S'il y a une ambiguïté, on notera $Q_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ la fonction de Green $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. La formule de Mackey implique l'indépendance des foncteurs d'induction de Lusztig (et donc des fonctions de Green) par rapport au choix de ce sous-groupe parabolique. Il est donc un peu gênant de ne pas les écrire tant que l'on n'a pas démontré la formule de Mackey. Cependant, on essaiera de faire attention à ce que ce choix du sous-groupe parabolique soit toujours clair, ou du moins implicite, pour ne pas alourdir les notations. Par exemple, dans la formule du caractère 8.1.1, lorsque $s \in {}^h\mathbf{L}^F$, la fonction de Green $Q_{C^\circ_{{}^h\mathbf{L}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}$ est en fait la fonction de Green $Q_{C^\circ_{{}^h\mathbf{L}}(s)\subset C^\circ_{{}^h\mathbf{P}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}$.

8.2. Formule de Mackey. On notera $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})$ l'ensemble des éléments $x \in \mathbf{G}$ tels que $\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}$ contienne un tore maximal de $\mathbf{G}$. On appelle **formule de Mackey** pour le triplet $(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$, et on notera $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$, la formule suivante :

(8.2.1)
$$ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \sum_{x\in\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, x)_*. $$

Conjecture ($\mathfrak{M}$) : *La formule de Mackey a lieu pour tout triplet* $(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ *comme ci-dessus.*

La formule de Mackey a déjà été démontrée dans quelques cas. Voici ceux qui seront utilisés par la suite :

Proposition 8.2.2. (i) *Si* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *sont* F*-stables, alors* $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ *est vraie.*
(ii) *Si* $\mathbf{L}$ *ou* $\mathbf{M}$ *est un tore maximal de* $\mathbf{G}$*, alors* $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ *est vraie.*

Preuve - cf, par exemple, [DM1], théorème 5.1 pour le (i) et théorème 11.13 pour le (ii). ■

Si λ et μ sont deux fonctions centrales sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement, on posera :
$$ R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda,\mu) = \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\mu\rangle_{\mathbf{G}^F} - \sum_{x\in\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}\lambda, {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}\,{}^x\mu\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F}. $$
La formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ est équivalente à la nullité de $R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda,\mu)$ pour toutes fonctions centrales λ et μ sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement.

8.3. Conjecture sur les fonctions de Green. On reprend les notations du paragraphe 8.2. Si u (respectivement v) est un élément unipotent F-stable de $\mathbf{G}$ (respectivement $\mathbf{L}$), on notera $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u,.)$ (respectivement $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(.,v)$) la fonction sur $\mathbf{L}^F$ (respectivement $\mathbf{G}^F$) valant 0 en dehors des éléments unipotents et valant $Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u,v)$ en v (respectivement u).

On appellera par la suite **formule de Mackey pour les fonctions de Green** pour le triplet $(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$, et on notera $\mathcal{G}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$, la formule :
$$ \langle Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(.,v^{-1}), Q_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(.,w^{-1})\rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{x\in\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle Q_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(v,.), Q_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}({}^xw,.)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F} $$
pour tous $v \in \mathbf{L}_u^F$ et $w \in \mathbf{M}_u^F$.

Conjecture $(\mathfrak{G})$: *La formule de Mackey pour les fonctions de Green a lieu pour tout triplet* $(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ *comme ci-dessus.*

On posera, pour tous $v \in \mathbf{L}_u^F$ et $w \in \mathbf{M}_u^F$,

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(v,w) &= \langle Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(.,v^{-1}), Q_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(.,w^{-1})\rangle_{\mathbf{G}^F} \\ &\quad - \sum_{x \in \mathbf{L}^F\backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle Q_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(v,.), Q_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}({}^x w,.)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F} \end{aligned}$$

La formule $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ est équivalente à la nullité de $Q_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(v,w)$ pour tous $v \in \mathbf{L}_u^F$ et $w \in \mathbf{M}_u^F$.

8.4. Un lemme de récurrence. On notera par la suite $\mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ l'ensemble des triplets $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ où $\mathbf{G}'$ est un sous-groupe réductif connexe F-stable de $\mathbf{G}$ de même rang, et où $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{M}'$ sont des sous-groupes de Levi F-stables de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}'$ tels que $\mathbf{L}'$ est contenu dans un conjugué de $\mathbf{L}$ sous $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{M}'$ est contenu dans un conjugué de $\mathbf{M}$ sous $\mathbf{G}^F$ et tels que

$$\dim \mathbf{G}' + \dim \mathbf{L}' + \dim \mathbf{M}' < \dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}.$$

Notre stratégie pour démontrer la formule de Mackey pour q grand commence par démontrer l'équivalence des conjectures $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{G})$.

Lemme 8.4.1. *On suppose que la formule de Mackey pour les fonctions de Green a lieu pour tout triplet* $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$. *Soient λ et μ deux fonctions centrales sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement. Alors :*

$$R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda,\mu) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|} \sum_{z \in \mathbf{Z}^F} \sum_{\substack{v \in \mathbf{L}_u^F \\ w \in \mathbf{M}_u^F}} \lambda(zv)\mu(z^{-1}w^{-1}) Q_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(v,w)$$

Preuve - On pose

$$P(\lambda,\mu) = \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\mu\rangle_{\mathbf{G}^F},$$

$$Q(\lambda,\mu) = \sum_{x \in \mathbf{L}^F\backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}\lambda, {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}\, {}^x\mu\rangle_{\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F}.$$

D'après la formule du caractère 8.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
P(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|}\sum_{s\in\mathbf{G}_s^F}\sum_{u\in C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F_u}\frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|^2}\\
&\quad \sum_{\substack{g\in\mathbf{G}^F\\ s\in{}^g\mathbf{L}}}\ \sum_{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F_u} Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}(u,v^{-1})\,{}^g\lambda(sv)\\
&\quad \sum_{\substack{h\in\mathbf{G}^F\\ s\in{}^h\mathbf{M}}}\ \sum_{w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F_u} Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}(u,w^{-1})\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1})\\
&= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|}\sum_{z\in\mathbf{Z}^F}\sum_{u\in\mathbf{G}^F_u}\frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{G}^F|^2}\\
&\quad \sum_{\substack{g\in\mathbf{G}^F\\ h\in\mathbf{G}^F}}\ \sum_{\substack{v\in{}^g\mathbf{L}^F_u\\ w\in{}^h\mathbf{M}^F_u}} Q^{\mathbf{G}}_{{}^g\mathbf{L}}(u,v^{-1})Q^{\mathbf{G}}_{{}^h\mathbf{M}}(u,w^{-1})\,{}^g\lambda(zv)\,{}^h\mu(z^{-1}w^{-1})\\
&\quad +P'(\lambda,\mu)\\
&= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|}\sum_{z\in\mathbf{Z}^F}\sum_{u\in\mathbf{G}^F_u}\frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\sum_{\substack{v\in\mathbf{L}^F_u\\ w\in\mathbf{M}^F_u}} Q^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(u,v^{-1})Q^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(u,w^{-1})\lambda(zv)\mu(z^{-1}w^{-1})\\
&\quad +P'(\lambda,\mu)\\
&= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\sum_{z\in\mathbf{Z}^F}\sum_{\substack{v\in\mathbf{L}^F_u\\ w\in\mathbf{M}^F_u}}\lambda(zv)\mu(z^{-1}w^{-1})\langle Q^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(.,v^{-1}),Q^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(.,w^{-1})\rangle_{\mathbf{G}^F}\\
&\quad +P'(\lambda,\mu),
\end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned}
P'(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|}\sum_{s\in\mathbf{G}_s^F-\mathbf{Z}^F}\sum_{u\in C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F_u}\frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|^2}\\
&\quad \sum_{\substack{g\in\mathbf{G}^F\\ s\in{}^g\mathbf{L}}}\ \sum_{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F_u} Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}(u,v^{-1})\,{}^g\lambda(sv)\\
&\quad \sum_{\substack{h\in\mathbf{G}^F\\ s\in{}^h\mathbf{M}}}\ \sum_{w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F_u} Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}(u,w^{-1})\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1})
\end{aligned}$$

On va mener le même calcul avec $Q(\lambda,\mu)$. Pour cela, on a besoin d'indexer différemment la somme qui définit $Q(\lambda,\mu)$. Si $x\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$, on a

$$|\mathbf{L}^F x\mathbf{M}^F| = \frac{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F|}.$$

Par conséquent,

$$Q(\lambda,\mu) = \sum_{x\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F}\frac{|\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}(\lambda), {}^*R^{{}^x\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}({}^x\mu)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F}.$$

On notera $\mathcal{S}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})$ l'ensemble des couples $(g,h) \in \mathbf{G}\times\mathbf{G}$ tels que ${}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}$ contienne un tore maximal de $\mathbf{G}$. Avec cette nouvelle notation, on a :

$$Q(\lambda,\mu) = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{G}^F|}\sum_{(g,h)\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} |{}^g\mathbf{L}^F\cap{}^h\mathbf{M}^F|\langle {}^*R^{{}^g\mathbf{L}}_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}({}^g\lambda), {}^*R^{{}^h\mathbf{M}}_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}({}^h\mu)\rangle_{{}^g\mathbf{L}^F\cap{}^h\mathbf{M}^F}.$$

En utilisant cette fois-ci la formule du caractère 8.1.2, on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\sum_{z\in\mathbf{Z}^F}\sum_{\substack{v\in\mathbf{L}^F_u\\ w\in\mathbf{M}^F_u}}\lambda(zv)\mu(z^{-1}w^{-1}) \\ &\quad \sum_{x\in\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F}\langle Q^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}(v,.), Q^{{}^x\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}({}^xw,.)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F} \\ &\quad +Q'(\lambda,\mu), \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} Q'(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{G}^F|}\sum_{(g,h)\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F}\sum_{\substack{s\in{}^g\mathbf{L}^F_s\cap{}^h\mathbf{M}^F_s\\ s\notin\mathbf{Z}^F}}\sum_{u\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)^F_u}\frac{1}{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F|.|C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F|} \\ &\quad \sum_{\substack{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F_u\\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F_u}} Q^{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}(v,u^{-1})Q^{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}(w,u^{-1}){}^g\lambda(sv){}^h\mu(s^{-1}w^{-1}). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\sum_{z\in\mathbf{Z}^F}\sum_{\substack{v\in\mathbf{L}^F_u\\ w\in\mathbf{M}^F_u}}\lambda(zv)\mu(z^{-1}w^{-1})Q^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(v,w) \\ &\quad +P'(\lambda,\mu)-Q'(\lambda,\mu), \end{aligned}$$

ce qui montre que le lemme 8.4.1 résulte du

Lemme 8.4.2. *Avec les hypothèses du lemme* 8.4.1*, on a* $P'(\lambda,\mu) = Q'(\lambda,\mu)$*.*

Preuve - Pour tout élément s semi-simple de $\mathbf{G}^F$ n'appartenant pas à $\mathbf{Z}^F$, la formule $\mathcal{G}(C^\circ_{\mathbf{G}}(s), C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s), C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s))$ est vraie par hypothèse (où g et h sont deux éléments de $\mathbf{G}^F$ tels que $s \in {}^g\mathbf{L}^F \cap {}^h\mathbf{M}^F$). Par suite,

$$\begin{aligned}
P'(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{\substack{g\in\mathbf{G}^F\\ h\in\mathbf{G}^F}} \sum_{\substack{s\in{}^g\mathbf{L}_s^F\cap{}^h\mathbf{M}_s^F\\ s\notin\mathbf{Z}^F}} \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|} \\
&\quad \sum_{\substack{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)_u^F\\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)_u^F}} {}^g\lambda(sv)\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1})\langle Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}(.,v^{-1}), Q^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}_{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}(.,w^{-1})\rangle_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{\substack{g\in\mathbf{G}^F\\ h\in\mathbf{G}^F}} \sum_{\substack{s\in{}^g\mathbf{L}_s^F\cap{}^h\mathbf{M}_s^F\\ s\notin\mathbf{Z}^F}} \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|} \sum_{\substack{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)_u^F\\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)_u^F}} {}^g\lambda(sv)\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1}) \\
&\quad \sum_{y\in\mathcal{S}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s),C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s))^F} \frac{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)^F|}{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F|.|C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F|} \\
&\quad \langle Q^{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)}(v,.), Q^{{}^yC^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)}({}^yw,.)\rangle_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)^F}.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
Q'(\lambda,\mu) &= \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{G}^F|} \sum_{(g,h)\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \sum_{\substack{s\in{}^g\mathbf{L}_s^F\cap{}^h\mathbf{M}_s^F\\ s\notin\mathbf{Z}^F}} \frac{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)^F}{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F|.|C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F|} \\
&\quad \sum_{\substack{v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)_u^F\\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)_u^F}} \langle Q^{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}(v,.), Q^{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}(w,.)\rangle_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)^F}\,{}^g\lambda(sv)\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1}).
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \{(g,h,s,y,v,w)\in(\mathbf{G}^F)^6 \quad | \quad & s\in{}^g\mathbf{L}^F\cap{}^h\mathbf{M}^F-\mathbf{Z}^F,\ y\in\mathcal{S}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s),C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s))^F, \\
& v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)_u^F,\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)_u^F\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{(g,h,s,v,w)\in(\mathbf{G}^F)^5 \quad | \quad & (g,h)\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M}),\ s\in{}^g\mathbf{L}^F\cap{}^h\mathbf{M}^F-\mathbf{Z}^F, \\
& v\in C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)_u^F,\ w\in C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)_u^F\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $(g,h,s,y,v,w)\in\mathcal{A}$ (respectivement $(g,h,s,v,w)\in\mathcal{B}$), on pose :

$$\begin{aligned}
\rho(g,h,s,y,v,w) &= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|.|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}.\frac{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)^F|}{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F|.|C^\circ_{{}^{yh}\mathbf{M}}(s)^F|} \\
&\quad \langle Q^{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)}(v,.), Q^{C^\circ_{{}^{yh}\mathbf{M}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)}(w,.)\rangle_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^{yh}\mathbf{M}}(s)^F}\,{}^g\lambda(sv)\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1})
\end{aligned}$$

(respectivement

$$\begin{aligned}
\sigma(g,h,s,v,w) &= \frac{1}{|\mathbf{G}^F|.|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}.\frac{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)^F|}{|C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)^F|.|C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)^F|} \\
&\quad \langle Q^{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}(v,.), Q^{C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)}_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)}({}^yw,.)\rangle_{C^\circ_{{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}}(s)^F}\,{}^g\lambda(sv)\,{}^h\mu(s^{-1}w^{-1}) \qquad)
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$P'(\lambda,\mu) = \sum_{(g,h,s,y,v,w)\in\mathcal{A}} \frac{1}{|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|}\rho(g,h,s,y,v,w),$$

$$Q'(\lambda,\mu) = \sum_{(g,h,s,v,w)\in\mathcal{B}} \sigma(g,h,s,v,w).$$

On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & (g,h,s,y,v,w) & \longmapsto & (g,yh,s,v,{}^y w). \end{array}$$

Le lemme 8.4.2 découle alors immédiatement des propriétés suivantes de l'application π :

Lemme 8.4.3. (i) *L'application π est bien définie et surjective.*
(ii) *Si $(g,h,s,v,w)\in\mathcal{B}$, alors $|\pi^{-1}(g,h,s,v,w)| = |C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|$.*
(iii) *Si $(g,h,s,y,v,w)\in\mathcal{A}$, alors :*

$$\sigma(\pi(g,h,s,y,v,w)) = \rho(g,h,s,y,v,w).$$

Preuve - • Soit $(g,h,s,y,v,w)\in\mathcal{A}$. Pour montrer que $\pi(g,h,s,y,v,w)\in\mathcal{B}$, il suffit de montrer que $(g,yh)\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})$. Or, par hypothèse, $C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)\cap C^\circ_{{}^{yh}\mathbf{M}}(s)$ contient un tore maximal de $C^\circ_{\mathbf{G}}(s)$, donc ${}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}$ contient un tore maximal de $\mathbf{G}$. L'application π est donc bien définie.

Soit $(g,h,s,v,w)\in\mathcal{B}$. Puisque $s\in{}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}$, il existe un tore maximal $\mathbf{T}$ de ${}^g\mathbf{L}\cap{}^h\mathbf{M}$ contenant s. Par suite, $\mathbf{T}$ est contenu dans $C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s)\cap C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)$, ce qui montre que $1\in\mathcal{S}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(C^\circ_{{}^g\mathbf{L}}(s),C^\circ_{{}^h\mathbf{M}}(s)$. Par suite, $(g,h,s,1,v,w)\in\mathcal{A}$ et $(g,h,s,v,w)=\pi(g,h,s,1,v,w)$ ce qui montre que π est surjective. D'où le (i).

• Si $(g,h,s,v,w)\in\mathcal{B}$, il est facile de vérifier que :

$$\pi^{-1}(g,h,s,v,w) = \{(g,y^{-1}h,s,y,v,{}^{y^{-1}}w) \mid y\in C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F\},$$

ce qui montre le (ii).

• Le (iii) est trivial. ■

Le lemme 8.4.1 implique facilement par récurrence sur $\dim\mathbf{G}+\dim\mathbf{L}+\dim\mathbf{M}$ la

Proposition 8.4.4. *Les conjectures* $(\mathfrak{M})$ *et* $(\mathfrak{G})$ *sont équivalentes.*

9. Fonctions absolument cuspidales

9.1. Définition. On a défini les caractères irréductibles cuspidaux d'un groupe réductif comme étant ceux dont les restrictions de Harish-Chandra sont nulles. La notion de fonction absolument cuspidale est l'analogue lorsque l'on considère les restrictions de Lusztig :

Définition 9.1.1. *Une fonction centrale γ sur $\mathbf{G}^F$ est dite **absolument cuspidale** si, pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ et pour tout sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{P}$, on a :*

$$^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\gamma) = 0.$$

On notera $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})$ l'ensemble des éléments n de $\mathbf{G}$ tels que $^n\mathbf{M} = \mathbf{L}$. Soient λ et μ deux fonctions absolument cuspidales sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement. On a alors

$$R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda,\mu) = \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu)\rangle_{\mathbf{G}^F} - \sum_{n\in \mathbf{L}^F\backslash N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle \lambda, {}^n\mu\rangle_{\mathbf{L}^F}.$$

Conjecture $(\mathfrak{A})$: *Pour tout triplet $(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ comme ci-dessus et pour toutes fonctions absolument cuspidales λ et μ sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement, on a $R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda,\mu) = 0$.*

9.2. Un autre lemme de récurrence. Ce lemme va nous permettre, en raisonnant par récurrence, de n'avoir à vérifier la formule de Mackey que pour les fonctions absolument cuspidales.

Lemme 9.2.1. *Soit $\mathbf{K}$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}$. On suppose que la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{K},\mathbf{M})$ a lieu et que, pour tout $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$, la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{L},\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M},\mathbf{K})$ a aussi lieu. Alors, pour toutes fonctions centrales χ et μ sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement, on a*

$$R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}\chi,\mu) = 0$$

Preuve - Par hypothèse, la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{K},\mathbf{M})$ a lieu, donc

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}(\chi)), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu)\rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{z\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K},\mathbf{M})} \frac{|\mathbf{K}^F\cap {}^z\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{K}^F|.|\mathbf{M}^F|}\langle {}^*R_{\mathbf{K}\cap {}^z\mathbf{M}}^{\mathbf{K}}(\chi), {}^*R_{\mathbf{K}\cap {}^z\mathbf{M}}^{{}^z\mathbf{M}}({}^z\mu)\rangle_{\mathbf{K}^F\cap {}^z\mathbf{M}^F}.$$

De même, pour tout $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$, la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{L},\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M},\mathbf{K})$ a lieu par hypothèse. Par suite :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}(R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi)), {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}({}^x\mu)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F}\\
= &\sum_{x\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|} \sum_{y\in\mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M},\mathbf{K})^F} \frac{|\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F\cap {}^y\mathbf{K}^F|}{|\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F|.|\mathbf{K}^F|}\\
&\langle R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}\cap {}^y\mathbf{K}}^{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}\cap {}^y\mathbf{K}}^{{}^y\mathbf{K}}({}^y\chi), {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}({}^x\mu)\rangle_{\mathbf{L}^F\cap {}^x\mathbf{M}^F}\\
= &\sum_{x\in\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \sum_{y\in\mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M},\mathbf{K})^F} \frac{|{}^x\mathbf{M}^F\cap {}^y\mathbf{K}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{K}^F|}\ \langle {}^*R_{{}^x\mathbf{M}\cap {}^y\mathbf{K}}^{{}^y\mathbf{K}}({}^y\chi), {}^*R_{{}^x\mathbf{M}\cap {}^y\mathbf{K}}^{{}^x\mathbf{M}}({}^x\mu)\rangle_{{}^x\mathbf{M}^F\cap {}^y\mathbf{K}^F}\\
= &\sum_{(x,y)\in\mathcal{M}} \frac{|\mathbf{K}^F\cap {}^{y^{-1}x}\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|\mathbf{K}^F|}\ \langle {}^*R_{\mathbf{K}\cap {}^{y^{-1}x}\mathbf{M}}^{\mathbf{K}}(\chi), {}^*R_{\mathbf{K}\cap {}^{y^{-1}x}\mathbf{M}}^{{}^{y^{-1}x}\mathbf{M}}({}^{y^{-1}x}\mu)\rangle_{\mathbf{K}^F\cap {}^{y^{-1}x}\mathbf{M}^F}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{M}$ l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbf{G}^F)^2$ tels que $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})^F$ et $y \in \mathcal{S}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}, \mathbf{K})^F$. Le lemme 9.2.1 résulte alors du fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K}, \mathbf{M})^F \\ (x, y) & \longmapsto & y^{-1}x \end{array}$$

est surjective et a toutes ses fibres de cardinal $|\mathbf{L}^F|$. ∎

On retrouve, grâce au lemme 9.2.1, le résultat suivant bien connu :

Corollaire 9.2.2. *Si toutes les fonctions centrales sur $\mathbf{L}^F$ (ou sur $\mathbf{M}^F$) sont uniformes, alors la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ est vraie.*

Preuve - Cf (ii) de la proposition 8.2.2. ∎

Le lemme 9.2.1 sera utilisé par la suite sous la forme suivante :

Corollaire 9.2.3. *On suppose que la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ a lieu pour tout triplet $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$. Soit $\mathbf{K}$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{L}$. Alors, pour toutes fonctions centrales χ et μ sur $\mathbf{K}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement, on a*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}\chi, \mu) = 0$$

9.3. Équivalence des conjectures $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{A})$. Comme annoncé, le lemme 9.2.1 permet de se ramener à la vérification de la formule de Mackey pour les fonctions absolument cuspidales seulement :

Théorème 9.3.1. *Les conjectures $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{A})$ sont équivalentes.*

Preuve - La conjecture $(\mathfrak{A})$ est un cas particulier de la conjecture $(\mathfrak{M})$. On suppose donc la conjecture $(\mathfrak{A})$ vraie. Pour montrer qu'elle implique la conjecture $(\mathfrak{M})$, on raisonne par récurrence sur $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$, de sorte que l'on peut supposer que, pour tout $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$, la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ a lieu. On notera $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous-groupes de Levi F-stables de sous-groupes paraboliques propres de $\mathbf{L}$. Soient λ et μ deux fonctions centrales sur $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement. On écrit $\lambda = \lambda' + \lambda''$, où λ' est une fonction absolument cuspidale de $\mathbf{L}^F$ et

$$\lambda'' = \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{L}} a_{\mathbf{K}} R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}(\chi_{\mathbf{K}})$$

où les $a_{\mathbf{K}}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et les $\chi_{\mathbf{K}}$ sont des fonctions centrales sur $\mathbf{K}^F$ ($\mathbf{K} \in \mathcal{L}$).

On a alors

$$\begin{aligned} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda, \mu) &= R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda', \mu) + R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda'', \mu) \\ &= R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda', \mu) \end{aligned}$$

d'après le corollaire 9.2.3 en utilisant l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer que λ est absolument cuspidale. De même, on peut supposer que μ est absolument cuspidale, et donc, puisque $(\mathfrak{A})$ est vraie, on a

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda, \mu) = 0,$$

ce qui montre la conjecture $(\mathfrak{M})$. ∎

10. Formule de Mackey pour q grand

10.1. Énoncé. On notera par la suite $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ l'ensemble des diviseurs des coefficients de la plus grande racine de $\mathbf{G}$. On notera $\ell(\mathbf{G})$ le plus grand élément de $\mathcal{L}(\mathbf{G})$. On notera $\iota(\mathbf{G})$ le plus grand des nombres $|\mathbf{Z}(\mathbf{G}')/\mathbf{Z}(\mathbf{G}')^\circ|$ où $\mathbf{G}'$ parcourt l'ensemble des sous-groupes réductifs connexes F-stables de $\mathbf{G}$ de même rang.

Théorème 10.1.1. *Si $q > 1 + \ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^3$, alors la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ et la formule de Mackey pour les fonctions de Green $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ ont lieu.*

Le reste de cette section est consacrée à la démonstration du théorème 10.1.1.

10.2. Quelques réductions... On suppose donc que $q > 1+\ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^3$. On va montrer le théorème 10.1.1 par récurrence sur $n = \dim \mathbf{G}+\dim \mathbf{L}+\dim \mathbf{M}$. Compte tenu de la proposition 8.2.2, le théorème 10.1.1 est vrai pour les petites valeurs de n. On peut donc supposer que, pour tout $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$, les formules $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ et $\mathcal{G}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ ont lieu (en effet, $q > 1 + \ell(\mathbf{G}')\iota(\mathbf{G}')^3$).

On peut aussi supposer que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ sont différents de $\mathbf{G}$ car sinon, il n'y a rien à montrer.

Soient λ et μ deux caractères irréductibles de $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement. On reprend les notations du lemme 8.4.1 ($P(\lambda, \mu)$, $Q(\lambda, \mu)$, ...). Il suffit de montrer que $P(\lambda, \mu) = Q(\lambda, \mu)$.

Soit s (respectivement t) un élément semi-simple de $\mathbf{L}^{*F^*}$ (respectivement $\mathbf{M}^{*F^*}$) tel que $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, (s)_{\mathbf{L}^*})$ (respectivement $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{M}^F, (t)_{\mathbf{M}^*})$).

Lemme 10.2.1. *Si les éléments s et t ne sont pas conjugués sous $\mathbf{G}^{*F^*}$, alors $P(\lambda, \mu) = Q(\lambda, \mu) = 0$.*

Preuve - Résulte immédiatement du lemme 6.3.2. □

On supposera donc par la suite que s et t sont conjugués sous $\mathbf{G}^{*F^*}$. On peut même supposer que $s = t$ pour simplifier.

On note $\bar{\mathbf{G}}$ le groupe quotient $\mathbf{G}/\mathbf{Z}^\circ$, et on note $\pi : \mathbf{G} \to \bar{\mathbf{G}}$ la projection canonique. On posera $\bar{\mathbf{L}} = \pi(\mathbf{L})$ et $\bar{\mathbf{M}} = \pi(\mathbf{M})$. On notera aussi $\pi^* : \mathcal{C}(\bar{\mathbf{G}}^F) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}^F)$ induite par π.

Lemme 10.2.2. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\pi^* \circ R_{\bar{\mathbf{L}}}^{\bar{\mathbf{G}}} = R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \pi^*.$$

Par conséquent, on a, pour tous u et v dans $\mathbf{G}_u^F$ et $\mathbf{L}_u^F$ respectivement :

$$Q_{\bar{\mathbf{L}}}^{\bar{\mathbf{G}}}(\pi(u), \pi(v)) = Q_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(u, v).$$

Preuve - Le résultat sur les fonctions de Green résulte du résultat sur les foncteurs de Lusztig par application de la formule du caractère 8.1.1 en remarquant que les fonctions centrales à support unipotents de $\mathbf{G}^F$ sont les images par π^* des fonctions analogues sur $\bar{\mathbf{G}}^F$. Il suffit donc de montrer la première assertion.

On note $\bar{\mathbf{U}}$ l'image de $\mathbf{U}$ par π ($\bar{\mathbf{U}}$ est isomorphe à $\mathbf{U}$). L'application π induit par restriction une application notée $\pi_0 : \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \to \mathbf{Y}_{\bar{\mathbf{U}}}^{\bar{\mathbf{G}}}$.

Lemme 10.2.3. *L'application π_0 induit un isomorphisme $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}/\mathbf{Z}^{\circ F} \simeq \mathbf{Y}_{\bar{\mathbf{U}}}^{\bar{\mathbf{G}}}$.*

Preuve - Il suffit de montrer que π_0 est surjective et que toutes ses fibres sont des orbites sous l'action de $\mathbf{Z}^{\circ F}$ par translation.

• Soit $\bar{g} \in \mathbf{Y}_{\bar{\mathbf{U}}}^{\bar{\mathbf{G}}}$. On trouve g dans $\mathbf{G}$ tel que $\pi(g) = \bar{g}$. Par suite, $g^{-1}F(g) = zu$ où $z \in \mathbf{Z}^\circ$ et $u \in \mathbf{U}$. D'après le théorème de Lang, il existe $z' \in \mathbf{Z}^\circ$ tel que $z'^{-1}F(z') = z$. On pose alors $g' = gz'$. On a alors $\pi(g') = \bar{g}$ et $g' \in \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$, ce qui montre que π_0 est surjective.

• Soient g et g' dans $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ tels que $\pi(g) = \pi(g')$. Il existe z dans $\mathbf{Z}^\circ$ tels que $g' = gz$. Par suite, $z^{-1}F(z)g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}$, donc $\mathbf{U} \cap z^{-1}F(z)\mathbf{U} \neq \varnothing$. Donc $F(z) = z$, ce qui termine la démonstration du lemme 10.2.3. □

Le lemme 10.2.3 montre que, pour tout $i \geqslant 0$, on a

(10.2.4)
$$H_c^i(\mathbf{Y}_{\bar{\mathbf{U}}}^{\bar{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathbf{Z}^{\circ F}}.$$

Pour tout $\tau \in (\mathbf{Z}^{\circ F})^\wedge$, on note $H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\tau$ la composante τ-isotypique de $H_c^i(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour l'action de $\mathbf{Z}^F$ par translation.

Soit V un $\bar{\mathbf{L}}^F$-module irréductible. On note $\pi^*(V)$ le $\mathbf{L}^F$-module irréductible obtenu à partir de V via l'application $\pi : \mathbf{L}^F \to \bar{\mathbf{L}}^F$. On a alors

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\pi^*(V)) &= H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi^*(V) \\ &= \bigoplus_{\tau \in (\mathbf{Z}^{\circ F})} H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\tau \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi^*(V) \\ &= H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_1 \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi^*(V) \end{aligned}$$

car, pour tout caractère linéaire non trivial τ de $\mathbf{Z}^{\circ F}$, on a $H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\tau \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi^*(V) = 0$ car $\mathbf{Z}^{\circ F}$ agit trivialement sur $\pi^*(V)$. Par suite,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\pi^*(V)) &= H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathbf{Z}^{\circ F}} \otimes_{\mathbb{K}\mathbf{L}^F} \pi^*(V) \\ &= \pi^*(H_c^*(\mathbf{Y}_{\bar{\mathbf{U}}}^{\bar{\mathbf{G}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{K}\bar{\mathbf{L}}^F} V) \\ &= \pi^*(R_{\bar{\mathbf{L}}}^{\bar{\mathbf{G}}}(V)) \end{aligned}$$

d'après l'isomorphisme 10.2.4. ■

Compte tenu du lemme 8.4.1, les formules $\mathcal{M}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ et $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$ sont équivalentes. Le lemme 10.2.2 montre que l'on peut supposer que le groupe $\mathbf{G}$ est semi-simple, ce qui sera fait dans la suite de cette section.

10.3. Éléments quasi-isolés. Ce paragraphe permettra de faire quelques réductions sur l'élément semi-simple s.

Définition 10.3.1. *L'élément semi-simple s de $\mathbf{G}^*$ sera dit **quasi-isolé** (dans $\mathbf{G}^*$) si son centralisateur $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}^*$.*

On va commencer par un lemme général sur les éléments quasi-isolés :

Lemme 10.3.2. *Soit $\mathbf{Z}^*$ le centre de $\mathbf{G}^*$. Soit s un élément quasi-isolé de $\mathbf{G}^*$. Alors l'ordre de l'image de s dans $\mathbf{G}^*/\mathbf{Z}^*$ divise un des nombres $|\mathbf{Z}|.r$, où r parcourt $\mathcal{L}(\mathbf{G}^*) = \mathcal{L}(\mathbf{G})$.*

Preuve - On rappelle que s est dit **isolé** (dans $\mathbf{G}^*$) si $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi de sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}^*$. Il est bien connu (cf [B], chapitre VI, exercice 4 du paragraphe 4) que l'ordre de l'image d'un élément isolé dans $\mathbf{G}^*/\mathbf{Z}^*$ un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{G})$.

On pose $k = |C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)|$. Il est bien connu que k divise l'ordre de $\mathbf{Z}$ (on va le redémontrer car on aura besoin de la démonstration). Il suffit donc de montrer que s^k est isolé.

Soit $\pi : \tilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}^*$ un revêtement simplement connexe de $\mathbf{G}^*$. On note A le noyau de π. Alors $|A| = |\mathbf{Z}|$ (on rappelle que $\mathbf{G}$ est supposé semi-simple). Soit $\tilde{s}$ un élément de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ tel que $\pi(\tilde{s}) = s$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta_s : & C_{\mathbf{G}^*}(s) & \longrightarrow & A \\ & g & \longmapsto & \tilde{g}\tilde{s}\tilde{g}^{-1}\tilde{s}^{-1} = [\tilde{g}, \tilde{s}] \end{array}$$

où $\tilde{g}$ est un élément de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ tel que $\pi(\tilde{g}) = g$ (on remarque que $\theta_s(g)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{g}$). D'autre part, θ_s est un morphisme de groupes.

Puisque $\tilde{\mathbf{G}}^*$ est simplement connexe, le centralisateur $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est connexe (cf [S], théorème 8.1), et son image est $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ (cf, par exemple, [DM1], proposition 2.3, (ii)). Le noyau de θ_s est donc exactement $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$.

Pour montrer que s^k est isolé, il suffit de montrer que $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s^k)$ contient $C_{\mathbf{G}^*}(s)$. Soit donc $g \in C_{\mathbf{G}^*}(s)$. On a alors $\theta_s(g^k) = 1$ car $g^k \in C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. Or, par un calcul facile, $\theta_s(g^k) = \theta_s(g)^k = \theta_{s^k}(g)$. Donc g est dans le noyau de θ_{s^k} donc appartient à $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s^k)$. ■

Lemme 10.3.3. *Si l'élément s de $\mathbf{L}^*$ n'est pas quasi-isolé dans $\mathbf{L}^*$, alors*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda, \mu) = 0.$$

Preuve - Soit $\mathbf{K}^*$ l'intersection des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{L}^*$ contenant $C_{\mathbf{L}^*}(s)$. Alors $\mathbf{K}^*$ est un sous-groupe de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}^*$ et $\mathbf{K}^* \neq \mathbf{L}^*$ par hypothèse. On note $\mathbf{K}$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}$ dual de $\mathbf{K}$. D'après [L1], corollaire 9, il existe un caractère irréductible χ de $\mathbf{K}^F$ tel que $\lambda = \varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{\mathbf{K}} R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}\chi$. Par suite, il résulte du corollaire 9.2.3 que $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda, \mu) = 0$. ■

Lemme 10.3.4. *Si l'élément s de $\mathbf{G}^*$ n'est pas quasi-isolé dans $\mathbf{G}^*$, alors*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}(\lambda, \mu) = 0.$$

Preuve - Soit $\mathbf{K}^*$ l'intersection de tous les sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}^*$ contenant $C_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $\mathbf{K}^*$ est un sous-groupe de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}^*$, contenant $C_{\mathbf{G}^*}(s)$, et distinct de $\mathbf{G}^*$. Le groupe $\mathbf{K}^* \cap \mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}^*$ contenant $C_{\mathbf{L}^*}(s)$, donc $\mathbf{K}^*$ contient $\mathbf{L}^*$ car s est quasi-isolé dans $\mathbf{L}^*$. De même, $\mathbf{K}^*$ contient $\mathbf{M}^*$.

Soit $\mathbf{K}$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ dual de $\mathbf{K}^*$. On peut supposer que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ sont contenus dans $\mathbf{K}$. D'après [DM1], remarque 13.28, le foncteur $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{K}}$ induit une isométrie

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{K}} : \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{K}^F, [s]_{\mathbf{K}^{*F^*}}) \to \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\mu\rangle_{\mathbf{G}^F} &= \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{K}}\lambda, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{K}}\mu\rangle_{\mathbf{K}^F} \\ &= \sum_{x\in\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} \langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}\lambda, {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}\,{}^x\mu\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F}\end{aligned}$$

car, par hypothèse de récurrence, la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{K},\mathbf{L},\mathbf{M})$ a lieu. Il suffit donc de montrer que, si x est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$ n'appartenant pas à $\mathbf{K}$, alors

$$\langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}\lambda, {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}\,{}^x\mu\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F} = 0.$$

Soit donc $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$ tel que

$$(\clubsuit)\qquad \langle {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}}\lambda, {}^*R_{\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}}\,{}^x\mu\rangle_{\mathbf{L}^F\cap{}^x\mathbf{M}^F} \neq 0.$$

On a une bijection naturelle entre $\mathbf{L}^F\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F$ et $\mathbf{L}^{*F^*}\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}^*,\mathbf{M}^*)^{F^*}/\mathbf{M}^{*F^*}$. Il correspond donc à x un élément x^* de $\mathcal{S}_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}^*,\mathbf{M}^*)^{F^*}$ tel que $\mathbf{L}^*\cap{}^{x^*}\mathbf{M}^*$ soit un dual de $\mathbf{L}\cap{}^x\mathbf{M}$. Il résulte de la non-nullité du membre de gauche de ($\clubsuit$) et du lemme 6.3.2 qu'il existe un élément $l \in \mathbf{L}^{*F^*}$ et un élément $m \in \mathbf{M}^{*F^*}$ tel que ${}^l s = {}^{x^*}({}^m s)$. Par conséquent, $l^{-1}x^*m$ centralise s donc appartient à $\mathbf{K}^*$, et donc x^* appartient à $\mathbf{K}^*$ car $\mathbf{L}^*$ et $\mathbf{M}^*$ sont contenus dans $\mathbf{K}^*$. Par suite, $x \in \mathbf{K}$ car $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ sont contenus dans $\mathbf{K}$. ■

Compte tenu des lemmes 10.3.3 et 10.3.4, on peut, et ce sera fait par la suite, supposer que s est un élément quasi-isolé dans $\mathbf{G}^*$, dans $\mathbf{L}^*$ ainsi que dans $\mathbf{M}^*$ par symétrie.

10.4. Fin de la preuve du théorème 10.1.1. Soit $\pi : \tilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}^*$ un revêtement simplement connexe de $\mathbf{G}^*$. On notera encore F^* l'endomorphisme de Frobenius induit par F^* sur $\tilde{\mathbf{G}}^*$. L'indice de $\pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})$ dans $\mathbf{G}^{*F^*}$ est inférieur ou égal à $\iota(\mathbf{G})$ (par définition de $\iota(\mathbf{G})$). En effet, d'après le théorème de Lang, $\mathbf{G}^{*F^*}/\pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}) \simeq H^1(F^*, \operatorname{Ker}\pi)$, et $|\operatorname{Ker}\pi| = |\mathbf{Z}|$.

Lemme 10.4.1. *Il existe un élément $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap \pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})$ tel que sz et s ne soient pas conjugués sous $\mathbf{G}^*$.*

Preuve - Soit $\mathbf{T}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{L}^*$ contenant s. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$ et soit W^* le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$. Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)$ tel que s et sz soient conjugués sous $\mathbf{G}^*$. Alors ils sont conjugués sous W^*. Soit $w \in W^*$ tel que ${}^w s = sz$. Alors, pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $\alpha(s)\alpha(z) = w(\alpha)(s)$, c'est-à-dire $\alpha(z) = (w(\alpha)-\alpha)(s)$. D'autre part, d'après le lemme 10.3.2, l'ensemble $\{\beta(s) \mid \beta \in \Phi\}$ est d'ordre inférieur ou égal à $\ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une racine α telle que

$$|\alpha(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap \pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})| > \ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G}).$$

D'autre part, l'indice de l'image de $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap \pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})$ par une racine α dans $\alpha(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*})$ est inférieur ou égal à $\iota(\mathbf{G})$. Finalement, il suffit de montrer qu'il existe une racine α telle que

$$(\diamondsuit)\qquad |\alpha(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*})| > \ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^2.$$

Soit α une racine de $\mathbf{G}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$ qui ne soit pas une racine de $\mathbf{L}^*$. On note K le noyau de la restriction $\alpha : \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*) \to \mathbb{F}^\times$, et on note $K' = K \cap {}^{F^*}K \cap \cdots \cap {}^{F^{*r-1}}K$ où r est un entier tel que $F^{*r}(K) = K$. Alors K' est un sous-groupe F^*-stable de $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)$ et

$\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)/K'$ est un groupe diagonalisable de dimension supérieure ou égale à 1. D'autre part, $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap K = \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap K'$, et on a

$$|\alpha(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*})| = |\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*}/\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap K'|.$$

On note $\sigma : \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*}/\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap K' \hookrightarrow (\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)/\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*) \cap K')^{F^*}$ l'injection canonique. Il résulte du théorème de Lang que l'indice de l'image de σ dans $(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)/\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*) \cap K')^{F^*}$ est égal au cardinal de $H^1(F^*, K')$. De plus, $|(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)/\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*) \cap K')^{F^*}| \geqslant q-1$, donc

$$\begin{aligned} |\alpha(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*})| &\geqslant \frac{q-1}{|H^1(F^*, K')|} \\ &> \frac{\ell(\mathbf{G})\iota(\mathbf{G})^3}{|K'/K'^\circ|} \end{aligned}$$

donc, pour montrer ($\diamondsuit$), il suffit de montrer que $|K'/K'^\circ| \leqslant \iota(\mathbf{G})$.

On note ϕ l'automorphisme de $X(\mathbf{T}^*)$ tel que, pour tout $x \in X(\mathbf{T}^*)$, on ait $F^*(x) = q\phi(x)$. On note $\Phi_{\mathbf{L}}$ le système de racines de $\mathbf{L}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$. Alors $|K'/K'^\circ|$ est égal au cardinal de $(X(\mathbf{T}^*)/\Lambda)_{p'}$, où Λ est le sous réseau de $X(\mathbf{T}^*)$ engendré par $\Phi_{\mathbf{L}}$ et α, $\phi(\alpha)$, ... , $\phi^{r-1}(\alpha)$. Or, par définition, $|(X(\mathbf{T}^*)/\Lambda)_{p'}| \leqslant \iota(\mathbf{G})$. □

Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*}$, on notera $\varphi_z^{\mathbf{L}}$ le caractère linéaire de $\mathbf{L}^F$ induit par z. D'autre part, $\varphi_z^{\mathbf{L}}$ est trivial sur $\mathbf{Z}^F$ si et seulement si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap \pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})$.

Soit donc z un élément de $\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*} \cap \pi(\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*})$ tel que s et sz ne soient pas conjugués sous $\mathbf{G}^*$. Alors, d'après le lemme 10.2.1, on a

$$R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda \otimes \varphi_z^{\mathbf{L}}, \mu) = 0$$

car $\lambda \otimes \varphi_z^{\mathbf{L}} \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [sz]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ d'après 6.2.4. Or, par hypothèse de récurrence, on a, d'après le lemme 8.4.1, $R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda, \mu) = R_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda \otimes \varphi_z^{\mathbf{L}}, \mu)$, ce qui termine la démonstration du théorème 10.1.1. ∎

11. Formule de Mackey et faisceaux-caractères

On va redémontrer la formule de Mackey lorsque q est grand en utilisant la théorie des faisceaux-caractères.

11.1. Support unipotent. Soit f une fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$ et soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^F$. On définit une fonction centrale $d_s^{\mathbf{G}} f$ sur $C_{\mathbf{G}}^\circ(s)$ de la manière suivante :

$$d_s^{\mathbf{G}} f(u) = \begin{cases} f(su) & \text{si } u \text{ est unipotent,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces notations, les formules du caractère 8.1.1 et 8.1.2 s'écrivent alors :

(11.1.1)
$$d_s^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F|} \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{L}}} |C_{{}^g\mathbf{L}}^\circ(s)^F| \; R_{C_{{}^g\mathbf{L}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^g\mathbf{L}} \circ (\mathrm{ad}\, g)_*$$

(11.1.2)
$$d_s^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)} \circ d_s^{\mathbf{G}}.$$

Comme conséquence immédiate de la formule 11.1.2, on obtient :

Proposition 11.1.3. (a) *Une fonction centrale f sur $\mathbf{G}^F$ est absolument cuspidale si et seulement si $d_s^{\mathbf{G}} f$ est une fonction absolument cuspidale sur $C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F$ pour tout élément semi-simple s de $\mathbf{G}^F$.*

(b) *Soit f une fonction centrale absolument cuspidale sur $\mathbf{G}^F$ et soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^F$ tel que $d_s^{\mathbf{G}} f \neq 0$. Alors s est isolé.*

11.2. Encore un lemme de récurrence. Deux fonctions centrales λ et λ' sur $\mathbf{L}^F$ sont égales si et seulement si les fonctions $d_s^{\mathbf{L}}\lambda$ et $d_s^{\mathbf{L}}\lambda'$ sont égales pour tout élément semi-simple $s \in \mathbf{L}^F$. Pour vérifier la formule de Mackey, il faut donc vérifier qu'elle est vraie lorsque l'on compose à gauche de chaque membre par l'application $d_s^{\mathbf{L}}$ (où s parcourt l'ensemble des éléments semis-simples de $\mathbf{L}^F$).

Lemme 11.2.1. *On suppose que la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}')$ a lieu pour tout triplet $(\mathbf{G}', \mathbf{L}', \mathbf{M}') \in \mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{M})$. Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{L}^F$, n'appartenant pas au centre de $\mathbf{G}$. Alors*

$$d_s^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\operatorname{ad} x)_*.$$

Preuve - Cette preuve ne présente pas de difficultés : c'est simplement une application systématique des formules 11.1.1 et 11.1.2. En voici le détail.

Puisque s n'est pas central dans $\mathbf{G}$, la formule de Mackey $\mathcal{M}(C^\circ_{\mathbf{G}}(s), C^\circ_{\mathbf{L}}(s), C^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s))$ est vraie pour tout $g \in \mathbf{G}^F$ tel que $s \in {}^g\mathbf{M}$ par hypothèse de récurrence. Par suite, il résulte des formules 11.1.1 et 11.1.2 que :

$$\begin{aligned}
d_s^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} &= \frac{1}{|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|} \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} |C^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)^F| \ {}^*R_{C^\circ_{\mathbf{L}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)} \circ R_{C^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)} \circ d_s^{{}^g\mathbf{M}} \circ (\operatorname{ad} g)_* \\
&= \frac{1}{|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|} \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} \sum_{h \in \mathcal{S}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(C^\circ_{\mathbf{L}}(s), C^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s))^F} \frac{|C^\circ_{\mathbf{L}}(s)^F \cap {}^hC^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)^F|}{|C^\circ_{\mathbf{L}}(s)^F|} \\
&\qquad R_{C^\circ_{\mathbf{L}}(s) \cap {}^hC^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{L}}(s)} \circ {}^*R_{C^\circ_{\mathbf{L}}(s) \cap {}^hC^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)}^{{}^hC^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s)} \circ (\operatorname{ad} h)_* \circ d_s^{{}^g\mathbf{M}} \circ (\operatorname{ad} g)_* \\
&= \sum_{\substack{g \in \mathbf{G}^F \\ s \in {}^g\mathbf{M}}} \sum_{h \in \mathcal{S}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(s)}(C^\circ_{\mathbf{L}}(s), C^\circ_{{}^g\mathbf{M}}(s))^F} \frac{|C^\circ_{\mathbf{L} \cap {}^{hg}\mathbf{M}}(s)^F|}{|\mathbf{M}^F|.|C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F|.|C^\circ_{\mathbf{L}}(s)^F|} \\
&\qquad R_{C^\circ_{\mathbf{L} \cap {}^{hg}\mathbf{M}}(s)}^{C^\circ_{\mathbf{L}}(s)} \circ {}^*R_{C^\circ_{\mathbf{L} \cap {}^{hg}\mathbf{M}}(s)}^{C^\circ_{{}^{hg}\mathbf{M}}(s)} \circ d_s^{{}^{hg}\mathbf{M}} \circ (\operatorname{ad} hg)_*
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, x)_* \\
= &\sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \frac{|\mathbf{L}^F \cap {}^x\mathbf{M}^F|}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|}\, d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, x)_* \\
= &\sum_{x \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F} \frac{1}{|\mathbf{L}^F|.|\mathbf{M}^F|.|C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F|} \sum_{\substack{l \in \mathbf{L}^F \\ s \in \mathbf{L}\cap {}^{lx}\mathbf{M}}} |C_{\mathbf{L}\cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)^F| \\
&R_{C_{\mathbf{L}\cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)} \circ {}^*R_{C_{\mathbf{L}\cap {}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{{}^{lx}\mathbf{M}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^{lx}\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, lx)_*
\end{aligned}$$

Dans ce dernier membre, la sommation sur les éléments $l \in \mathbf{L}^F$ est redondante : on a donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F/\mathbf{M}^F} d_s^{\mathbf{L}} \circ R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\cap {}^x\mathbf{M}}^{{}^x\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, x)_* \\
= &\sum_{\substack{y \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F \\ s \in \mathbf{L}\cap {}^y\mathbf{M}}} \frac{|C_{\mathbf{L}\cap {}^y\mathbf{M}}^\circ(s)^F|}{|\mathbf{M}^F|.|C_{\mathbf{L}}^\circ(s)^F|} \\
&R_{C_{\mathbf{L}\cap {}^y\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{\mathbf{L}}^\circ(s)} \circ {}^*R_{C_{\mathbf{L}\cap {}^y\mathbf{M}}^\circ(s)}^{C_{{}^y\mathbf{M}}^\circ(s)} \circ d_s^{{}^y\mathbf{M}} \circ (\mathrm{ad}\, y)_*
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des $y \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F$ tels que $s \in \mathbf{L} \cap {}^y\mathbf{M}$. On note par ailleurs $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(g,h) \in \mathbf{G}^F \times C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F$ tels que $s \in {}^g\mathbf{M}$ et $h \in \mathcal{S}_{C_{\mathbf{G}}^\circ(s)}(C_{\mathbf{L}}^\circ(s), C_{{}^g\mathbf{M}}^\circ(s))^F$. Le lemme 11.2.1 résulte du fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (g,h) & \longmapsto & hg \end{array}$$

est surjective et a toutes ses fibres de cardinal $|C_{\mathbf{G}}^\circ(s)^F|$. ■

11.3. Formule de Mackey pour q grand. Si Φ est un système de racines, on dira que p est **presque bon** pour Φ si, pour toute composante irréductible Φ_0 de Φ de type exceptionnel, p ne divise aucun des coefficients de la plus grande racine (relativement à une base arbitraire) de Φ_0 (c'est-à-dire si p est **bon** pour toute composante irréductible de Φ de type exceptionnel). On dira que p est **presque bon** pour $\mathbf{G}$ s'il est presque bon pour son système de racines (relatif à un tore maximal quelconque).

Théorème 11.3.1. *On suppose p presque bon pour $\mathbf{G}$. Il existe une constante q_0 dépendant seulement de la donnée radicielle associée à $\mathbf{G}$ telle que la formule de Mackey $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M})$ a lieu si $q > q_0$.*

Preuve - Si $z \in \mathbf{Z}^F$, alors la formule 11.1.1 s'écrit

(11.3.2) $$d_z^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ d_z^{\mathbf{L}}.$$

En raisonnant par récurrence sur $\dim \mathbf{G} + \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{M}$, le lemme 11.2.1 montre donc qu'il suffit de montrer la formule de Mackey pour les fonctions à support dans $\mathbf{Z}^F.\mathbf{G}_u^F$ et, puisque la translation par un élément de $\mathbf{Z}^F$ est inoffensive, il suffit de la montrer pour les fonctions à support unipotent. D'autre part, compte tenu du théorème 9.3.1, il suffit de montrer la formule de Mackey $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{L},\mathbf{M},\lambda,\mu)$ lorsque λ et μ sont des fonctions absolument cuspidales à support dans $\mathbf{L}_u^F$ et $\mathbf{M}_u^F$ respectivement.

Soient donc λ et μ deux fonctions absolument cuspidales à support unipotent de $\mathbf{L}^F$ et $\mathbf{M}^F$ respectivement. Compte tenu du théorème 1.14, (b), de [L6], on est ramené au cas où λ et μ sont des restrictions aux éléments unipotents de fonctions caractéristiques de systèmes locaux cuspidaux F-stables sur des classe unipotentes de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ respectivement.

Soit C_1 une classe unipotente F-stable de $\mathbf{L}$, et soit $\mathcal{E}_1$ un système local $\mathbf{L}$-équivariant F-stable sur C_1. On choisit un isomorphisme $\varphi_1 : F^*\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$. On suppose donc que $\lambda = \chi_{\mathcal{E}_1,\varphi_1}$ où $\chi_{\mathcal{E}_1,\varphi_1}$ est la fonction sur $\mathbf{L}_u^F$ définie par

$$\chi_{\mathcal{E}_1,\varphi_1}(u) = \begin{cases} \mathrm{Tr}((\varphi_1)_u,(\mathcal{E}_1)_u) & \text{si } u \in C_1^F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, on suppose que $\bar{\mu} = \chi_{\mathcal{E}_2,\varphi_2}$ où $\mathcal{E}_2$ est un système local cuspidal F-stable sur une classe de conjugaison unipotente F-stable C_2 de $\mathbf{M}$ et $\varphi_2 : F^*\mathcal{E}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2$ est un isomorphisme.

Un élément g de $\mathbf{G}^F$ est tel que ${}^g\mathbf{M} = \mathbf{L}$ et $\langle \lambda, {}^g\bar{\mu}\rangle \neq 0$ si et seulement si ${}^gC_2 = C_1$ et $(\mathrm{ad}\, g)^*\mathcal{E}_2 \simeq \mathcal{E}_1^\vee$, où $\mathcal{E}_1^\vee$ désigne le système local dual de $\mathcal{E}_1$. D'autre part, s'il n'existe pas de tels $g \in \mathbf{G}^F$, alors le membre de gauche de la formule $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{L},\lambda,\mathbf{M},\bar{\mu})$ est nul d'après le (a) du théorème 1.14 de [L6] et d'après le corollaire 9.11 de [L4], partie II. La formule $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{L},\lambda,\mathbf{M},\bar{\mu})$ est donc vérifiée dans ce cas-là.

On peut donc supposer, et ce sera fait par la suite, que $\mathbf{L} = \mathbf{M}$, $C_1 = C_2$, $\mathcal{E}_1^\vee = \mathcal{E}_2$ et $\varphi_1^\vee = \varphi_2$. D'après [L3], théorème 9.2, on a, pour tout $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$,

$${}^nC_1 = C_1, \qquad (\mathrm{ad}\, n)^*\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_1.$$

D'après [L4], partie II, lemme 9.8 et les formules 9.10.1 et 9.10.2, on a, pour tout $n \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$,

$$\langle \lambda, {}^n\bar{\mu}\rangle = \frac{q^d}{|\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ F}|}$$

où $d = \dim C_1 + \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ - \dim \mathbf{L}$. D'autre part, d'après le corollaire 9.11 de [L4], partie II, et le théorème 1.14, (a) de [L6], on a :

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\bar{\mu}\rangle = \frac{|N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})/\mathbf{L}^F|}{|\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ F}|} q^d.$$

Cela montre la formule $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{L},\lambda,\mathbf{L},\bar{\mu})$. ∎

CHAPITRE III

Caractères réguliers

On montrera plus tard que tout caractère du groupe spécial linéaire est combinaison linéaire, à coefficient dans $\mathbb{Z}$, d'induits de Harish-Chandra de caractères réguliers (cf théorème 15.5.1). Les caractères réguliers vont donc jouer un rôle central dans l'étude du groupe spécial linéaire. Cette partie est consacrée à leur étude dans un groupe réductif quelconque.

Pour étudier les caractères d'un groupe réductif à centre non connexe, il est commode de le plonger dans un groupe réductif de même type à centre connexe, pour pouvoir ensuite utiliser la théorie de Clifford. Les sections 6 et 7 traitent des généralités sur les foncteurs d'induction de Lusztig et plus particulièrement des foncteurs de Harish-Chandra dans cette situation. L'étude des caractères réguliers commence dans la section 12 où on rappelle des résultats connus et où on établit une formule donnant le produit scalaire de deux induits (au sens de Lusztig) de caractères réguliers (cf théorème 12.5.1). Le dernier résultat important de cette partie est le paramétrage des séries de Harish-Chandra associées à des caractères réguliers cuspidaux.

12. Définition

Le but de cette section est de rappeler les résultats classiques sur les caractères réguliers (cf, par exemple, [A] et [DLM1]) ainsi que d'établir une formule donnant le produit scalaire entre deux induits (au sens de Lusztig) de caractères réguliers de sous-groupes réguliers F-stables de $\mathbf{G}$ en terme du groupe de Weyl (c'est le théorème 12.5.1).

12.1. Définition des caractères réguliers. On définit une fonction centrale $\chi_s^{\mathbf{G}} = \chi_s$ sur $\mathbf{G}^F$ par la formule suivante :

(12.1.1)
$$\chi_s = \frac{1}{|W^\circ(s)|} \sum_{w \in W^\circ(s)} \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{T}_w^*} R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s).$$

On remarque que le membre de droite de la formule 12.1.1 ne dépend que de la classe de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison de s et non des différents choix faits précédemment. On définit de la même manière $\chi_{\tilde{s}} = \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$. Il résulte immédiatement de la formule 6.2.1 que

(12.1.2)
$$\chi_s = \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \chi_{\tilde{s}}.$$

Théorème 12.1.3 (Deligne-Lusztig). *La fonction centrale $\chi_{\tilde{s}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ est un caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$. Par suite, χ_s est un caractère de $\mathbf{G}^F$ (non nécessairement irréductible).*

PREUVE - cf [DL], théorème 10.7. L'hypothèse de connexité du centre de $\tilde{\mathbf{G}}$ est nécessaire pour montrer l'irréductibilité de $\chi_{\tilde{s}}$. Par contre, χ_s peut ne pas être irréductible. ■

REMARQUES - (1) Le caractère irréductible $\chi_{\tilde{s}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ appartient à $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$, donc les composantes irréductibles de χ_s appartiennent à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

(2) On déduit immédiatement de 6.2.3 la relation

(12.1.4) $$\chi_{\tilde{s}} \otimes \hat{z} = \chi_{\tilde{s}z}$$

pour tout $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$ (pour la définition de $\hat{z}$, cf 6.2.2).

Définition 12.1.5. *On appelle caractères* ***réguliers*** *de $\mathbf{G}^F$ les composantes irréductibles des caractères χ_s, où $[s]$ parcourt l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$.*

12.2. Caractères de Gel'fand-Graev. On fixe une fois pour toutes un caractère régulier ψ de $\mathbf{U}_0^F$ (pour la définition d'un caractère régulier de $\mathbf{U}_0^F$, cf, par exemple, [DM1], définition 14.27). On appelle alors **caractère de Gel'fand-Graev** de $\mathbf{G}^F$ (associé à ψ) le caractère :

$$\Gamma_\psi^{\mathbf{G}} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi.$$

Le caractère $\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}$ dépend en fait seulement de l'orbite du caractère ψ sous l'action de $\mathbf{T}_0^F$.

Théorème 12.2.1. *Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe régulier F-stable $\mathbf{G}$-déployé. On suppose que $\mathbf{L}$ contient le tore maximal $\mathbf{T}_0$. Alors $\mathbf{U}_0 \cap \mathbf{L}$ est un sous-groupe unipotent F-stable maximal de $\mathbf{L}$, et $\psi_{\mathbf{L}} = \operatorname{Res}_{\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F}^{\mathbf{U}_0^F} \psi$ est un caractère régulier de $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}^F$ et de plus :*

$$^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}) = \Gamma_{\psi_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}.$$

PREUVE - cf [DM1], proposition 14.32. ■

NOTATIONS : Pour tout sous-groupe régulier F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$, on choisira un sous-groupe unipotent maximal F-stable que l'on notera $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}$.

Récemment, F. Digne, G. Lehrer et J. Michel ont généralisé le théorème 12.2.1 au cas où $\mathbf{L}$ n'est pas forcément $\mathbf{G}$-déployé. Cependant, il ont besoin de certaines hypothèses sur p et q. Ils conjecturent qu'en général

Conjecture (GG) : *Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$, alors il existe un caractère régulier $\psi_{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}^F$ tel que*

(12.2.2) $$^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \Gamma_\psi^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \Gamma_{\psi_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}.$$

Lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe, **le** caractère de Gel'fand-Graev est combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig et, grâce à la formule de Mackey pour un tore maximal et un sous-groupe régulier (cf proposition 8.2.2, (ii)), on peut montrer que la conjecture **(GG)** est vraie (cf [DLM1], proposition 5.4).

Théorème 12.2.3 (Digne-Lehrer-Michel). *Il existe deux constantes p_0 et q_0 dépendant seulement de la donnée radicielle associée à $\mathbf{G}$ telles que, si $p > p_0$ et $q > q_0$ et si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$, alors il existe un caractère régulier $\psi_{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}^F$ tel que :*

$$^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\Gamma_{\psi_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}.$$

PREUVE - cf [DLM2]. ∎

NOTATIONS : On posera par la suite $\Gamma^{\mathbf{G}} = \Gamma_\psi^{\mathbf{G}}$ et, si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$, on posera $\Gamma^{\mathbf{L}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}{}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\ \Gamma^{\mathbf{G}}$.

Théorème 12.2.4 (Deligne-Lusztig). $\langle \chi_s, \Gamma^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1$.

PREUVE - Deligne et Lusztig ont montré (cf [DL], théorème 10.7) que ce résultat est vrai si le centre de $\mathbf{G}$ est connexe. Ici, il sera donc vrai pour $\tilde{\mathbf{G}}$. Le résultat est alors une simple application de la loi de réciprocité de Frobenius, en remarquant que :

$$\Gamma^{\tilde{\mathbf{G}}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} \Gamma^{\mathbf{G}}. \ \blacksquare$$

12.3. Décomposition de χ_s. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} W(s) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, i^* \\ w & \longmapsto & w\tilde{s}w^{-1}\tilde{s}^{-1}. \end{array}$$

C'est un homomorphisme de groupes (car $\mathrm{Ker}\, i^*$ est central), ne dépendant pas du choix de $\tilde{s}$ comme antécédent de s dans $\tilde{\mathbf{G}}$, et commutant avec l'action du morphisme de Frobenius. Le noyau de cet homomorphisme est $W(\tilde{s})$, et donc $A(s)$ s'identifie avec l'image de cet homomorphisme, c'est-à-dire

Lemme 12.3.1. *L'application $A(s) \to \mathrm{Ker}\, i^*$, $\alpha \longrightarrow \alpha\tilde{s}\alpha^{-1}\tilde{s}^{-1}$ induit un isomorphisme de groupes $A(s) \simeq \{z \in \mathrm{Ker}\, i^* \mid \tilde{s} \text{ et } \tilde{s}z \text{ sont conjugués dans } \tilde{\mathbf{G}}^*\}$. Cet isomorphisme commute avec l'action du morphisme de Frobenius.*

Soit A le groupe $\mathrm{Ker}\, i^* \cap D(\tilde{\mathbf{G}}^*)$ où $D(\tilde{\mathbf{G}}^*)$ désigne le groupe dérivé de $\tilde{\mathbf{G}}^*$: A est un groupe fini, isomorphe à la p'-partie du groupe fondamental de $D(\mathbf{G}^*)$. D'après le lemme 12.3.1, $A(s)$ peut être vu comme un sous-groupe de A.

Il est facile de vérifier que A^{F^*} est alors isomorphe au groupes des caractères linéaires de $(\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)$ qui s'annulent sur $\tilde{\mathbf{Z}}^F$, c'est-à-dire au groupe $(\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{Z}}^F)^\wedge$. On note alors $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ contenant $\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{Z}}^F$ tel que $A(s)^{F^*} \simeq (\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s))^\wedge$. La proposition suivante donne une description de la décomposition du caractère χ_s de $\mathbf{G}^F$.

Proposition 12.3.2 (Asai). (i) *Le caractère χ_s est sans multiplicité.*

(ii) *Soit $z \in (\mathrm{Ker}\, i^*)^{F^*}$. Alors $\chi_{\tilde{s}} = \chi_{\tilde{s}} \otimes \hat{z}$ si et seulement si z appartient à $A(s)^{F^*}$.*

(iii) *Le groupe $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ est le stabilisateur, dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$, d'une composante irréductible de χ_s (donc de toutes les composantes). A travers l'isomorphisme $(A(s)^{F^*})^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$, le groupe $(A(s)^{F^*})^\wedge$ agit de manière simplement transitive sur les composantes irréductibles de χ_s.*

PREUVE - D'après le théorème 12.2.4, χ_s contient une composante irréductible de multiplicité égale à 1. Puisque $\tilde{\mathbf{G}}^F$ agit transitivement sur les composantes irréductibles de χ_s, ce dernier est sans multiplicité. Cela montre (i).

Le (ii) résulte immédiatement de l'équation 12.1.4, et du lemme 12.3.1. Quant au (iii), il résulte immédiatement du (ii) par application de la théorie de Clifford. ■

On notera par la suite $\chi_{s,1} = \chi_{s,1}^{\mathbf{G}}$ l'unique composante irréductible commune à χ_s et $\Gamma^{\mathbf{G}}$. Pour tout $\xi \in (A(s)^{F^*})^\wedge$, on notera g_ξ un représentant, dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$, de l'élément de $\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$ associé à ξ par l'isomorphisme décrit au (ii) de la proposition 12.3.2. On pose alors :

$$\chi_{s,\xi} = \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \chi_{s,1} \circ \operatorname{ad} g_\xi^{-1}.$$

On déduit de la proposition 12.3.2 que :

Proposition 12.3.3 (Asai). *Les caractères irréductibles $\chi_{s,\xi}$, où $\xi \in (A(s)^{F^*})^\wedge$, sont deux à deux distincts, et on a :*

$$\chi_s = \sum_{\xi \in (A(s)^{F^*})^\wedge} \chi_{s,\xi}.$$

REMARQUE - Supposons que l'on ait choisi un autre caractère régulier ψ' de $\mathbf{U}^F$. Alors, d'après [DLM1], 2.4.10 et lemme 1.3, il existe un élément $t \in \tilde{\mathbf{T}}_0^F$ tel que $\psi' = {}^t\psi$. On a alors $\Gamma_{\psi'}^{\mathbf{G}} = {}^t\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}$ et donc, pour tout caractère linéaire ξ de $A(s)^{F^*}$,

$$\chi_{s,\xi}^{\psi'} = {}^t\chi_{s,\xi}^{\psi},$$

où $\chi_{s,\xi}^{\psi}$ (respectivement $\chi_{s,\xi}^{\psi'}$) désigne la composante irréductible associée à ξ en utilisant le caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}$ (respectivement $\Gamma_{\psi'}^{\mathbf{G}}$) et en faisant la construction précédente. Par conséquent, si on note ξ_t le caractère linéaire de $A(s)^{F^*}$ associé à la classe de t dans $\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$, on a :

(12.3.4)
$$\chi_{s,\xi}^{\psi'} = \chi_{s,\xi\xi_t}^{\psi}.$$

12.4. Restriction de Lusztig de caractères réguliers. Le caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma^{\mathbf{G}}$ est la somme de tous les $\chi_{s,1}$, où s parcourt un ensemble de représentants des classes de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$ (cf, par exemple, [DLM1], corollaire 3.14). On en déduit alors la :

Proposition 12.4.1 (Digne-Lehrer-Michel). ***On suppose que la conjecture* (GG) *a lieu*.** *Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$ dont un dual $\mathbf{L}^*$ contient s. On note $\mathcal{O}$ un ensemble de représentants des classes de $\mathbf{L}^{*F^*}$-conjugaison contenues dans la classe de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison de s. Alors :*

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}^{\mathbf{G}}) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} \sum_{t \in \mathcal{O}} \chi_{t,1}^{\mathbf{L}}.$$

PREUVE - cf [DLM1], 6.2. ■

12.5. Produits scalaires d'induits de caractères réguliers. Soient $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ deux sous-groupes réguliers F-stables de $\mathbf{G}$ dont les duaux respectifs $\mathbf{L}^*$ et $\mathbf{M}^*$ dans $\mathbf{G}^*$ contiennent s. On se fixe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}^*$ de $\mathbf{G}^*$ dont $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi. Alors $C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s)$ est un sous-groupe parabolique de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ et $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi de $C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s)$ (cf [DM2], proposition 1.11). On notera $\mathbf{V}^*(s)$ le radical unipotent de $C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s)$. Soit $\mathbf{T}^*_\mathbf{L}$ un tore maximal F^*-stable maximalement déployé de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$, et soit $\mathbf{B}^*_\mathbf{L}(s)$ un sous-groupe de Borel F^*-stable de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ contenant $\mathbf{T}^*_\mathbf{L}$. Alors $\mathbf{B}^*_\mathbf{L}(s)\mathbf{V}^*(s)$ est un sous-groupe de Borel de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. Il existe alors un élément $\gamma_\mathbf{L}$ de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que

$$(\mathbf{T}^*_\mathbf{L}, \mathbf{B}^*_\mathbf{L}(s)\mathbf{V}^*(s)) = {}^{\gamma_\mathbf{L}}(\mathbf{T}^*_1, \mathbf{B}^*(s)).$$

On notera $W_\mathbf{L}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ (respectivement $C_{\mathbf{M}^*}(s)$) relativement à $\mathbf{T}^*_\mathbf{L}$. On définit de même $W_\mathbf{L}(\tilde{s})$. Alors $\gamma_\mathbf{L}^{-1}F^*(\gamma_\mathbf{L})$ appartient au normalisateur dans $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ de $\mathbf{T}^*_1$. On note $w_\mathbf{L}$ sa classe dans $W(\tilde{s})$. Alors $W_\mathbf{L}(s)$ s'identifie (via $\operatorname{ad}\gamma_\mathbf{L}$) à un sous-groupe de $W(s)$, le morphisme de Frobenius agissant par $w_\mathbf{L}F^*$.

On définit $\mathbf{T}^*_\mathbf{M}$, $\gamma_\mathbf{M}$ et $w_\mathbf{M}$ de la même manière que $\mathbf{T}^*_\mathbf{L}$, $\gamma_\mathbf{L}$ et $w_\mathbf{L}$ respectivement en remplaçant $\mathbf{L}$ par $\mathbf{M}$.

On notera $W'(s)$ le groupe $W(\tilde{s}) \rtimes A(s)^{F^*}$. On définit de même des groupes $W'_\mathbf{L}(s)$ et $W'_\mathbf{M}(s)$. Via $\operatorname{ad}\gamma_\mathbf{L}$ et $\operatorname{ad}\gamma_\mathbf{M}$ respectivement, ce sont des sous-groupes de $W'(s)$. Si ξ est un caractère linéaire de $A(s)^{F^*}$, on peut voir ξ comme un caractère linéaire de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ ou de $W'(s)$.

Théorème 12.5.1. ***On suppose les conjectures*** $(\mathfrak{M})$ ***et*** (GG) ***vraies****. Soient* $\xi_\mathbf{L}$ *et* $\xi_\mathbf{M}$ *deux caractères linéaires de* $A_\mathbf{L}(s)^{F^*}$ *et* $A_\mathbf{M}(s)^{F^*}$ *respectivement. Alors :*

$$\langle R^\mathbf{G}_\mathbf{L}(\chi^\mathbf{L}_{s,\xi_\mathbf{L}}), R^\mathbf{G}_\mathbf{M}(\chi^\mathbf{M}_{s,\xi_\mathbf{M}})\rangle = \varepsilon_\mathbf{L}\varepsilon_\mathbf{M} \sum_{\substack{x\in W'_\mathbf{L}(s)\backslash W'(s)/W'_\mathbf{M}(s)\\ W_\mathbf{L}(\tilde{s})w_\mathbf{L}\cap xW_\mathbf{M}(\tilde{s})w_\mathbf{M}F^*(x)^{-1}\neq\varnothing}} \langle \xi_\mathbf{L}, {}^x\xi_\mathbf{M}\rangle_{W'_\mathbf{L}(s)\cap{}^xW'_\mathbf{M}(s)}.$$

Preuve - Quitte à conjuguer les caractères $\chi^\mathbf{L}_{s,\xi_\mathbf{L}}$ et $\chi^\mathbf{M}_{s,\xi_\mathbf{M}}$ par des éléments de $\tilde{\mathbf{L}}^F$ et $\tilde{\mathbf{M}}^F$ respectivement, on peut supposer que $\xi_\mathbf{M} = 1$, ce qui sera fait par la suite. On notera $\xi = \xi_\mathbf{L}$.

L'ensemble $\mathbf{L}\backslash\mathcal{S}_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathbf{M})/\mathbf{M}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbf{L}^*\backslash\mathcal{S}_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}^*,\mathbf{M}^*)/\mathbf{M}^*$, et cette bijection commute avec l'action des morphismes de Frobenius. On posera par la suite $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}^*,\mathbf{M}^*)$. Si $g \in \mathcal{S}^*$, on notera encore ${}^g\mathbf{M}$ un sous-groupe régulier de $\mathbf{G}$ dual de ${}^g\mathbf{M}^*$. On notera d'autre part $[\mathcal{S}^{*F^*}]$ l'ensemble des doubles classes $\mathbf{L}^{*F^*}\backslash\mathcal{S}^{*F^*}/\mathbf{M}^{*F^*}$.

On a, d'après la formule de Mackey :

(12.5.2)
$$\langle R^\mathbf{G}_\mathbf{L}(\chi^\mathbf{L}_{s,\xi}), R^\mathbf{G}_\mathbf{M}(\chi^\mathbf{M}_{s,1})\rangle = \sum_{g\in[\mathcal{S}^{*F^*}]} \langle {}^*R^\mathbf{L}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^\mathbf{L}_{s,\xi}), {}^*R^{{}^g\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{{}^g\mathbf{M}}_{{}^gs,1})\rangle.$$

On notera par la suite $[\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]$ un ensemble de représentants des doubles classes g appartenant à $\mathbf{L}^{*F^*}\backslash\mathcal{S}(\mathbf{L}^*,\mathbf{M}^*)^{F^*}/\mathbf{M}^{*F^*}$ telles qu'il existe $t \in \mathbf{L}^{*F^*}\cap{}^g\mathbf{M}^{*F^*}$ conjugué à s dans $\mathbf{L}^{*F^*}$ et conjugué à ${}^gs$ dans ${}^g\mathbf{M}^{*F^*}$.

Soit $g \in [\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]$. D'après la proposition 12.4.1, il existe alors un élément $t \in \mathbf{L}^{*F^*}\cap{}^g\mathbf{M}^{*F^*}$, un élément $l \in \mathbf{L}^{*F^*}$ et un élément $m \in \mathbf{M}^{*F^*}$ tels que $t = {}^ls = {}^g({}^ms)$. Quitte à remplacer g par $l^{-1}gm$, on peut supposer que $g \in C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, ce qui justifie la notation $[\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]$. On supposera donc par la suite que tous les éléments de $[\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]$ centralisent s.

On notera par la suite $\mathcal{V}$ un ensemble de couples (g,t) où $g \in [\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]$ et t parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison sous $\mathbf{L}^{*F^*}\cap{}^g\mathbf{M}^{*F^*}$ contenues dans la classe de s sous $\mathbf{L}^{*F^*}$ et dans celle de ${}^g s = s$ sous ${}^g\mathbf{M}^{*F^*}$. On a alors, d'après la proposition 12.4.1,

$$\sum_{g\in[\mathcal{S}^{*F^*}\cap C_{\mathbf{G}^*}(s)]} \langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), {}^*R^{{}^g\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{{}^g\mathbf{M}}_{s,1})\rangle = \sum_{(g,t)\in\mathcal{V}} \varepsilon_{\mathbf{M}}\varepsilon_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}_{t,1}\rangle,$$

car, si t est un élément de $\mathbf{L}^{*F^*}\cap{}^g\mathbf{M}^{*F^*}$ conjugué à ${}^g s = s$ sous ${}^g\mathbf{M}^{*F^*}$ mais non conjugué à s sous $\mathbf{L}^{*F^*}$, alors

$$\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}_{t,1}\rangle = 0.$$

On notera $\mathcal{S}^{*F^*}(s)$ l'ensemble des $g\in C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tels que $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)\cap{}^gC^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ contienne un tore maximal, et $[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$ l'ensemble des doubles classes $C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}\backslash\mathcal{S}^{*F^*}(s)/C_{\mathbf{M}^*}(s)^{F^*}$.

Soit $(g,t)\in\mathcal{V}$. On trouve $l\in\mathbf{L}^{*F^*}$ et $m\in\mathbf{M}^{*F^*}$ tels que $t={}^l s$ et $t={}^g({}^m s)$. Alors $g'=l^{-1}gm$ appartient à $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et même à $\mathcal{S}^{*F^*}(s)$ car s appartient à $\mathbf{L}^*\cap{}^{g'}\mathbf{M}^*$. On note $\varphi(g,t)$ la classe de $l^{-1}gm$ dans $[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$.

Lemme 12.5.3. *L'application $\varphi:\mathcal{V}\to[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$, $(g,t)\mapsto\varphi(g,t)$ est bien définie et est bijective.*

Preuve - Pour montrer que φ est bien définie, il faut montrer que $\varphi(g,t)$ défini avec les notations ci-dessus ne dépend pas du choix de l et m, ce qui est clair.

On va maintenant montrer l'injectivité de φ. Soient (g,t) et (g',t') dans $\mathcal{V}$ tels que $\varphi(g,t)=\varphi(g',t')$. Alors les doubles classes $\mathbf{L}^{*F^*}g\mathbf{M}^{*F^*}$ et $\mathbf{L}^{*F^*}g'\mathbf{M}^{*F^*}$ sont égales, donc $g=g'$. Soient l et l' dans $\mathbf{L}^{*F^*}$ et m et m' dans $\mathbf{M}^{*F^*}$ tels que

$$t={}^l s={}^g({}^m s),$$

$$t'={}^{l'} s={}^g({}^{m'} s).$$

Puisque $\varphi(g,t)=\varphi(g',t')$, la double classe de $l^{-1}gm$ dans $[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$ et celle de $l'^{-1}gm'$ coïncident, et donc, quitte à changer l' et m', on peut supposer que $l^{-1}gm=l'^{-1}gm'$. On pose $h=l'l^{-1}={}^g(m'm^{-1})$. Alors $h\in\mathbf{L}^{*F^*}\cap{}^g\mathbf{M}^{*F^*}$ et $t'={}^h t$, donc $t'=t$.

On va maintenant montrer la surjectivité de φ. Soit $g'\in\mathcal{S}^{*F^*}(s)$. La double classe $\mathbf{L}^{*F^*}g'\mathbf{M}^{*F^*}$ vérifie la condition des doubles classes de $\mathcal{S}(s)$, donc il existe $g\in$, $l\in\mathbf{L}^{*F^*}$ et $m\in\mathbf{M}^{*F^*}$ tels que $g'=l^{-1}gm$. On pose alors $t={}^l s={}^g({}^m s)$. Il est alors clair que $(g,t)\in\mathcal{V}$, quitte à changer t, et que $\varphi(g,t)=C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}g'C_{\mathbf{M}^*}(s)^{F^*}$. □

D'autre part, si $(g,t)\in\mathcal{V}$ et si $g'\in\mathcal{S}^{*F^*}(s)$ sont tels que $\varphi(g,t)$ soit égal à la double classe de g' dans $[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$, alors :

$$\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}_{t,1}\rangle = \langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^{g'}\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L}\cap{}^{g'}\mathbf{M}}_{s,1}\rangle.$$

Par suite,

(12.5.4)
$$\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{M}}_{s,1})\rangle = \sum_{g\in[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]}\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L}\cap{}^g\mathbf{M}}_{s,1}\rangle.$$

On notera $\mathcal{U}$ l'ensemble des doubles classes $x\in W'_{\mathbf{L}}(s)\backslash W'(s)/W'_{\mathbf{M}}(s)$ telles que

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\cap xW_{\mathbf{M}}(\tilde{s})w_{\mathbf{M}}F^*(x)^{-1}\neq\varnothing.$$

Soit $g\in[\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$. Soit $\mathbf{T}^*$ un tore maximal F^*-stable maximalement déployé de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)\cap{}^gC^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$. On trouve $l\in C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $m\in C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ tels que $\mathbf{T}^*={}^l\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}={}^g({}^m\mathbf{T}^*_{\mathbf{M}})$. On pose

$n = \gamma_{\mathbf{L}}^{-1} l^{-1} g m \gamma_{\mathbf{M}}$. Alors n normalise $\mathbf{T}_1^*$ et appartient à $C_{\mathbf{G}^*}(s)$. On note x l'image de n dans $W(s)$: en fait $x \in W'(s)$. On note $\varphi'(g)$ la double classe de x dans $W'_{\mathbf{L}}(s)\backslash W'(s)/W'_{\mathbf{M}}(s)$.

Lemme 12.5.5. *L'application* $\varphi' : [\mathcal{S}^{*F^*}(s)] \to \mathcal{U}$ *est bien définie et est bijective.*

Preuve - Soit $g \in [\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$. On reprend les notations précédant le lemme. Le fait que $\varphi'(g)$ ne dépend pas du choix de $\mathbf{T}^*$, l et m est évident. On va montrer que $\varphi'(g) \in \mathcal{U}$. On a $g = l\gamma_{\mathbf{L}} n \gamma_{\mathbf{M}}^{-1} m^{-1}$, et $F^*(g) = g$. Par suite, la classe de

$$\gamma_{\mathbf{L}}^{-1} l^{-1} F^*(l) \gamma_{\mathbf{L}}.\gamma_{\mathbf{L}}^{-1} F^*(\gamma_{\mathbf{L}}) = n \gamma_{\mathbf{M}}^{-1} m^{-1} F^*(m) \gamma_{\mathbf{M}}.\gamma_{\mathbf{M}}^{-1} F^*(\gamma_{\mathbf{M}}) F^*(n)^{-1}$$

dans $W(\tilde{s})$ appartient à $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}) w_{\mathbf{L}} \cap x W_{\mathbf{M}}(\tilde{s}) w_{\mathbf{M}} F^*(x)^{-1}$, car $\gamma_{\mathbf{L}}^{-1} l^{-1} F^*(l) \gamma_{\mathbf{L}}$ appartient à $W^\circ_{\mathbf{L}}(s)$ et $\gamma_{\mathbf{M}}^{-1} m^{-1} F^*(m) \gamma_{\mathbf{M}}$ appartient à $W^\circ_{\mathbf{M}}(s)$.

Montrons que φ' est surjective. Soit $x \in W'(s)$ tel que

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}) w_{\mathbf{L}} \cap x W_{\mathbf{M}}(\tilde{s}) w_{\mathbf{M}} F^*(x)^{-1} \neq \varnothing.$$

On trouve $w \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ et $w' \in W_{\mathbf{M}}(\tilde{s})$ tels que :

$$\gamma_{\mathbf{L}}^{-1} w \gamma_{\mathbf{L}} w_{\mathbf{L}} = x \gamma_{\mathbf{M}}^{-1} w' \gamma_{\mathbf{M}} w_{\mathbf{M}} F^*(x)^{-1}.$$

On note n un représentant de x dans $C_{\mathbf{G}^*}(s)$. On trouve l et m dans $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ respectivement tels que la classe de $l^{-1}F^*(l)$ dans $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ soit égale à w et celle de $m^{-1}F^*(m)$ dans $W_{\mathbf{M}}(\tilde{s})$ soit égale à w'. On pose $g = l\gamma_{\mathbf{L}} n m^{-1} \gamma_{\mathbf{M}}^{-1}$. Alors $F^*(g) = g$ et $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^g C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ contient le tore maximal ${}^l\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$.

Montrons pour terminer l'injectivité de φ'. Soient g et g' dans $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tels que $\varphi'(g) = \varphi'(g')$. Soit $\mathbf{T}^*$ (respectivement $\mathbf{T}'^*$) un tore maximal F^*-stable maximalement déployé de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^g C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ (respectivement $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^{g'} C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$). Soient l, l' dans $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et m, m' dans $C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ tels que

$$\mathbf{T}^* = {}^l\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}} = {}^g({}^m\mathbf{T}^*_{\mathbf{M}}),$$
$$\mathbf{T}'^* = {}^{l'}\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}} = {}^{g'}({}^{m'}\mathbf{T}^*_{\mathbf{M}}).$$

Puisque $\varphi'(g) = \varphi'(g')$, il existe λ dans le normalisateur de $\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$ dans $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ dont la classe appartient à $W'_{\mathbf{L}}(s)$ et μ dans le normalisateur de $\mathbf{T}^*_{\mathbf{M}}$ dans $C_{\mathbf{M}^*}(s)$ dont la classe appartient à $W'_{\mathbf{M}}(s)$ tels que

$$\gamma_{\mathbf{L}}^{-1} \lambda l^{-1} g m \mu \gamma_{\mathbf{M}} = \gamma_{\mathbf{L}}^{-1} l'^{-1} g' m' \gamma_{\mathbf{M}},$$

c'est-à-dire

$$\lambda l^{-1} g m \mu = l'^{-1} g' m'.$$

Par conséquent, il existe $h \in C_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $h' \in C_{\mathbf{M}^*}(s)$ dont les classes respectives modulo $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ sont F^*-stables et tels que $hgh' = g'$. On écrit $h = tu$ et $h' = u't'$ avec $t \in C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$, $u \in C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$, $t' \in C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$, $u' \in C_{\mathbf{M}^*}(s)^{F^*}$. Quitte à remplacer g par ugu', on peut supposer que $h \in C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $h' \in C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$. D'autre part, $F^*(h) g F^*(h') = hgh'$, donc $h^{-1}F^*(h)$ appartient à $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^g C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$. Puisque $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^g C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ est connexe, on trouve, d'après le théorème de Lang, un élément $y \in C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \cap {}^g C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ tel que $h^{-1}F^*(h) = y^{-1}F^*(y)$. On pose alors $k = hy^{-1}$. On a $F^*(k) = k$ et $kg^{g^{-1}}yh' = g'$. Or, ${}^{g^{-1}}yh' \in C^\circ_{\mathbf{M}^*}(s)$ et $F^*({}^{g^{-1}}yh') = {}^{g^{-1}}yh'$. Donc g et g' sont dans la même double classe. $\square$

On note $\mathcal{U} \to [\mathcal{S}^{*F^*}(s)]$, $x \mapsto g_x$ la bijection réciproque de φ'. Pour montrer le théorème 12.5.1, il suffit de montrer que, si $x \in \mathcal{U}$, alors

(12.5.6) $$\langle {}^*R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L} \cap {}^{g_x}\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{L}}_{s,\xi}), \chi^{\mathbf{L} \cap {}^{g_x}\mathbf{M}}_{s,1} \rangle = \varepsilon_{\mathbf{L}} \varepsilon_{\mathbf{L} \cap {}^{g_x}\mathbf{M}} \langle \xi, 1 \rangle_{W'_{\mathbf{L}}(s) \cap {}^x W'_{\mathbf{M}}(s)}.$$

Pour cela, compte tenu de la proposition 12.4.1, il suffit de montrer que le groupe $W_{\mathbf{L}\cap^{gx}\mathbf{M}}(s)$ s'identifie, via la bijection φ' avec $W_{\mathbf{L}}(s)\cap {}^xW_{\mathbf{M}}(s)$, ce qui est évident. ■

12.6. Induction à partir de sous-groupes réguliers : un cas particulier. Dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, on suppose que $W(\tilde{s})=\{1\}$. Cela implique que $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})=\tilde{\mathbf{T}}_1$, et donc que la série de Lusztig (ou rationnelle) $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F,(\tilde{s}))$ est réduite à un élément, le caractère régulier $\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$. On a en fait ici :

$$\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}=\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}_1}R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}).$$

Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe régulier F-stable, contenant le tore maximal $\tilde{\mathbf{T}}_1$. On note $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un groupe dual de $\tilde{\mathbf{L}}$, que l'on peut voir comme étant un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$. Quitte à conjuguer par un élément de $\tilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$, on peut supposer que $\tilde{\mathbf{T}}_1^*\subseteq\tilde{\mathbf{L}}^*$. On pose alors :

$$\mathbf{L}=\tilde{\mathbf{L}}\cap\mathbf{G},\qquad \mathbf{L}^*=i^*(\tilde{\mathbf{L}}^*).$$

On notera $W_{\mathbf{L}}$ (respectivement $W_{\mathbf{L}}^*$) le groupe Weyl de $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{L}^*$) relativement à $\mathbf{T}_1$ (respectivement $\mathbf{T}_1^*$) . On a alors $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})=\{1\}$, et donc la série de Lusztig $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F,(\tilde{s}))$ est réduite à un élément, le caractère régulier $\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}}$. On a :

$$R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}})=\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{L}}}\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}. \tag{12.6.1}$$

On définit le groupe $A_{\mathbf{L}}(s)$ de la même manière que l'on avait défini le groupe $A(s)$: ici, on a $A_{\mathbf{L}}(s)=W_{\mathbf{L}}(s)$. D'après le lemme 12.3.1, l'injection canonique $C_{\mathbf{L}^*}(s)\hookrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)$ induit un morphisme injectif $A_{\mathbf{L}}(s)\hookrightarrow A(s)$ commutant avec l'action du morphisme de Frobenius. On identifiera $A_{\mathbf{L}}(s)$ avec son image dans $A(s)$ via cette injection. On a alors :

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])=\{\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}\mid \xi\in(A(s)^{F^*})^\wedge\}$$

et

$$\mathcal{E}(\mathbf{L}^F,[s])=\{\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{L}}\mid \xi_1\in(A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*})^\wedge\}.$$

Proposition 12.6.2. ***On suppose la conjecture* (GG) *vraie.*** *Soit ξ_1 un caractère linéaire de $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$. Alors :*

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{L}})=\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\sum_{\substack{\xi\in(A(s)^{F^*})^\wedge\\ \xi|_{A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}=\xi_1}}\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}.$$

Preuve - Pour tout caractère linéaire ξ de $A(s)^{F^*}$, on peut choisir le représentant g_ξ défini avant la proposition 12.3.3 dans $\tilde{\mathbf{T}}_1^F$ (car $\tilde{\mathbf{G}}^F=\mathbf{G}^F.\tilde{\mathbf{T}}_1^F$), donc dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$. On note, par analogie avec la proposition 12.3.2, $\tilde{\mathbf{L}}(s)$ le stabilisateur, dans $\tilde{\mathbf{L}}^F$, de $\chi_{s,1}^{\mathbf{L}}$. Soient ξ et ξ' dans $(A(s)^{F^*})^\wedge$. Alors $g_\xi\equiv g_{\xi'}\bmod\tilde{\mathbf{L}}(s)$ si et seulement si $\xi|_{A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}=\xi'|_{A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}$. D'après le lemme 6.1.7 et la formule 12.6.1, $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi}^1)$ est un sous-module de $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\chi_s^{\mathbf{G}}$. D'autre part, ce sous-module est stable sous l'action de $\tilde{\mathbf{L}}(s)$. Comme de plus

$$\chi_s^{\mathbf{G}}=\sum_{\xi_1\in(A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*})^\wedge}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{L}}),$$

on déduit du lemme 6.1.7 qu'il existe un caractère linéaire ξ_0 de $A(s)^{F^*}$ tel que, pour tout $\xi_1 \in (A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*})^\wedge$, on ait :

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{G}}) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} \sum_{\substack{\xi \in (A(s)^{F^*})^\wedge \\ \xi|_{A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}} = \xi_1}} \chi_{s,\xi_0\xi}^{\mathbf{G}}.$$

La proposition 12.6.2 est donc équivalente à :

$$\xi_0|_{A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}} = 1.$$

Or, d'après la proposition 12.4.1, on a :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{s,1}^{\mathbf{G}}, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}^{\mathbf{L}})\rangle_{\mathbf{G}^F} &= \langle {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}^{\mathbf{G}}), \chi_{s,1}^{\mathbf{L}}\rangle_{\mathbf{L}^F} \\ &= \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. ■

12.7. Restriction à un sous-groupe réductif connexe de G de même type. On reprend les notations du paragraphe 7.6. On pose $s' = i^*(s)$. On a alors la décomposition suivante de $\chi_{s'}^{\mathbf{G}'}$ en caractères irréductibles :

$$\chi_{s'}^{\mathbf{G}'} = \sum_{\xi' \in (A(s')^{F^*})^\wedge} \chi_{s',\xi'}^{\mathbf{G}'}.$$

D'autre part, de la même manière que pour la formule 12.1.2, on a

(12.7.1) $$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_s^{\mathbf{G}} = \chi_{s'}^{\mathbf{G}'}.$$

Proposition 12.7.2. *Soit ξ un caractère linéaire de $A(s)$. Alors :*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \sum_{\substack{\xi' \in (A(s')^{F^*})^\wedge \\ \xi'|_{A(s)^{F^*}} = \xi}} \chi_{s',\xi'}^{\mathbf{G}'}.$$

Preuve - En raisonnant de la même manière qu'à la proposition 12.6.2, il suffit de montrer que $\langle \chi_{s',1}^{\mathbf{G}'}, \operatorname{Res}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s,1}^{\mathbf{G}}\rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0$, ou encore que :

$$\langle \Gamma^{\mathbf{G}'}, \operatorname{Res}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s,1}^{\mathbf{G}}\rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0.$$

Cela résulte immédiatement de la loi de réciprocité de Frobenius et du fait que $\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \Gamma^{\mathbf{G}'} = \Gamma^{\mathbf{G}}$. ■

12.8. Induction à partir d'un sous-groupe réductif connexe de G contenant le groupe dérivé de G. On reprend les notations du paragraphe précédent 12.7. Le tore $\operatorname{Ker} j^*$ est dual du tore $\mathbf{G}/\mathbf{G}'$. Par conséquent, on a un isomorphisme de groupes que l'on note

$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{Ker} j^*)^{F^*} & \longrightarrow & (\mathbf{G}^F/\mathbf{G}'^F)^\wedge \\ z & \longmapsto & \hat{z}. \end{array}$$

Avec ces notations, on a, pour tout $z \in (\operatorname{Ker} j^*)^{F^*}$ et pour tout caractère linéaire ξ de $A(s)^{F^*}$ (remarquons que $A(s)^{F^*} = A(sz)^{F^*}$),

(12.8.1) $$\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} \otimes \hat{z} = \chi_{sz,\xi}^{\mathbf{G}}.$$

En effet, d'après la formule 12.1.4, on a

$$\chi_s^{\mathbf{G}} \otimes \hat{z} = \chi_{sz}^{\mathbf{G}}.$$

Il suffit donc de montrer que $\chi_{s,1}^{\mathbf{G}} \otimes \hat{z}$ est une composante irréductible du caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma^{\mathbf{G}}$. Or,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathbf{G}} \otimes \hat{z}^{-1} &= (\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \Gamma^{\mathbf{G}'}) \otimes \hat{z}^{-1} \\
&= \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} (\Gamma^{\mathbf{G}'} \otimes \mathrm{Res}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \hat{z}^{-1}) \\
&= \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \Gamma^{\mathbf{G}'} \\
&= \Gamma^{\mathbf{G}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

On déduit alors de la formule 12.8.1 la

Proposition 12.8.2. *Soit ξ' un caractère linéaire de $A(s')^{F^*}$. On note ξ la restriction de ξ' à $A(s)^{F^*}$. Alors*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s',\xi'}^{\mathbf{G}'} = \frac{|A(s)^{F^*}|}{|A(s')^{F^*}|} \sum_{z \in (\mathrm{Ker}\, j^*)^{F^*}} \chi_{sz,\xi}^{\mathbf{G}}.$$

Preuve - D'après la proposition 12.7.2 et la réciprocité de Frobenius, on a

$$\langle \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}, \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s',\xi'}^{\mathbf{G}'} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

On note $\mathbf{G}(s')$ le stabilisateur de $\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}'}$ dans $\mathbf{G}^F$. On a alors $\mathbf{G}(s') = \tilde{\mathbf{G}}^F(s') \cap \mathbf{G}$. Si τ est un caractère linéaire de $\mathbf{G}^F/\mathbf{G}'^F$, alors

$$\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} \otimes \tau = \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$$

si et seulement si la restriction de τ à $\mathbf{G}(s')$ est triviale. Il résulte de la théorie de Clifford que

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}'^F}^{\mathbf{G}^F} \chi_{s',\xi'}^{\mathbf{G}'} = \frac{|\mathbf{G}(s')|}{|\mathbf{G}^F|} \sum_{\tau \in (\mathbf{G}^F/\mathbf{G}'^F)^\wedge} \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} \otimes \tau.$$

La proposition découle alors de la formule 12.8.1 et du fait que

$$\frac{|\mathbf{G}^F|}{|\mathbf{G}(s')|} = \frac{|A(s')^{F^*}}{|A(s)^{F^*}|},$$

car les deux membres de cette équation représentent le nombre de composantes irréductibles de la restriction de $\chi_{s,\xi}$ à $\mathbf{G}'^F$ (cf proposition 12.7.2). ■

13. Caractères réguliers cuspidaux

Le but de cette section est d'étudier de plus près la situation de la section 7 lorsque le caractère irréductible cuspidal λ_1 est régulier. Pour l'étude du groupe spécial linéaire, c'est le seul cas qui se présente : tous les caractères cuspidaux des sous-groupes réguliers rationnels du groupe spécial linéaire sont réguliers.

13.1. Construction de sous-groupes réguliers G-déployés. On notera par la suite ϕ l'automorphisme de $\tilde{\mathbf{T}}_1$ tel que, si $t \in \tilde{\mathbf{T}}_1$, alors $F(t) = \phi(t)^q$. Alors ϕ est un automorphisme d'ordre fini de $\tilde{\mathbf{T}}_1$. Le sous-tore déployé maximal de $\tilde{\mathbf{T}}_1$ est alors $(\tilde{\mathbf{T}}_1^{\phi})^\circ$. On peut voir $A(s)$ comme un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\tilde{\mathbf{T}}_1$, que l'on notera $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$. Soit A' un sous-groupe F^*-stable de $A(s)$. Alors ϕ normalise A', et donc le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$ engendré par A' et ϕ est fini.

Proposition 13.1.1. *Soit A' un sous-groupe F^*-stable de $A(s)$, et soit H le sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$ *engendré par ϕ et A'. Soit $\tilde{\mathbf{L}} = C_{\tilde{\mathbf{G}}}((\tilde{\mathbf{T}}_1^H)^\circ)$. Alors $\tilde{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé de $\tilde{\mathbf{G}}$, contenant $\tilde{\mathbf{T}}_1$. De plus, si on note $W_{\mathbf{L}}$ le groupe de Weyl de $\tilde{\mathbf{L}}$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1$, alors :*
(i) *$W_{\mathbf{L}}^*$ est un sous-groupe parabolique de W^*, contenant A'.*
(ii) *$W_{\mathbf{L}}^* \cap W(\tilde{s}) = \{1\}$.*
(iii) *$W_{\mathbf{L}}^* \cap W(s)$ est contenu dans $A(s)$.*
(iv) *Si $A' = \{1\}$, alors W^{*F^*} normalise $W_{\mathbf{L}}^*$.*

Preuve - Le sous-groupe régulier $\tilde{\mathbf{L}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ est $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé d'après le théorème 4.15 de [BT] car $(\tilde{\mathbf{T}}_1^H)^\circ$ est déployé car $\phi \in H$. Le (i) est évident.

Si $h \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$, on note h^* l'action de h sur le tore dual $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$. On note H^* le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1^*)$ formé des h^*, $h \in H$. On pose alors

$$\tilde{\mathbf{L}}^* = C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}((\tilde{\mathbf{T}}_1^{*H^*})^\circ).$$

Alors $\tilde{\mathbf{L}}^*$ est un groupe dual de $\tilde{\mathbf{L}}$, contenant $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$, dont le groupe de Weyl relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ est $W_{\mathbf{L}}^*$. Le corollaire 2.1.3 alors que $W_{\mathbf{L}}^* \cap W(\tilde{s}) = \{1\}$, ce qui montre (ii) : en effet, $W_{\mathbf{L}}^* \cap W(\tilde{s})$ est le groupe de Weyl du centralisateur dans $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ de $(\tilde{\mathbf{T}}_1^H)^\circ$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$, et ce centralisateur est égal à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ car tous les éléments de H stabilisent le sous-groupe de Borel F^*-stable $\tilde{\mathbf{B}}^*(\tilde{s})$ de $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$.

Pour montrer (iii), on peut supposer que $A' = A(s)$. Soit $w \in W_{\mathbf{L}}^* \cap W(s)$. On trouve $\alpha \in A(s)$ et $v \in W(\tilde{s})$ tels que $w = v\alpha$. Or, $\alpha \in W_{\mathbf{L}}^*$ par construction. Donc $v \in W_{\mathbf{L}}^* \cap W(\tilde{s})$, donc $v = 1$, ce qui montre que $W_{\mathbf{L}}^* \cap W(s)$ est contenu dans $A(s)$.

Le (iv) est immédiat car W^{*F^*} normalise $(\tilde{\mathbf{T}}_1^{*\phi^*})^\circ$. ∎

13.2. Stabilisateur de caractères réguliers cuspidaux. On notera $\tilde{\mathbf{M}}_1$ (respectivement $\tilde{\mathbf{M}}_1^*$) le centralisateur dans $\tilde{\mathbf{G}}$ (respectivement dans $\tilde{\mathbf{G}}^*$) du sous-tore déployé maximal de $\tilde{\mathbf{T}}_1$ (respectivement $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$). Alors $(\tilde{\mathbf{M}}_1^*, \tilde{\mathbf{T}}_1^*, F^*)$ est un triplet dual de $(\tilde{\mathbf{M}}_1, \tilde{\mathbf{T}}_1, F^*)$. On pose alors

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{M}}_1 \cap \mathbf{G}, \qquad \mathbf{M}_1^* = i^*(\tilde{\mathbf{M}}_1^*).$$

On note $W_{\mathbf{M}_1}$ (respectivement $W_{\mathbf{M}_1}^*$) le groupe de Weyl de $\mathbf{M}_1$ (respectivement $\mathbf{M}_1^*$) relativement à $\mathbf{T}_1$ (respectivement $\mathbf{T}_1^*$). Cela correspond au cas où $A' = \{1\}$ dans la proposition précédente 13.1.1. On définit les sous-groupes $W_{\mathbf{M}_1}(\tilde{s})$, $W_{\mathbf{M}_1}(s)$ et $A_{\mathbf{M}_1}(s)$ de $W_{\mathbf{M}_1}^*$ de manière analogue à $W(\tilde{s})$, $W(s)$ et $A(s)$. On a ici, d'après la proposition 13.1.1, $W_{\mathbf{M}_1}(\tilde{s}) = \{1\}$ et donc $W_{\mathbf{M}_1}(s) = A_{\mathbf{M}_1}(s)$.

La série de Lusztig $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{M}}_1^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{M}}_1^*})$ contient un seul élément : le caractère régulier $\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}$. Ce dernier est cuspidal car $\tilde{\mathbf{M}}_1$ est le sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé minimal contenant $\tilde{\mathbf{T}}_1$. De plus, toujours d'après la proposition 13.1.1, $W(\tilde{s})^{F^*}$ normalise $W_{\mathbf{M}_1}^*$, donc il normalise

$W^*_{\mathbf{M}_1} \cap W(s)^{F^*} = A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$. Comme de plus $A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$ normalise $W(\tilde{s})^{F^*}$, cela montre que $A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$ agit trivialement sur $W(\tilde{s})^{F^*}$.

Théorème 13.2.1. *Le groupe* $N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{M}}_1, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})/\tilde{\mathbf{M}}_1^F$ *est isomorphe à* $W(\tilde{s})^{F^*}$.

Pour tout caractère linéaire ξ_1 *de* $A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$, *le groupe* $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}_1})/\mathbf{M}_1^F$ *est isomorphe à* $W(s)^{F^*}/(W^*_{\mathbf{M}_1} \cap W(s)^{F^*}) \simeq W(\tilde{s})^{F^*} \rtimes A(s)^{F^*}/A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$.

Preuve - D'après la proposition 13.1.1, le groupe $W(\tilde{s})^{F^*}$ normalise $\tilde{\mathbf{M}}_1$ et, puisqu'il centralise $\tilde{s}$, il stabilise le caractère $\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}$. Par conséquent, on a un morphisme $W(\tilde{s})^{F^*} \to N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{M}}_1, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})/\tilde{\mathbf{M}}_1^F$. Ce morphisme est injectif car, d'après la proposition 13.1.1, on a $W(\tilde{s}) \cap W^*_{\mathbf{M}_1} = \{1\}$. Il est surjectif car

$$\begin{aligned} \langle R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}), R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})\rangle &= \langle R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}), R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})\rangle \\ &= |W(\tilde{s})^{F^*}|, \end{aligned}$$

la première égalité résultant du fait que $\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1} = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{M}}_1} R_{\tilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}(\tilde{s})$, la seconde par [DL], théorème 6.8, et d'autre part, d'après la théorie de Harish-Chandra, on a (cf, par exemple, [DM1], lemme 6.5),

$$\langle R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}), R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})\rangle = |N_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{M}}_1, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})/\tilde{\mathbf{M}}_1^F|.$$

Soit maintenant ξ_1 un caractère linéaire de $A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$. D'après le corollaire 7.2.3, on a

$$N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}_1})/\mathbf{M}_1^F = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s}^{\mathbf{M}_1})/\mathbf{M}_1^F$$

De la même manière que précédemment, on a un morphisme canonique

$$W(s)^{F^*} \to N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s}^{\mathbf{M}_1})/\mathbf{M}_1^F.$$

Le noyau de ce morphisme est $W(s)^{F^*} \cap W^*_{\mathbf{M}_1} = A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$. On va montrer que ce morphisme est surjectif, ce qui montrera le théorème. Soient ξ_1 et ξ_1' deux caractères linéaires distincts de $A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}$. Alors, d'après le corollaire 7.2.3, on a :

$$\langle R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}_1}), R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1'}^{\mathbf{M}_1})\rangle = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s}^{\mathbf{M}_1}), R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s}^{\mathbf{M}_1})\rangle &= \langle R_{\mathbf{T}_1^*}^{\mathbf{G}}(s), R_{\mathbf{T}_1^*}^{\mathbf{G}}(s)\rangle \\ &= |W(s)^{F^*}| \end{aligned}$$

et d'autre part, d'après la théorie de Harish-Chandra et le corollaire 7.2.3, on a

$$\begin{aligned} \langle R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s}^{\mathbf{M}_1}), R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s}^{\mathbf{M}_1})\rangle &= \sum_{\xi_1 \in (A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*})^\wedge} \langle R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}_1}), R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}_1})\rangle \\ &= |A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*}|.|N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s}^{\mathbf{M}_1})/\mathbf{M}_1^F|, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ∎

13.3. Paramétrage des caractères irréductibles de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1})$. Si on reprend les notations de la section 7, on a

$$W(\tilde{s})^{F^*} = W_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(\tilde{\mathbf{M}}_1, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}),$$
$$W(s)^{F^*}/A_{\mathbf{M}_1}(s)^{F^*} = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_{s,1}^{\mathbf{M}_1}),$$
$$W(s)^{F^*} = \bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1}).$$

Par conséquent, on a un paramétrage des composantes irréductibles de $R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}} \chi_s^{\mathbf{M}_1}$ par les caractères irréductibles de $W(s)^{F^*}$ (cf proposition 7.4.2). Mais, ce paramétrage n'est pas défini de manière unique (cf remarque 4 suivant la proposition 7.4.2). Cependant, on va montrer dans ce paragraphe comment le choix que nous avons fait d'un caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma^{\mathbf{G}}$ permet de choisir un paramétrage canonique.

On a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, \tilde{\mathbf{M}}_1, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}) \\ \chi & \longmapsto & \tilde{\rho}_\chi(\tilde{s}) = \tilde{\rho}_\chi^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \end{array}$$

défini comme dans la section 7.

Lemme 13.3.1. *On a $\tilde{\rho}_{\mathrm{sgn}}(\tilde{s}) = \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}}$, où* sgn *désigne le caractère signature de $W(\tilde{s})^{F^*}$.*

Preuve - Cela se montre de la même manière que la proposition 14.5.1 que l'on montrera plus tard en utilisant le fait que, dans tout groupe de Weyl, le caractère irréductible sgn est combinaison linéaire à coefficient entiers de caractères induits de l'identité à partir de sous-groupes paraboliques et en utilisant le fait que, pour tout sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé $\tilde{\mathbf{L}}$ de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\tilde{\mathbf{M}}_1$, on a

$$\langle R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{L}}}, \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rangle = 1$$

d'après la proposition 12.4.1. ∎

On note $\widetilde{\mathrm{sgn}}$ le caractère linéaire de $W(s)^{F^*}$ dont la restriction à $W(\tilde{s})^{F^*}$ est sgn et dont la restriction à $A(s)^{F^*}$ est triviale. Le choix d'un caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma^{\mathbf{G}}$ définit de manière canonique une composante irréductible de $\chi_s^{\mathbf{M}_1}$, que l'on a notée $\chi_{s,1}^{\mathbf{M}_1}$. D'autre part, l'extension $\widetilde{\mathrm{sgn}}$ de sgn est elle aussi définie de manière canonique. Les diverses extensions de sgn sont alors paramétrées par les caractères linéaires de $A(s)^{F^*}$. Compte tenu de la remarque 4 suivant la proposition 7.4.2, pour déterminer de manière unique le paramétrage

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1}) \\ \lambda & \longmapsto & \rho_\lambda(s) = \rho_\lambda^{\mathbf{G}}(s), \end{array}$$

il suffit de fixer de manière canonique une composante irréductible de $\chi_s^{\mathbf{G}}$, ce qui est encore fait grâce au caractère de Gel'fand-Graev. On a en fait montré la

Proposition 13.3.2. *La bijection*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1}) \\ \lambda & \longmapsto & \rho_\lambda(s) \end{array}$$

peut-être fixée de telle sorte que $\rho_{\widetilde{\mathrm{sgn}}}(s) = \chi_{s,1}^{\mathbf{G}}$. Elle est alors déterminée de manière unique.

Remarque - On reprend les notations de la remarque suivant le corollaire 12.4.1. Pour tout $\lambda \in \operatorname{Irr} W(s)^{F^*}$, on note $\rho_\lambda^\psi(s)$ (respectivement $\rho_\lambda^{\psi'}(s)$) le caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ associé à λ par le paramétrage précédent en utilisant le caractère de Gel'fand-Graev $\Gamma_\psi^{\mathbf{G}}$ (respectivement $\Gamma_{\psi'}^{\mathbf{G}}$). On a alors, pour tout caractère irréductible λ de $W(s)^{F^*}$,

$$\rho_\lambda^{\psi'}(s) = {}^t\rho_\lambda^\psi(s).$$

Si on note ξ_t le caractère linéaire de $A(s)^{F^*}$ associé à la classe de t dans $\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}(\tilde{s})$, on a, d'après l'équation 12.3.4,

$$\rho_\lambda^{\psi'}(s) = \rho_{\lambda\otimes\xi_t}^\psi(s). \tag{13.3.3}$$

13.4. Induction de Harish-Chandra. Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe régulier F^*-stable $\mathbf{G}^*$-déployé dual de $\mathbf{L}$. On peut supposer que $\mathbf{L}^*$ contient $\mathbf{T}_1^*$. On note alors $W_{\mathbf{L}}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. D'après la proposition 13.3.2, on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, \mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1}) \\ \lambda & \longmapsto & \rho_\lambda^{\mathbf{L}}(s). \end{array}$$

Le théorème 7.5.1 s'écrit alors :

Théorème 13.4.1. *Soient λ et μ deux caractères irréductibles de $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et $W(s)^{F^*}$ respectivement. Alors*

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\rho_\lambda^{\mathbf{L}}(s)), \rho_\mu^{\mathbf{G}}(s)\rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \lambda, \mu\rangle_{W(s)^{F^*}}.$$

CHAPITRE IV

Le groupe spécial linéaire

Dans tout ce chapitre, on se fixe un entier naturel non nul n. On munit le groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ de sa structure rationnelle déployée sur $\mathbb{F}_q$ (d'endomorphisme de Frobenius noté F). Dans ce chapitre, on supposera que $\tilde{\mathbf{G}}$ est un sous-groupe régulier F-stable $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ ($\tilde{\mathbf{G}}$ n'est pas forcément $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$-déployé).

14. Le groupe général linéaire

14.1. Caractères irréductibles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$. On va paramétrer les caractères de la série de Lusztig $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$, en utilisant les résultats de [LS]. On note toujours ϕ l'automorphisme de $\tilde{\mathbf{T}}_1$ tel que, pour tout $t \in \tilde{\mathbf{T}}_1$, on ait $F(t) = \phi(t)^q$. On note encore ϕ l'automorphisme de $W(s)$ induit par F^*, et $\langle\phi\rangle$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de $W(s)$ engendré par ϕ (en effet, ϕ induit un automorphisme de $X(\tilde{\mathbf{T}}_1^*)$ qui, par conjugaison, stabilise $W(s)$ et agit comme F^*).

Soit χ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$. Puisque ϕ (c'est-à-dire F^*) permute les composantes irréductibles de $W(\tilde{s})$, il lui correspond, d'après les propositions 1.5.1 et 1.4.2, un caractère irréductible $\boldsymbol{\chi}$ de $W(\tilde{s})$ stable sous F^*, et il existe une et une seule extension de $\boldsymbol{\chi}$ à $W(\tilde{s}) \rtimes \langle\phi\rangle$, notée $\boldsymbol{\chi}^+$, telle que $\boldsymbol{\chi}^+(\phi) > 0$. D'après la proposition 1.4.2, il existe une application $\pi = \pi_G : W(\tilde{s}) \to W(\tilde{s})^{F^*}$ dont les fibres ont pour cardinal $|W(\tilde{s})|/|W(\tilde{s})^{F^*}|$ et telle que, pour tout $w \in W(\tilde{s})$, on ait :

$$\boldsymbol{\chi}^+(w\phi) = \chi(\pi(w)).$$

Remarques - (1) Dans la section 1, on avait noté $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ l'extension canonique de $\boldsymbol{\chi}$ à $W(\tilde{s}) \rtimes \langle\phi\rangle$. On la notera ici $\boldsymbol{\chi}^+$ car la notation $\tilde{\chi}$ sera réservée à l'extension canonique de χ à son stabilisateur dans $W(s)^{F^*}$.

(2) La famille $(\boldsymbol{\chi}^+)_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}}$ est une base de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur $W(\tilde{s})\phi$.

On pose :

(14.1.1)
$$R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = \frac{\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})}}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}).$$

D'après [LS], l'application

(14.1.2)
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) \\ \chi & \longmapsto & R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) \end{array}$$

est bijective.

14.2. Induction de Lusztig. Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\tilde{\mathbf{G}}$. On note $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{L}}$. On suppose que $\tilde{s}$ appartient à $\tilde{\mathbf{L}}^*$. Soit $\tilde{\mathbf{P}}^*$ un sous-groupe parabolique de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dont $\tilde{\mathbf{L}}^*$ est un sous-groupe de Levi. Alors $C_{\tilde{\mathbf{P}}^*}(\tilde{s})$ est un sous-groupe parabolique de $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ et $C_{\tilde{\mathbf{L}}^*}(\tilde{s})$ est un sous-groupe de Levi de $C_{\tilde{\mathbf{P}}^*}(\tilde{s})$. Soit $\tilde{\mathbf{B}}^*_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ un sous-groupe de Borel F^*-stable de $C_{\tilde{\mathbf{L}}^*}(\tilde{s})$ et soit $\tilde{\mathbf{T}}^*_{\mathbf{L}}$ un tore maximal F^*-stable de $\tilde{\mathbf{B}}^*_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$. On note $\tilde{\mathbf{B}}^*_{\mathbf{P}}(\tilde{s})$ l'unique sous-groupe de Borel de $C_{\tilde{\mathbf{P}}^*}(\tilde{s})$ contenant $\tilde{\mathbf{B}}^*_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$. Il existe alors un élément $g \in C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ tel que

$$(\tilde{\mathbf{T}}^*_{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}}^*_{\mathbf{P}}(\tilde{s})) = {}^g(\tilde{\mathbf{T}}^*_1, \tilde{\mathbf{B}}^*(\tilde{s})).$$

Alors $g^{-1}F^*(g)$ appartient au normalisateur de $\tilde{\mathbf{T}}^*_1$ dans $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$, et on note $w_{\mathbf{L}}$ sa classe dans $W(\tilde{s})$. Alors, via $\operatorname{ad} g^{-1}$, le groupe de Weyl de $C_{\tilde{\mathbf{L}}^*}(\tilde{s})$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}^*_{\mathbf{L}}$ s'identifie à un sous-groupe $w_{\mathbf{L}}F^*$-stable de $W(\tilde{s})$ que l'on notera $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$. Si χ est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{w_{\mathbf{L}}F^*}$, il lui correspond un unique caractère irréductible toujours noté $\boldsymbol{\chi}^+$ de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}) \rtimes \langle w_{\mathbf{L}}\phi\rangle$ tel que $\boldsymbol{\chi}^+(w_{\mathbf{L}}\phi) > 0$. On a alors

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F, (\tilde{s})_{\tilde{\mathbf{L}}^*}) = \{R^{\tilde{\mathbf{L}}}_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) \mid \chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{w_{\mathbf{L}}F^*}\}.$$

Notations - Si $\boldsymbol{f}^+$ est une fonction centrale sur $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\phi$, on posera, pour tout $w \in W(\tilde{s})$,

(14.2.1)
$$\operatorname{Ind}^{W(\tilde{s})\phi}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\phi} \boldsymbol{f}^+(w) = \frac{1}{|W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})|} \sum_{\substack{v \in W(\tilde{s}) \\ v^{-1}w\phi(v) \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}}} \boldsymbol{f}^+(v^{-1}w\phi(v)\phi).$$

Si $w \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$, on notera $\tilde{\mathbf{T}}^*_{L,w}$ un tore maximal F^*-stable de type w relativement à $\tilde{\mathbf{T}}^*_{\mathbf{L}}$. Alors $\tilde{\mathbf{T}}^*_{L,w}$ sera de type $ww_{\mathbf{L}}$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}^*_1$, de sorte que l'on peut supposer que $\tilde{\mathbf{T}}^*_{L,w} = \tilde{\mathbf{T}}^*_{ww_{\mathbf{L}}}$.

Lemme 14.2.2. *Soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{w_{\mathbf{L}}F^*}$. On écrit :*

$$\operatorname{Ind}^{W(\tilde{s})\phi}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\phi} \boldsymbol{\chi}^+ = \sum_{\zeta \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} n_\zeta \boldsymbol{\zeta}^+.$$

Alors :

$$R^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\tilde{\mathbf{L}}} R^{\tilde{\mathbf{L}}}_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) = \sum_{\zeta \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} n_\zeta R^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{s}).$$

Preuve - Cela résulte immédiatement du lemme 1.6.2. ∎

14.3. Un autre paramétrage. Le premier paramétrage 14.1.2 était défini à partir des caractères de Deligne-Lusztig. On va ici utiliser la théorie de Harish-Chandra : les deux paramétrages sont en fait identiques (cf corollaire 14.5.2).

D'après le théorème 13.2.1, l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\tilde{\mathbf{G}}^F}(R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}))$ est isomorphe à l'algèbre de groupes $\mathbb{K}[W(\tilde{s})^{F^*}]$. Si χ est un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$, on note $\rho_\chi(\tilde{s})$ (ou $\rho_\chi^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$ s'il y a confusion possible) la composante irréductible de $R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1})$ qui lui est associée. L'application

$$\textbf{(14.3.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}\, W(\tilde{s})^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}]) \\ \chi & \longmapsto & \rho_\chi(\tilde{s}) \end{array}$$

est bijective.

14.4. Induction de Harish-Chandra. Soit $\tilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\tilde{\mathbf{M}}_1$. Soit $\tilde{\mathbf{L}}^*$ un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\tilde{\mathbf{L}}$ et contenant $\tilde{\mathbf{M}}_1^*$. Alors $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$ est contenu dans $C_{\tilde{\mathbf{L}}^*}(\tilde{s})$, et on note $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ le groupe de Weyl de $C_{\tilde{\mathbf{L}}^*}(\tilde{s})$ relativement à $\tilde{\mathbf{T}}_1^*$. Alors $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ est un sous-groupe F^*-stable de $W(\tilde{s})$. L'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\tilde{\mathbf{L}}^F}(R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{L}}}(\chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}))$ est isomorphe à $\mathbb{K}[W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}]$, et donc on a :

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{L}}^F, [\tilde{s}]_{\tilde{\mathbf{L}}^*}) = \{\rho_\chi^{\tilde{\mathbf{L}}}(\tilde{s}) \mid \chi \in \mathrm{Irr}\, W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}\}.$$

On a alors :

Lemme 14.4.1. *Soit χ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$. On écrit :*

$$\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}}^{W(\tilde{s})^{F^*}} \chi = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W(\tilde{s})^{F^*}} n_\zeta \zeta.$$

Alors

$$R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rho_\chi^{\tilde{\mathbf{L}}}(\tilde{s}) = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}\, W(\tilde{s})^{F^*}} n_\zeta \rho_\zeta^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}).$$

14.5. Compatibilité des deux paramétrages. On commence par montrer le lemme technique suivant :

Lemme 14.5.1. *On reprend les hypothèses et notations du lemme* 14.4.1. *Soient χ et ζ deux caractères irréductibles de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}$ et $W(\tilde{s})^{F^*}$ respectivement. Alors*

$$\langle R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{L}}}(\tilde{s}), R_{\boldsymbol{\zeta}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})\rangle = \langle R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rho_\chi^{\tilde{\mathbf{L}}}(\tilde{s}), \rho_\zeta^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})\rangle.$$

Preuve - Cela résulte immédiatement du lemme 1.7.1. ■

Corollaire 14.5.2. *Pour tout caractère irréductible χ de $W(\tilde{s})^{F^*}$, on a $\rho_\chi(\tilde{s}) = R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s})$.*

PREUVE - Le groupe $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$ est un sous-groupe régulier F^*-stable de $\tilde{\mathbf{G}}^*$. On note $\tilde{\mathbf{M}}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\tilde{\mathbf{G}}$ dual de $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$. On peut supposer que $\tilde{\mathbf{T}}_1 \subseteq \tilde{\mathbf{M}}$. Il est associé, à l'élément $\tilde{s}$ (qui est central dans $C_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{s})$), un caractère linéaire $\hat{\tilde{s}}$ de $\tilde{\mathbf{M}}^F$.

Pour tout caractère irréductible χ de $W(\tilde{s})^{F^*}$, on pose :

$$R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{M}}}(1) = \frac{1}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\tilde{\mathbf{M}}}(1).$$

Alors

$$R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}} \varepsilon_{\tilde{\mathbf{M}}} R_{\tilde{\mathbf{M}}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{M}}}(1) \otimes \hat{\tilde{s}}).$$

On a donc une bijection

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{M}}^F, 1) \longrightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{s})).$$

L'algèbre d'endomorphismes de $R_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\tilde{\mathbf{M}}}(1)$ est isomorphe à $\mathbb{K}[W(\tilde{s})^{F^*}]$. Si χ est un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$, on note $\rho_\chi^{\tilde{\mathbf{M}}}(1)$ le caractère irréductible unipotent de $\tilde{\mathbf{M}}^F$ associé à χ. D'après [L2], on a $\tilde{\nabla}(\rho_\chi(1)) = \rho_\chi(\tilde{s})$. Il suffit donc de montrer que $\rho_\chi(1) = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{M}}}(1)$. Cela signifie que l'on peut supposer que $\tilde{s} = 1$ et $\tilde{\mathbf{T}}_0 = \tilde{\mathbf{T}}_1$.

Tout d'abord, $\rho_1(1) = R_{\mathbf{1}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(1) = 1_{\tilde{\mathbf{G}}^F}$. D'autre part, si $\tilde{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{G}}$-déployé de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\tilde{\mathbf{T}}_0$, et si χ (respectivement χ') est un caractère irréductible $W_{\tilde{\mathbf{L}}}^{*F^*}$ (respectivement W^{*F^*}), alors, d'après le lemme 14.5.1, on a

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Ind}_{W_{\tilde{\mathbf{L}}}^{*F^*}}^{W^{*F^*}} \chi, \chi' \rangle &= \langle R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} \rho_\chi^{\tilde{\mathbf{L}}}(1), \rho_{\chi'}^{\tilde{\mathbf{G}}}(1) \rangle \\ &= \langle R_{\tilde{\mathbf{L}}}^{\tilde{\mathbf{G}}} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{L}}}(1), R_{\boldsymbol{\chi}'}^{\tilde{\mathbf{G}}}(1) \rangle. \end{aligned}$$

Le lemme 14.5.2 découle alors du fait que tout caractère irréductible de W^{*F^*} est combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) de caractère de la forme $\operatorname{Ind}_{W_{\tilde{\mathbf{L}}}^{*F^*}}^{W^{*F^*}} 1$, où $\tilde{\mathbf{L}}$ parcourt l'ensemble des sous-groupes réguliers F-stables $\tilde{\mathbf{G}}$-déployés de $\tilde{\mathbf{G}}$ contenant $\tilde{\mathbf{T}}_0$ (cf [F]). ■

15. Le groupe spécial linéaire

15.1. Un premier paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. D'après le corollaire 14.5.2, la série de Lusztig (ou rationnelle) $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, [\tilde{s}])$ est égale à l'ensemble des composantes irréductibles de $R_{\tilde{\mathbf{M}}_1}^{\tilde{\mathbf{G}}} \chi_{\tilde{s}}^{\tilde{\mathbf{M}}_1}$. Par conséquent, la série rationnelle $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ est égale à l'ensemble des composantes irréductibles de $R_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}} \chi_s^{\mathbf{M}_1}$. Or, dans la proposition 13.3.2, on a construit une bijection que l'on notera ici

(15.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{M}_1, \chi_s^{\mathbf{M}_1}) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_\lambda(s) = \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}}(s). \end{array}$$

Ce paramétrage permettra de calculer très facilement l'induction de Harish-Chandra grâce au théorème 7.5.1. On va construire maintenant un deuxième paramétrage qui s'avérera plus pratique pour calculer l'induction de Deligne-Lusztig.

15.2. Restriction des $R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s})$. Soit χ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$. On définit de la même manière qu'au paragraphe 14.1,

$$\begin{aligned} R_{\boldsymbol{\chi}}(s) = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}}(s) &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\mathbf{T}^*_w}^{\mathbf{G}}(s) \\ &= \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\tilde{\mathbf{G}}^F} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}). \end{aligned}$$

Comme annoncé dans l'introduction, on va utiliser la connaissance des caractères irréductibles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ et la théorie de Clifford permettant de décrire la restriction à $\mathbf{G}^F$ des caractères irréductibles de $\tilde{\mathbf{G}}^F$. On remarque tout d'abord que, si $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$, alors

(15.2.1) $$R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \hat{z} = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}z)$$

(cela découle immédiatement de l'équation 6.2.3). Par conséquent, si $R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \hat{z} = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$, alors $\tilde{s}$ et $\tilde{s}z$ sont conjugués sous $\tilde{\mathbf{G}}^*$, c'est-à-dire $z \in A(s)^{F^*}$ (via le morphisme construit au paragraphe 12.3). Plus précisément,

Proposition 15.2.2. *Soient χ et χ' deux caractères irréductibles de $W(\tilde{s})^{F^*}$. Alors :*

(i) *Soit $\alpha \in A(s)^{F^*}$, et soit τ_α le caractère linéaire de $\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ qui lui est associé (cf paragraphe* 12.3*). Alors $R_{\boldsymbol{\chi}'}(\tilde{s}) = R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) \otimes \tau_\alpha$ si et seulement si $\boldsymbol{\chi}' = \boldsymbol{\chi} \circ \operatorname{ad}\alpha$.*

(ii) *On pose $A(s,\chi) = \{\alpha \in A(s) \mid \boldsymbol{\chi} \circ \operatorname{ad}\alpha = \boldsymbol{\chi}\}$. Alors $R_{\boldsymbol{\chi}}(s)$ est un caractère de $\mathbf{G}^F$ sans multiplicité et*

$$\langle R_{\boldsymbol{\chi}}(s), R_{\boldsymbol{\chi}}(s)\rangle_{\mathbf{G}^F} = |A(s,\chi)^{F^*}|.$$

(iii) *Le groupe $A(s,\chi)^{F^*}$ est égal au stabilisateur dans $A(s)^{F^*}$ du caractère χ de $W(\tilde{s})^{F^*}$. Il est isomorphe à un sous-groupe de $(\tilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$, donc on trouve un sous-groupe $\tilde{\mathbf{G}}^F(s,\chi)$ de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ contenant $\mathbf{G}^F$ (et même $\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$) tel que $(A(s,\chi)^{F^*})^\wedge$ est isomorphe à $\tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s,\chi)$: le groupe $\tilde{\mathbf{G}}^F(s,\chi)$ est le stabilisateur de $R_{\boldsymbol{\chi}}(s)$ dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$, et, via l'isomorphisme précédent, $(A(s,\chi)^{F^*})^\wedge$ opère de manière simplement transitive sur l'ensemble des composantes irréductibles de $R_{\boldsymbol{\chi}}(s)$.*

Preuve - Soit $\alpha \in A(s)^{F^*}$. Alors

$$\begin{aligned} R_{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{s}) \otimes \tau_\alpha &= \frac{1}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}^*_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \otimes \tau_\alpha \\ &= \frac{1}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}^*_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\alpha\tilde{s}\alpha^{-1}) \\ &= \frac{1}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(w\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}^*_{\alpha^{-1}w\alpha}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) \\ &= \frac{1}{|W(\tilde{s})|} \sum_{w \in W(\tilde{s})} \boldsymbol{\chi}^+(\alpha w\alpha^{-1}\phi) R_{\tilde{\mathbf{T}}^*_w}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}), \end{aligned}$$

ce qui montre le (i).

Le (ii) et le (iii) résultent du fait que la restriction d'un caractère irréductible de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ à $\mathbf{G}^F$ est sans multiplicité (cf [L5]), et de la théorie de Clifford. ■

Remarques - (1) Si on prend pour χ la signature sgn de $W(\tilde{s})^{F^*}$, alors $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{sgn}$ est la signature de $W(\tilde{s})$ et $R_{\mathbf{sgn}}(\tilde{s})$ est le caractère régulier $\chi_{\tilde{s}}$ défini au paragraphe 12.1. La proposition 15.2.2 est alors une généralisation de la proposition 12.3.2.

(2) Soit f un fonction centrale sur $W(\tilde{s})^{F^*}$. Si f est un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$, on a défini des caractères $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}^+$, $R_{\boldsymbol{f}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s})$ et $R_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}}(s)$ de $W(\tilde{s})$, $W(\tilde{s}) \rtimes \langle\phi\rangle$, $\tilde{\mathbf{G}}^F$ et $\mathbf{G}^F$ respectivement. On peut étendre ces définitions par linéarité au cas où f est une fonction centrale quelconque, en posant :

$$\boldsymbol{f} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \langle f, \chi\rangle \, \boldsymbol{\chi},$$

$$\boldsymbol{f}^+ = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \langle f, \chi\rangle \, \boldsymbol{\chi}^+,$$

$$R_{\boldsymbol{f}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \langle f, \chi\rangle \, R_{\boldsymbol{\chi}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\tilde{s}),$$

$$R_{\boldsymbol{f}}^{\mathbf{G}}(s) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \langle f, \chi\rangle \, R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}}(s).$$

Il est alors facile de vérifier, par un calcul analogue à celui de la preuve du lemme 14.5.1, que, si f et g sont deux fonctions centrales sur $W(\tilde{s})^{F^*}$, alors :

(15.2.3)
$$\langle f, g\rangle_{W(\tilde{s})^{F^*}} = \langle \boldsymbol{f}^+, \boldsymbol{g}^+\rangle_{W(\tilde{s})\phi}.$$

(3) De même, si f est une fonction centrale sur $W(s)^{F^*}$, on posera

$$\mathbf{R}_f^{\mathbf{G}}(s) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Irr} W(s)^{F^*}} \langle f, \lambda\rangle \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}}(s).$$

15.3. Un autre paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. On note H le sous-groupe de $\operatorname{Aut}(\tilde{\mathbf{T}}_1)$ engendré par $A(s)$ et ϕ. On notera $\tilde{\mathbf{M}}$ (respectivement $\tilde{\mathbf{M}}^*$) le centralisateur dans $\tilde{\mathbf{G}}$ (dans $\tilde{\mathbf{G}}^*$) du sous-tore $(\tilde{\mathbf{T}}_1^H)^\circ$ (respectivement $(\tilde{\mathbf{T}}_1^{*H^*})^\circ$). On rappelle que l'on a construit au paragraphe 13.2 un sous-groupe régulier F-stable $\tilde{\mathbf{M}}_1$ de $\tilde{\mathbf{G}}$: $\tilde{\mathbf{M}}_1$ est le centralisateur dans $\tilde{\mathbf{G}}$ de $(\tilde{\mathbf{T}}_1^\phi)^\circ$. Il est donc clair que $\tilde{\mathbf{M}}$ contient $\tilde{\mathbf{M}}_1$. D'autre part, $(\tilde{\mathbf{M}}^*, \tilde{\mathbf{T}}_1^*, F^*)$ est un triplet dual de $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{T}}, F^*)$. On pose alors

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} \cap \mathbf{G}, \qquad \mathbf{M}^* = i^*(\tilde{\mathbf{M}}^*).$$

On note $W_{\mathbf{M}}$ (respectivement $W_{\mathbf{M}}^*$) le groupe de Weyl de $\mathbf{M}$ (respectivement $\mathbf{M}^*$) relativement à $\mathbf{T}_1$ (respectivement $\mathbf{T}_1^*$). Le sous-groupe régulier $\mathbf{M}$ est le sous-groupe régulier $\mathbf{L}$ de la proposition 13.1.1 dans le cas où $A' = A(s)$. On définit les sous-groupes $W_{\mathbf{M}}(\tilde{s})$, $W_{\mathbf{M}}(s)$ et $A_{\mathbf{M}}(s)$ de $W_{\mathbf{M}}^*$ de manière analogue à $W(\tilde{s})$, $W(s)$ et $A(s)$. On a ici, d'après la proposition 13.1.1, $W_{\mathbf{M}}(\tilde{s}) = \{1\}$ et donc $W_{\mathbf{M}}(s) = A_{\mathbf{M}}(s) = A(s)$.

On a donc le diagramme suivant d'inclusion entre les sous-groupes réguliers concernés :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{M}_1 & \longrightarrow & \mathbf{M} & \longrightarrow & \mathbf{G} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{\mathbf{M}}_1 & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{M}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{G}}
\end{array}$$

qui induit la suite d'inclusion entre groupes

$$A_{\mathbf{M}_1}(s) \longrightarrow A_{\mathbf{M}}(s) \xrightarrow{\sim} A(s).$$

Le groupe $W(\tilde{s})^{F^*} = W(\tilde{s})^{F^*} \rtimes A(s)^{F^*}$ est un groupe du type de celui étudié dans le paragraphe 1.9 : en effet, $W(\tilde{s})^{F^*}$ est un produit de groupes symétriques et $A(s)^{F^*}$ agit sur ce produit simplement en permutant les composantes de ce produit.

On notera $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(s)$ (respectivement $\bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s)$) l'ensemble qui était noté $\mathcal{I}(W(\tilde{s})^{F^*}, A(s)^{F^*})$ (respectivement $\bar{\mathcal{I}}(W(\tilde{s})^{F^*}, A(s)^{F^*})$ dans la section 1 dont on reprend les notations ($\chi * \xi$, $\lambda_{\chi*\xi}$, ...). On rappelle que, si ξ est un caractère linéaire de $A(s)^{F^*}$, on note g_ξ un représentant, dans $\tilde{\mathbf{G}}^F$, de ξ via l'isomorphisme $(A(s)^{F^*})^\wedge \simeq \tilde{\mathbf{G}}^F/\tilde{\mathbf{G}}^F(s)$.

Théorème 15.3.1. *Il existe une et une seule bijection*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \\ \chi * \xi & \longmapsto & R_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s) = R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}}(s) \end{array}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

(α) *Le caractère $R_{\boldsymbol{\chi}}(s)$ se décompose de la manière suivante :*

$$R_{\boldsymbol{\chi}}(s) = \sum_{\xi \in (A(s,\chi)^{F^*})^\wedge} R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}}(s)$$

(β) *Pour tout caractère linéaire ξ de $A(s)^{F^*}$, on a*

$$^{g_\xi}R_{\boldsymbol{\chi},\xi'}(s) = R_{\boldsymbol{\chi},\xi_\chi\xi'}(s)$$

pour tout $\chi * \xi' \in \bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s)$, où ξ_χ désigne la restriction de ξ à $A(s,\chi)^{F^*}$.

(γ) *Soit $\xi \in (A(s,\chi)^{F^*})^\wedge$, et soient ξ_1 et ξ_2 deux caractères linéaires de $A(s)^{F^*}$ tels que $\mathrm{Res}_{A(s,\chi)^{F^*}}^{A(s)^{F^*}} \xi_1 = \xi$ et $\mathrm{Res}_{A(s,\chi)^{F^*}}^{A(s)^{F^*}} \xi_2 \neq \xi$. Alors*

$$\langle R_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_1}^{\mathbf{M}})\rangle_{\mathbf{G}^F} > \langle R_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s), R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_2}^{\mathbf{M}})\rangle_{\mathbf{G}^F}.$$

Preuve - D'après 1.5.2, on a une bijection que l'on notera

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}\, W(s)^{F^*} \\ \chi * \xi & \longmapsto & \lambda_{\chi*\xi}. \end{array}$$

Par conséquent, si on pose, pour tout $\chi * \xi \in \bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s)$,

$$R_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s) = \mathbf{R}_{\lambda_{\chi*\xi}}(s),$$

on obtient, d'après 15.1.1, une bijection

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \bar{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(s) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \\ & \chi * \xi & \longmapsto & R_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s). \end{array}$$

On va montrer tout d'abord que ϕ vérifie les propriétés (α), (β) et (γ) du théorème 15.3.1.

Le (α) résulte de la formule 7.4.4 et de la proposition 1.5.1. Le (β) résulte de la formule 7.4.3 et du fait que

$$\lambda_{\chi*\xi'} \otimes \xi = \lambda_{\chi*\xi'\xi_\chi}.$$

Il reste à montrer (γ).

D'après le théorème 7.5.1 et la proposition 13.3.2, on a, pour $i = 1$ ou 2,

$$\begin{aligned}
\langle R^{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s), R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\chi^{\mathbf{M}}_{s,\xi_i})\rangle_{\mathbf{G}^F} &= \langle \lambda_{\chi*\xi}, \mathrm{Ind}^{W(s)^{F^*}}_{A(s)^{F^*}} \xi_i\rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}\otimes\xi, \mathrm{Res}^{W(s)^{F^*}}_{W(s,\chi)^{F^*}} \mathrm{Ind}^{W(s)^{F^*}}_{A(s)^{F^*}} \xi_i\rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}\otimes\xi, \mathrm{Ind}^{W(s,\chi)^{F^*}}_{A(s,\chi)^{F^*}} \mathrm{Res}^{A(s)^{F^*}}_{A(s,\chi)^{F^*}} \xi_i\rangle \\
&= \langle (\mathrm{Res}^{W(s)^{F^*}}_{A(s,\chi)^{F^*}} \tilde{\chi})\otimes\xi, \mathrm{Res}^{A(s)^{F^*}}_{A(s,\chi)^{F^*}} \xi_i\rangle \\
&= \frac{1}{|A(s,\chi)^{F^*}|}\sum_{\alpha\in A(s,\chi)^{F^*}} \tilde{\chi}(\alpha)\xi(\alpha)\xi_i(\alpha)^{-1}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (γ) résulte alors du fait que $\tilde{\chi}(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in A(s,\chi)^{F^*}$.

L'unicité de ϕ vient du fait que (α) et (β) sont équivalentes au choix d'une composante irréductible particulière de $R_{\boldsymbol{\chi}}(s)$ pour tout caractère irréductible χ de $W(\tilde{s})^{F^*}$. La condition (γ) détermine de façon unique cette composante. ∎

Remarque - Comme dans la remarque de la fin du paragraphe 12.3, dont on reprend les notations (ψ', t et ξ_t), on peut facilement vérifier que, pour tout caractère linéaire ξ de $A(s,\chi)^{F^*}$,

(15.3.2) $$R^{\psi'}_{\boldsymbol{\chi},\xi} = R^{\psi}_{\boldsymbol{\chi},\xi\xi_t(\chi)},$$

où $\xi_t(\chi)$ désigne la restriction de ξ_t à $A(s,\chi)^{F^*}$.

15.4. Restriction à un sous-groupe réductif connexe de G de même type. On reprend les notations ($\mathbf{G}'$, s', …) du paragraphe 7.6.

Proposition 15.4.1. *Soit χ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$ et soit ξ un caractère linéaire de $A(s,\chi)^{F^*}$. Alors :*

$$\mathrm{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}'^F} R^{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s) = \sum_{\substack{\xi'\in(A(s',\chi)^{F^*})^\wedge \\ \xi'|_{A(s,\chi)^{F^*}}=\xi}} R^{\mathbf{G}'}_{\boldsymbol{\chi},\xi'}(s').$$

Preuve - Compte tenu de la proposition 7.6.1, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Ind}^{W(s')^{F^*}}_{W(s)^{F^*}} \lambda_{\chi*\xi} = \sum_{\substack{\xi'\in(A(s',\chi)^{F^*})^\wedge \\ \xi'|_{A(s,\chi)^{F^*}}=\xi}} \lambda'_{\chi*\xi'},$$

où

$$\lambda'_{\chi*\xi'} = \mathrm{Ind}^{W(s')^{F^*}}_{W(s',\chi)^{F^*}} \tilde{\chi}'\otimes\xi',$$

où $\tilde{\chi}'$ désigne l'extension canonique de χ à $W(s',\chi)^{F^*}$. Cela revient à montrer que

$$\mathrm{Ind}^{W(s',\chi)^{F^*}}_{W(s,\chi)^{F^*}} \tilde{\chi}\otimes\xi = \sum_{\substack{\xi'\in(A(s',\chi)^{F^*})^\wedge \\ \xi'|_{A(s,\chi)^{F^*}}=\xi}} \tilde{\chi}'\otimes\xi',$$

ce qui résulte, par application de la théorie de Clifford, du fait que $\tilde{\chi}$ est la restriction de $\tilde{\chi}'$ à $W(s,\chi)^{F^*}$. ∎

15.5. Caractères réguliers. On a montré (cf proposition 1.9.1) que tout caractère irréductible de $W(s)^{F^*}$ était combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'induits à partir de certains sous-groupes de caractères se factorisant via $W(\tilde{s})^{F^*}$. Cette propriété se transporte aux caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ grâce au théorème 7.5.1 de la manière suivante :

Théorème 15.5.1. *Tout caractère irréductible de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de caractères $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi}^{\mathbf{L}})$, où $\mathbf{L}$ est un sous-groupe régulier F-stable $\mathbf{G}$-déployé de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}_1$, et où ξ est un caractère linéaire de $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$.*

Preuve - On note Δ_s la base du système de racines Φ_s associée à $\mathbf{B}^*(s)$. Pour toute partie F^*-stable I de Δ_s on note W_I le sous-groupe parabolique de $W(\tilde{s})$ associé à I. On note A_I le stabilisateur, dans $A(s)^{F^*}$, de I.

D'après le théorème 13.4.1 et la proposition 1.9.1, il suffit, pour montrer le théorème 15.5.1, de prouver que, pour tout $I \subseteq \Delta_s$, il existe un sous-groupe régulier F^*-stable $\mathbf{G}^*$-déployé $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$, contenant $\mathbf{T}_1^*$ et tel que $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}) = W_I$ et tel que $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ contienne A_I (c'est-à-dire $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*} = W_I^{F^*} \rtimes A_I$). Soit donc I une partie F^*-stable de Δ_s. Il existe un sous-groupe régulier F^*-stable $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$-déployé $\mathbf{L}_1^*$ de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ contenant $\mathbf{T}_1^*$ tel que $W_{\mathbf{L}_1}(\tilde{s}) = W_{\mathbf{L}_1} = W_I$. Le groupe A_I normalise $\mathbf{L}_1$, donc normalise la partie déployée du centre de $\mathbf{L}_1$. On note Z_I la composante neutre du groupe des points fixes, sous l'action de A_I, de la partie déployée du centre de $\mathbf{L}_1$. On note $\mathbf{L}^*$ le centralisateur dans $\mathbf{G}^*$ de Z_I. C'est, d'après [BT], théorème 4.15, un sous-groupe régulier F^*-stable $\mathbf{G}^*$-déployé de $\mathbf{G}^*$. Le groupe $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ contient A_I car $A_I \subseteq W_{\mathbf{L}}^*$ par construction. Il reste à montrer que $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) = \mathbf{L}_1^*$ car on aura alors que $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*} = W_I^{F^*} \rtimes A_I$. Il est tout d'abord clair que $\mathbf{L}_1^* \subseteq C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$.

On note toujours ϕ l'automorphisme de $\mathbf{T}_1^*$ tel que $F(t) = \phi(t^q)$ pour tout $t \in \mathbf{T}_1^*$. On note $\mathcal{A}$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathbf{T}_1^*$ engendré par ϕ et A_I, et $\mathcal{W}$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathbf{T}_1^*$ égal à $W_{\mathbf{L}_1}(\tilde{s})$. On note aussi $\mathbf{H} = C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. On a alors

$$C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) = C_{\mathbf{H}}((\mathbf{T}_1^{\mathcal{W}\rtimes\mathcal{A}})^\circ).$$

Soit α une racine de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. On suppose α positive. D'après la proposition 2.1.1, on a :

$$\sum_{w\in\mathcal{W}\rtimes\mathcal{A}} w(\alpha) = 0.$$

On pose

$$\beta = \sum_{w\in\mathcal{W}} w(\alpha).$$

On a alors

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} a(\beta) = 0.$$

Supposons que $w(\alpha)$ soit une racine positive pour tout $w \in \mathcal{W}$. Alors β est une somme, à coefficients entiers naturels, de racines positives. Puisque $\mathcal{A}$ stabilise l'ensemble des racines positives, on en déduit une contradiction avec le fait que $\sum_{a\in\mathcal{A}} a(\beta) = 0$. Par suite, il existe $w \in \mathcal{W}$ tel que $w(\alpha)$ soit négative, ce qui montre que α est une racine de $\mathbf{L}_1^*$, car $\mathcal{W}$ est un sous-groupe parabolique standard de $W(\tilde{s})$. D'où le résultat. ■

16. Foncteur de Lusztig dans le groupe spécial linéaire

16.1. Notations. Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un dual de $\mathbf{L}$ contenu dans $\mathbf{G}^*$. On suppose que $s \in \mathbf{L}^*$. On notera par la suite $\mathbf{P}^*$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}^*$ dont $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi. On note $\tilde{\mathbf{L}}$ l'unique sous-groupe régulier (F-stable) de $\tilde{\mathbf{G}}$ tel que $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$, et $\tilde{\mathbf{L}}^*$ l'image réciproque par i^* de $\mathbf{L}^*$. On rappelle que, d'après le lemme 12.3.1, l'injection canonique $C_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)$ induit un morphisme injectif

$$C_{\mathbf{L}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$$

commutant avec l'action du morphisme de Frobenius. D'autre part, $C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s)$ est un sous-groupe parabolique de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ dont $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi.

Comme dans le paragraphe 3.2, on peut réaliser $A(s)$ comme un groupe d'automorphismes quasi-centraux de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. On note $A_{\mathbf{L}}(s)$ l'image de $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ par le morphisme composé

$$C_{\mathbf{L}^*}(s) \longrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s) \longrightarrow A(s).$$

Puisque le centre de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est connexe, il existe un élément g de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tel que le couple ${}^g(C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s), C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s))$ soit stable sous $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ (cf proposition 3.2.1 et la remarque qui la suit). On suppose donc que le couple $(C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s), C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s))$ est stable sous $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$. D'après le corollaire 2.5.2, il existe un couple $(\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}(s))$ où $\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}(s)$ est un sous-groupe de Borel $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$-stable et F^*-stable de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$ est un tore maximal $A^{F^*}_{\mathbf{L}}(s)$-stable et F^*-stable de $\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}(s)$. On note $\mathbf{U}^*_{\mathbf{P}}(s)$ le radical unipotent de $C^\circ_{\mathbf{P}^*}(s)$: il est $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$-stable. Par suite, $\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}(s).\mathbf{U}^*_{\mathbf{P}}(s)$ est un sous-groupe de Borel $A^*_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$-stable de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. Par suite, d'après la proposition 2.4.2, il existe un élément g de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ stable sous $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ tel que

$${}^g(\mathbf{T}^*_1, \mathbf{B}^*(s)) = (\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}(s).\mathbf{U}^*_{\mathbf{P}}(s)).$$

Alors $g^{-1}F^*(g)$ normalise $\mathbf{T}^*_1$ et on note $w_{\mathbf{L}}$ la classe de $g^{-1}F^*g$ dans $W(\tilde{s})$.

Via $\operatorname{ad} g^{-1}$, le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$ peut être vu comme un sous-groupe de $W(s)$, que l'on note $W_{\mathbf{L}}(s)$, qui contient $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et sur lequel le morphisme de Frobenius agit comme $w_{\mathbf{L}}F^*$. De plus, w_L est stable sous $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$, donc $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*} = A_{\mathbf{L}}(s)^{w_L F^*}$.

16.2. Énoncé du théorème. On notera $\mathcal{I}^\vee_{\mathbf{G}}(s)$ (respectivement $\bar{\mathcal{I}}^\vee_{\mathbf{G}}(s)$) l'ensemble qui était noté $\mathcal{I}^\vee(W(\tilde{s})^{F^*}, A(s)^{F^*})$ (respectivement $\bar{\mathcal{I}}^\vee(W(\tilde{s})^{F^*}, A(s)^{F^*})$) dans le paragraphe 1.8 dont on reprend les notations ($\chi * \alpha$, $\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}$ …).

On posera, pour tout $\chi * \alpha \in \bar{\mathcal{I}}^\vee_{\mathbf{G}}(s)$,

$$\hat{R}^{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}(s) = \sum_{\xi \in (A(s,\chi)^{F^*})^\wedge} \overline{\xi(\alpha)} R^{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\chi},\xi}(s) (= \mathbf{R}^{\mathbf{G}}_{\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}}(s)),$$

où $\mathbf{R}^{\mathbf{G}}_{\hat{\lambda}_{\chi*\alpha}}(s)$ est défini par linéarité dans la remarque 3 suivant la proposition 15.2.2. D'après la proposition 1.8.2, la famille $(\hat{R}^{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}(s))_{\chi*\alpha \in \bar{\mathcal{I}}^\vee_{\mathbf{G}}(s)}$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Soit $\alpha \in A(s)^{F^*}$. On notera $W(\tilde{s}, \alpha)$ le centralisateur de α dans $W(\tilde{s})$: c'est un sous-groupe F^*-stable de $W(\tilde{s})$, isomorphe à un produit de groupes symétriques permutés par F^*.

D'après la proposition 1.4.2, il correspond à χ un caractère irréductible χ_α de $W(\tilde{s}, \alpha)^{F^*}$ et, toujours d'après la même proposition, il correspond à χ_α un caractère irréductible $\boldsymbol{\chi}^+_\alpha$ de $W(\tilde{s}, \alpha) \rtimes \langle \phi \rangle$. On notera encore $\boldsymbol{\chi}^+_\alpha$ la restriction de $\boldsymbol{\chi}^+_\alpha$ à la classe $W(\tilde{s}, \alpha)\phi$. Il est clair que $(\boldsymbol{\chi}_\alpha^+)_{\chi\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha}$ est une base de l'espace des fonctions sur $W(\tilde{s},\alpha)\phi$ invariantes par $W(\tilde{s},\alpha)$-conjugaison.

Théorème 16.2.1. ***On suppose les conjectures* $(\mathfrak{M})$ *et* (GG) *vraies***. *Soit $\alpha \in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et soit χ un caractère irréductible de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{w_{\mathbf{L}}F^*}$ stable sous α. On écrit :*

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \boldsymbol{\chi}_\alpha^+ = \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha} n_\zeta \boldsymbol{\zeta}_\alpha^+,$$

où les n_ζ sont dans $\mathbb{K}$ ($\zeta \in (\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha$). Alors :

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}}(s)) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)^\alpha}\varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)^\alpha} \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha} n_\zeta \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}}(s),$$

où $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)^\alpha$ (respectivement $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)^\alpha$) désigne le centralisateur de α dans $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ (respectivement $C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)$).

Remarque - (1) Compte tenu de la formule du (b) du lemme 1.8.2, le théorème 16.2.1 décrit complètement les foncteurs de Lusztig entre sous-groupes réguliers F-stables du groupe spécial linéaire.

(2) Si $\alpha = 1$, alors $\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},1}^{\mathbf{L}}(s) = R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{L}}(s)$, et le résultat du théorème 16.2.1 est bien connu, car il s'obtient par restriction de $\tilde{\mathbf{G}}^F$ à $\mathbf{G}^F$ à partir du lemme 14.2.2.

La fin de cette section est consacrée à la démonstration du théorème 16.2.1.

On notera $S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \mathcal{C}(\mathbf{L}^F) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}^F)$ le foncteur défini par le membre de droite de la formule du théorème 16.2.1. Cela signifie que, pour tout $(\chi,\alpha) \in \mathcal{I}_{\mathbf{L}}^\vee(s)$, on pose

$$S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{R}_{\boldsymbol{\chi},\alpha}^{\mathbf{L}}(s)) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)^\alpha}\varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)^\alpha} \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha} n_\zeta \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}}(s),$$

où les n_ζ sont définis par

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \boldsymbol{\chi}_\alpha^+ = \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha} n_\zeta \boldsymbol{\zeta}_\alpha^+.$$

Le théorème 16.2.1 est équivalent au fait que les foncteurs $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ coïncident.

16.3. Cas déployé. On suppose ici que $\mathbf{L}$ est $\mathbf{G}$-déployé. On peut donc supposer que $\mathbf{T}_1$ est inclus dans $\mathbf{L}$ et que $w_{\mathbf{L}} = 1$. Dans ce cas-là, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)^\alpha}\varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}^\circ(s)^\alpha} = 1$. Nous allons voir que $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ coïncident dans ce cas : comme $\mathbf{L}$ est $\mathbf{G}$-déployé, le foncteur $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ est donné par l'induction entre les groupes $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et $W(s)^{F^*}$ (cf théorème 13.4.1), et il faut donc montrer que :

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \hat{\lambda}_{\chi*\alpha}^{\mathbf{L}} = \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^\alpha} n_\zeta \hat{\lambda}_{\zeta*\alpha}^{\mathbf{G}}.$$

Soit ζ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$ stable sous α. En faisant le produit scalaire des deux membres avec $\hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}$, on est ramené à montrer que

$$\begin{aligned}\langle \hat{\lambda}^{\mathbf{L}}_{\chi*\alpha}, \operatorname{Res}^{W(s)^{F^*}}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}} \hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}\rangle &= \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}/A(s,\zeta)^{F^*}} n_{\beta\zeta}\langle \hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}, \hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\beta\zeta*\alpha}\rangle \\ &= |A(s,\zeta)^{F^*}| \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}/A(s,\zeta)^{F^*}} n_{\beta\zeta} \\ &= \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}} n_{\beta\zeta}.\end{aligned}$$

On a, d'après le (i) de la proposition 1.8.2 :

$$\begin{aligned}\langle \hat{\lambda}^{\mathbf{L}}_{\chi*\alpha}, \operatorname{Res}^{W(s)^{F^*}}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}} \hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}\rangle &= \frac{|A_{\mathbf{L}}(s,\chi)^{F^*}|.|A(s,\zeta)^{F^*}|}{|W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|} \sum_{w\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}} \lambda_{\chi*1}(w\alpha)\overline{\lambda_{\zeta,1}(w\alpha)} \\ &= \frac{|A_{\mathbf{L}}(s,\chi)^{F^*}|.|A(s,\zeta)^{F^*}|}{|W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|} \\ &\quad\times \sum_{w\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}} \sum_{\substack{\beta\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}/A_{\mathbf{L}}(s,\chi)^{F^*}\\ \beta'\in A(s)^{F^*}/A(s,\zeta)^{F^*}}} \tilde{\chi}({}^{\beta}w.\alpha)\overline{\tilde{\zeta}({}^{\beta'}w.\alpha)} \\ &= \frac{|A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|.|A(s,\zeta)^{F^*}|}{|W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|} \sum_{w\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}} \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}/A(s,\zeta)^{F^*}} \tilde{\chi}(w\alpha)\overline{\tilde{\zeta}({}^{\beta}w.\alpha)} \\ &= \frac{1}{|W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}|} \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}} \Big(\sum_{w\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})^{F^*}} \tilde{\chi}(w\alpha)\,{}^{\beta}\tilde{\zeta}(w\alpha).\Big)\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.4.2, il existe une application $\pi_\alpha : W(\tilde{s})^{F^*} \to W(\tilde{s},\alpha)^{F^*}$ telle que

$$\chi(w\alpha) = \chi_\alpha(\pi_\alpha(w))$$

pour tout $w \in W(\tilde{s})$, et de même pour $\tilde{\zeta}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\langle \hat{\lambda}^{\mathbf{L}}_{\chi*\alpha}, \operatorname{Res}^{W(s)^{F^*}}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}} \hat{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\zeta*\alpha}\rangle &= \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}} \langle \chi_\alpha, \operatorname{Res}^{W(\tilde{s},\alpha)^{F^*}}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)^{F^*}} \zeta_\alpha\rangle \\ &= \sum_{\beta\in A(s)^{F^*}} n_{\beta\zeta},\end{aligned}$$

car il existe, toujours d'après la proposition 1.4.2, une application $\pi'_\alpha : W(\tilde{s},\alpha) \to W(\tilde{s},\alpha)^{F^*}$ telle que, pour tout $w \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)$, on ait :

$$\boldsymbol{\chi}^{+}_{\alpha}(w\phi) = \chi_\alpha(\pi'_\alpha(w))$$

et de même pour ζ.

16.4. Produits scalaires d'induits de caractères réguliers. Soit $\mathbf{K}$ un sous-groupe régulier F-stable $\mathbf{G}$-déployé de $\mathbf{G}$. De la même manière que pour $\mathbf{L}$, on peut supposer que $A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$ est contenu dans $A(s)^{F^*}$.

Proposition 16.4.1. ***On suppose les conjectures*** **($\mathfrak{M}$)** ***et*** **(GG)** ***vraies.*** *Soient $\xi_{\mathbf{L}}$ et $\xi_{\mathbf{K}}$ deux caractères linéaires de $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et $A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$ respectivement. Alors :*

$$\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}), R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_{\mathbf{K}}}^{\mathbf{K}})\rangle = \langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}), S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi_{\mathbf{K}}}^{\mathbf{K}})\rangle.$$

Preuve - On peut supposer, comme dans la démonstration du théorème 12.5.1, que $\xi_{\mathbf{K}} = 1$. On pose alors $\xi = \xi_{\mathbf{L}}$. On note $\operatorname{sgn}_{\mathbf{K}}$ la signature de $W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$. On a :

$$\lambda_{\operatorname{sgn}_{\mathbf{K}}*1}^{\mathbf{K}} = \frac{1}{|A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}|} \sum_{\alpha\in A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}} \hat{\lambda}_{\operatorname{sgn}_{\mathbf{K}}*\alpha}.$$

Soit $\alpha \in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*} \cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$. On écrit :

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \operatorname{sgn}_{\mathbf{L},\alpha}^{+} = \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^{\alpha}} n_\zeta \boldsymbol{\zeta}_{\alpha}^{+},$$

$$\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \operatorname{sgn}_{\mathbf{K},\alpha}^{+} = \sum_{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^{\alpha}} m_\zeta \boldsymbol{\zeta}_{\alpha}^{+}.$$

Soit ζ un caractère irréductible de $W(\tilde{s})^{F^*}$ stable sous α. On a alors :

$$\langle \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}}(s), \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}}(s)\rangle = \begin{cases} |A(s,\zeta)^{F^*}| & \text{si } \zeta \text{ et } \zeta' \text{ sont conjugués sous } A(s)^{F^*}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\sum_{\zeta,\zeta'\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^{\alpha}} n_\zeta m_{\zeta'} \langle \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta},\alpha}^{\mathbf{G}}(s), \hat{R}_{\boldsymbol{\zeta}',\alpha}^{\mathbf{G}}(s)\rangle = \sum_{\substack{\zeta\in(\operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*})^{\alpha} \\ \beta\in A(s)^{F^*}}} n_\zeta m_{{}^{\beta}\zeta}.$$

et donc

$$\langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi}^{\mathbf{L}}), S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}^{\mathbf{K}})\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}\cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*} \\ \beta\in A(s)^{F^*}}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)^{\alpha}}\varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)^{\alpha}}\xi(\alpha)\langle \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \operatorname{sgn}_{\mathbf{L},\alpha}^{+}, \operatorname{Ind}_{{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} {}^{\beta}\operatorname{sgn}_{\mathbf{K},\alpha}^{+}\rangle$$

D'autre part, la restriction de $\operatorname{sgn}_{\mathbf{G},\alpha}^{+}$ à $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi$ est égale à $\operatorname{sgn}_{\mathbf{G},\alpha}^{+}(w_{\mathbf{L}}\phi)\operatorname{sgn}_{\mathbf{L},\alpha}^{+}$ et de même pour $\mathbf{K}$. D'autre part, $\operatorname{sgn}_{\mathbf{G},\alpha}^{+}(w_{\mathbf{L}}\phi) = \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}^{\circ}(s)^{\alpha}}\varepsilon_{C_{\mathbf{L}^*}^{\circ}(s)^{\alpha}}$. En appliquant la formule de Mackey à l'intérieur du groupe de Weyl, on obtient

$$|A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|.|A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}|\langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,\xi}^{\mathbf{L}}), S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}^{\mathbf{K}})\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}\cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*} \\ \beta\in A(s)^{F^*}}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\xi(\alpha)\langle (\operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} 1) \otimes \operatorname{sgn}_{\mathbf{G},\alpha}^{+}, (\operatorname{Ind}_{{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} 1) \otimes {}^{\beta}\operatorname{sgn}_{\mathbf{G},\alpha}^{+}\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}\cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*} \\ \beta\in A(s)^{F^*}}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\xi(\alpha)\langle \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} 1, \operatorname{Ind}_{{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} 1\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}\cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}\\ \beta\in A(s)^{F^*}}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\xi(\alpha) \sum_{\substack{x\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)\backslash W(\tilde{s},\alpha)/{}^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\\ W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\cap x^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)F^*(x)^{-1}\neq\varnothing}} 1$$

et donc, compte tenu du théorème 12.5.1, la proposition 16.4.1 est équivalente au lemme technique suivant :

Lemme 16.4.2. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\frac{1}{|A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}|.|A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}|} \sum_{\substack{\alpha\in A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}\cap A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}\\ \beta\in A(s)^{F^*}}} \sum_{\substack{x\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)\backslash W(\tilde{s},\alpha)/{}^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\\ W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\cap x^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)F^*(x)^{-1}\neq\varnothing}} \xi(\alpha)$$
$$= \sum_{\substack{x\in W'_{\mathbf{L}}(s)\backslash W'(s)/W'_{\mathbf{K}}(s)\\ W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\cap xW_{\mathbf{K}}(\tilde{s})F^*(x)^{-1}\neq\varnothing}} \langle\xi,1\rangle_{W'_{\mathbf{L}}(s)\cap {}^xW'_{\mathbf{K}}(s)}.$$

Preuve - Pour cette démonstration, on va abréger quelques notations : on notera A (respectivement $A_{\mathbf{K}}$, respectivement $A_{\mathbf{L}}$) le groupe $A(s)^{F^*}$ (respectivement $A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$, respectivement $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$). On posera d'autre part $A_{\mathbf{KL}} = A_{\mathbf{K}}.A_{\mathbf{L}}$, et $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}} = A_{\mathbf{K}}\cap A_{\mathbf{L}}$. On a alors :

$$|A_{\mathbf{KL}}|.|A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}| = |A_{\mathbf{K}}|.|A_{\mathbf{L}}|.$$

On notera $\mathcal{M}$ un ensemble de représentants des double-classes $x\in W'_{\mathbf{L}}(s)\backslash W'(s)/W'_{\mathbf{K}}(s)$ intervenant dans le membre de droite du lemme 16.4.2, c'est-à-dire telles que

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}}\cap xW_{\mathbf{K}}(\tilde{s})F^*(x)^{-1}\neq\varnothing.$$

Si $x\in\mathcal{M}$, on notera A_x le sous-groupe de A formé des éléments $\alpha\in A$ congrus modulo $W(\tilde{s})$ à un élément de $W'_{\mathbf{L}}(s)\cap {}^xW'_{\mathbf{K}}(s)$. On notera $\mathcal{M}'$ l'ensemble des couples (x,α) tels que $x\in\mathcal{M}$ et $\alpha\in A_x$. Le second membre de la formule du lemme 16.4.2 est égal, avec ces notations, à :

$$\sum_{(x,\alpha)\in\mathcal{M}'}\frac{\xi(\alpha)}{|A_x|}.$$

On remarque que A_x est contenu dans $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$.

Soit $\bar{\beta}\in A/A_{\mathbf{KL}}$. On note $\mathcal{M}(\bar{\beta})$ (respectivement $\mathcal{M}'(\bar{\beta})$) l'ensemble des $x\in\mathcal{M}$ (respectivement des couples $(x,\alpha)\in\mathcal{M}'$) tels que la classe de x modulo $W(\tilde{s})\rtimes A_{\mathbf{KL}}$ soit égale à $\bar{\beta}$ (cette classe ne dépend pas du choix du représentant x). Si $\beta\in A$, on notera $\bar{\beta}$ la classe de β dans $A/A_{\mathbf{KL}}$ et on posera $\mathcal{M}(\beta)=\mathcal{M}(\bar{\beta})$ et $\mathcal{M}'(\beta)=\mathcal{M}'(\bar{\beta})$. Le second membre de la formule de la proposition 16.4.2 devient alors égal à :

$$\frac{1}{|A_{\mathbf{KL}}|}\sum_{\beta\in A}\sum_{(x,\alpha)\in\mathcal{M}'(\beta)}\frac{\xi(\alpha)}{|A_x|}.$$

Pour montrer le lemme 16.4.2, il suffit de montrer que, pour tout $\beta\in A$, on a :

(16.4.3)
$$\frac{1}{|A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}|}\sum_{\alpha\in A_{\mathbf{K}}\cap A_{\mathbf{L}}} \sum_{\substack{x\in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)\backslash W(\tilde{s},\alpha)/{}^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)\\ W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha)w_{\mathbf{L}}\cap x^\beta W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha)F^*(x)^{-1}\neq\varnothing}}\xi(\alpha) = \sum_{(x,\alpha)\in\mathcal{M}'(\beta)}\frac{\xi(\alpha)}{|A_x|}.$$

On se fixe un élément $\beta\in A$. On va montrer la formule 16.4.3. Soit $x\in\mathcal{M}(\beta)$. Quitte à remplacer x par un autre représentant de sa double classe, on peut supposer que $x\beta^{-1}\in W(\tilde{s})$. On écrit $x=w\beta$, avec $w\in W(\tilde{s})$. On note $\Omega(x)$ l'orbite sous l'action de $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$ de la double classe de w dans $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})\backslash W(\tilde{s})/{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$. On remarque que $\Omega(x)$ ne dépend pas du choix du représentant de x.

On note $\mathcal{O}(\beta)$ un ensemble de représentants de doubles classes de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})\backslash W(\tilde{s})/{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$ telles que

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})w_{\mathbf{L}} \cap x^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})F^*(x)^{-1} \neq \varnothing.$$

On notera $\bar{\mathcal{O}}(\beta)$ l'ensemble des orbites sous l'action de $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$ de $\mathcal{O}(\beta)$. Si $z \in \mathcal{O}(\beta)$, on notera $\omega(z)$ l'orbite de z sous $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$. Si $x \in \mathcal{M}(\beta)$, alors $\Omega(x) \in \bar{\mathcal{O}}(\beta)$.

Lemme 16.4.4. *L'application $\Omega : \mathcal{M}(\beta) \to \bar{\mathcal{O}}(\beta)$ est bijective.*

Preuve - La surjectivité de Ω est évidente, il faut voir que Ω est injective. Soient x et x' dans $\mathcal{M}(\beta)$ tels que $\Omega(x) = \Omega(x')$: on suppose que $x\beta^{-1} \in W(\tilde{s})$ et $x'\beta^{-1} \in W(\tilde{s})$. On trouve $\alpha \in A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$, $w_1 \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ et $w_2 \in W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$ tels que

$$x\beta^{-1} = {}^{\alpha}(w_1 x'\beta^{-1\beta}w_2),$$

c'est-à-dire

$$y = {}^{\alpha}(w_1 y' w_2),$$

ce qui montre que la double classe de x dans $W'_{\mathbf{L}}(\tilde{s})\backslash W'(s)/W'_{\mathbf{K}}(s)$ est égale à celle de x'. □

Soit $z \in \mathcal{O}(\beta)$. Si $x \in \mathcal{M}(\beta)$ est tel que $\Omega(x) = \omega(z)$, alors $A_{z\beta} = A_x$. D'autre part, $A_{z\beta}$ ne dépend que de l'orbite de z sous $A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$. Le second membre de la formule de l'équation 16.4.3 est donc égal à :

$$\sum_{z\in\mathcal{O}(\beta)} \frac{1}{|\omega(z)|.|A_{z\beta}|} \sum_{\alpha\in A_{z\beta}} \xi(\alpha).$$

On note alors $\mathcal{O}'(\beta)$ l'ensemble des couples (z, α) tels que $z \in \mathcal{O}(\beta)$ et $\alpha \in A_{z\beta}$. Le second membre de l'équation 16.4.3 devient alors égal à :

$$\sum_{(z,\alpha)\in\mathcal{O}'(\beta)} \frac{\xi(\alpha)}{|\omega(z)|.|A_{z\beta}|}.$$

Lemme 16.4.5. *Soit $z \in \mathcal{O}(\beta)$ et soit $\alpha \in A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\alpha \in A_{z\beta}$,

(b) ${}^{\alpha}(W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})z^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})) = W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})z^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$,

(c) *Il existe, dans $W(\tilde{s}, \alpha)$, un représentant de la double classe de z.*

Preuve - • Supposons que $\alpha \in A_{z\beta}$. On trouve $w \in W(\tilde{s})$, $w_1 \in W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$, $\alpha_1 \in A_{\mathbf{L}}$, $w_2 \in {}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$ et $\alpha_2 \in A_{\mathbf{K}}$ tels que :

$$w\alpha = w_1\alpha_1 = {}^{z}w_2\alpha_2.$$

Par réduction modulo $W(\tilde{s})$, on obtient que $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Par suite,

$$w_1\alpha z\alpha^{-1}w_2^{-1} = z,$$

donc la double classe de z est stable sous α. Donc (a) implique (b).

- Le fait que (c) implique (a) est clair.
- Montrons que (b) implique (c). On écrit :

$$W(\tilde{s}) = \prod_{i=1}^{r}(\underbrace{W_i \times \cdots \times W_i}_{d_i \text{ fois}})$$

où r et les d_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) sont des entiers naturels non nuls, et où, pour tout élément $w = (w_{i1}, \ldots, w_{id_i})_{1 \leqslant i \leqslant r} \in W(\tilde{s})$, on a :

$$^{\alpha}w = (w_{i2}, \ldots, w_{id_i}, w_{i1})_{1 \leqslant i \leqslant r}.$$

Les groupes $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$ et $W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$ étant α-stables, ils sont de la forme :

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}) = \prod_{i=1}^{r}(\underbrace{W_{\mathbf{L},i} \times \cdots \times W_{\mathbf{L},i}}_{d_i \text{ fois}}),$$

$$W_{\mathbf{K}}(\tilde{s}) = \prod_{i=1}^{r}(\underbrace{W_{\mathbf{K},i} \times \cdots \times W_{\mathbf{K},i}}_{d_i \text{ fois}}),$$

où $W_{\mathbf{L},i}$ et $W_{\mathbf{K},i}$ sont des sous-groupes de W_i ($1 \leqslant i \leqslant r$). Soit $w = (w_{i1}, \ldots, w_{id_i})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un élément de z. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on a :

$$W_{\mathbf{L},i}w_{i1}W_{\mathbf{K},i} = \cdots = W_{\mathbf{L},i}w_{id_i}W_{\mathbf{K},i}.$$

On pose $w' = (w_{i1}, \ldots, w_{i1})_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Alors $w' \in z$ et $^{\alpha}w' = w'$. $\square$

Le lemme 16.4.5 montre que, si $z \in \mathcal{O}(\beta)$, alors

$$|\omega(z)| = \frac{|A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}|}{|A_{z\beta}|},$$

donc le second membre de 16.4.3 s'écrit

$$\sum_{(z,\alpha)\in\mathcal{O}'(\beta)} \frac{\xi(\alpha)}{|A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}|}.$$

On notera $\mathcal{N}(\beta)$ l'ensemble des couples (x, α) où $\alpha \in A_{\mathbf{K}\wedge\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et x est une double classe de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}, \alpha)\backslash W(\tilde{s}, \alpha)/{}^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s}, \alpha)$ telle que

$$W_{\mathbf{L}}(\tilde{s}, \alpha)w_{\mathbf{L}} \cap x^{\beta}W_{\mathbf{K}}(\tilde{s}, \alpha)F^*(x)^{-1} \neq \varnothing.$$

L'équation 16.4.3 peut donc s'écrire :

(16.4.6) $$\sum_{(x,\alpha)\in\mathcal{N}(\beta)} \xi(\alpha) = \sum_{(z,\alpha)\in\mathcal{O}'(\beta)} \xi(\alpha).$$

Soit $(x, \alpha) \in \mathcal{N}(\beta)$. On note $\nu(x)$ l'élément de $\mathcal{O}(\beta)$ représentant la double classe de x dans $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})\backslash W(\tilde{s})/W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$, et on pose :

$$\nu'(x, \alpha) = (\nu(x), \alpha).$$

Alors $\nu'(x, \alpha)$ appartient à $\mathcal{O}'(\beta)$. Il suffit alors de montrer le

Lemme 16.4.7. *L'application $\nu' : \mathcal{N}(\beta) \to \mathcal{O}'(\beta)$ est bijective.*

Preuve - L'équivalence du (a) et du (c) du lemme 16.4.5 montre que ν' est surjective. On va montrer que ν' est injective. Soient (x, α) et (x', α') dans $\mathcal{N}(\beta)$ tels que $\nu'(x, \alpha) = \nu'(x', \alpha')$. Alors $\alpha = \alpha'$. On reprend les notations de la démonstration du lemme 16.4.5 (W_i, $W_{\mathbf{L},i}$, $W_{\mathbf{K},i}$, ...). Soit $w = (w_i, \ldots, w_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un élément de x et soit $w' = (w'_i, \ldots, w'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un élément de x'. On a alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $W_{\mathbf{L},i}w_iW_{\mathbf{K},i} = W_{\mathbf{L},i}w'_iW_{\mathbf{K},i}$. Par suite, $x = x'$. $\square$

Le lemme 16.4.7 termine la démonstration de la proposition 16.4.1. ■

16.5. Preuve du théorème 16.2.1. On va tout d'abord montrer que les foncteurs $S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sont transitifs, c'est-à-dire :

Lemme 16.5.1. *Soit* $\mathbf{K}$ *un sous-groupe régulier* F*-stable de* $\mathbf{L}$. *Alors :*

$$S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}} = S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{L}}.$$

Preuve - On peut supposer que le groupe $A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$ est contenu dans $A_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$. Soit $\alpha_{\mathbf{K}}$ un générateur de $A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$. D'après la construction du paragraphe 16.1, il existe un élément $w_{\mathbf{K}}$ de $W_{\mathbf{L}}(\tilde{s})$, commutant avec α et tel que le morphisme de Frobenius sur $W_{\mathbf{K}}(\tilde{s})$ (vu comme sous-groupe de $W(\tilde{s})$) soit égal à $w_{\mathbf{K}} w_{\mathbf{L}} F^*$. Le lemme 16.5.1 résulte alors du fait que, pour tout $\alpha \in A_{\mathbf{K}}(s)^{F^*}$, on a :

$$\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha) w_{\mathbf{K}} w_{\mathbf{L}} \phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} = \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha) w_{\mathbf{L}} \phi}^{W(\tilde{s},\alpha)\phi} \circ \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{K}}(\tilde{s},\alpha) w_{\mathbf{K}} w_{\mathbf{L}} \phi}^{W_{\mathbf{L}}(\tilde{s},\alpha) w_{\mathbf{L}} \phi} . \blacksquare$$

Soient ρ un caractère irréductible de $\mathbf{L}^F$ et ρ' un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$. Pour montrer le théorème 16.2.1, il suffit de montrer que :

$$\textbf{(16.5.2)} \qquad \langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\rho), \rho' \rangle = \langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\rho), \rho' \rangle.$$

D'après le théorème 15.5.1, on peut écrire :

$$\rho = \sum_{\mathbf{J}} R_{\mathbf{J}}^{\mathbf{L}}(\chi_{\mathbf{J}}),$$

$$\rho' = \sum_{\mathbf{K}} R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{K}}),$$

où $\mathbf{J}$ (respectivement $\mathbf{K}$) parcourt l'ensemble des sous-groupes réguliers F-stables $\mathbf{L}$-déployés de $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{G}$-déployés de $\mathbf{G}$), et où $\chi_{\mathbf{J}}$ (respectivement $\chi_{\mathbf{K}}$) est une somme de caractères réguliers de $\mathbf{J}^F$ (respectivement $\mathbf{K}^F$). Compte tenu du fait que le théorème 16.2.1 est vrai pour les sous-groupes réguliers $\mathbf{G}$-déployés (ou $\mathbf{L}$-déployés si on induit jusqu'à $\mathbf{L}$), on a :

$$\rho = \sum_{\mathbf{J}} S_{\mathbf{J}}^{\mathbf{L}}(\chi_{\mathbf{J}}),$$

$$\rho' = \sum_{\mathbf{K}} S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{K}}),$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\rho), \rho' \rangle &= \langle \sum_{\mathbf{J}} R_{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{J}}), \sum_{\mathbf{K}} R_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{K}}) \rangle \\
&= \langle \sum_{\mathbf{J}} S_{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{J}}), \sum_{\mathbf{K}} S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{K}}) \rangle \\
&= \langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \sum_{\mathbf{J}} S_{\mathbf{J}}^{\mathbf{L}}(\chi_{\mathbf{J}}), \sum_{\mathbf{K}} S_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\chi_{\mathbf{K}}) \rangle \\
&= \langle S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\rho), \rho' \rangle,
\end{aligned}$$

la deuxième égalité résultant de la proposition 16.4.1, et la troisième de la transitivité des foncteurs $S_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ (cf lemme 16.5.1). Cela termine la démonstration de 16.5.2 et donc du théorème 16.2.1. ■

17. Paramétrage de Lusztig

Le but de cette section est d'établir un paramétrage de Lusztig (c'est-à-dire une bijection $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s]) \to \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*},1))$ qui commute avec les foncteurs d'induction de Lusztig : c'est le théorème 17.3.1. Pour cela, il faut étudier les caractères unipotents du groupe non connexe $C_{\mathbf{G}^*}(s)$, et surtout en obtenir un paramétrage. Cela sera fait dans les dernières sections à venir. Cependant, nous utiliserons les résultats de ces dernières sections ici.

17.1. Caractères unipotents de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. D'après la proposition 3.4.2, l'étude des caractères unipotents du groupe $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ est équivalente à l'étude des caractères unipotents du groupe $\mathbf{H}$ image réciproque dans $\tilde{\mathbf{G}}^*$ de $C_{\mathbf{G}^*}(s)$.

Lemme 17.1.1. *Le groupe $A(s)$ se relève en un sous-groupe F^*-stable de H, de sorte que $\mathbf{H}$ soit un produit en couronne de $\mathbf{H}^\circ$ par $A(s)$.*

Preuve - Il suffit de montrer le résultat pour le groupe $B = N_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\mathbf{H}^\circ)/\mathbf{H}^\circ$ à la place de $A(s)$. Le couple $(\tilde{\mathbf{G}}^*, F^*)$ est un produit de descentes des scalaires de groupes linéaires. En raisonnant composante par composante, et quitte à remplacer q par une de ses puissances, on peut supposer que $\tilde{\mathbf{G}}^* = \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$, muni de sa structure rationnelle déployée.

Soit $g \in \tilde{\mathbf{G}}^*$ tel que ${}^{g^{-1}}\mathbf{H}^\circ = \tilde{\mathbf{L}}^*$ soit un sous-groupe régulier standard (F^*-stable) de $\tilde{\mathbf{G}}^*$. Alors $g^{-1}F^*(g)$ normalise $\mathbf{H}^\circ$. Le groupe $N_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{\mathbf{L}}^*)/\tilde{\mathbf{G}}^*$ se relève en un sous-groupe F^*-stable N de $\tilde{\mathbf{G}}^*$ grâce aux matrices de permutation, et $N_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\tilde{\mathbf{L}}^*)$ est un produit en couronne de $\tilde{\mathbf{L}}^*$ par N. On peut supposer que $g^{-1}F^*(g) = x \in N$.

Alors ${}^gN$ est un sous-groupe F^*-stable de $N_{\tilde{\mathbf{G}}^*}(\mathbf{H}^\circ)$ (car $x \in N$) vérifiant les conditions du lemme. ■

D'après le lemme 17.1.1, le groupe $\mathbf{H}$ est du type de ceux étudiés dans la section 5 dont on peut reprendre les résultats. D'après le paragraphe 5.3, on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{H}^{F^*},1) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{H}}(1). \end{array}$$

D'après la proposition 3.4.2, elle induit une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*},1) \\ \lambda & \longmapsto & \mathbf{R}_\lambda^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1). \end{array}$$

17.2. Paramétrage de Lusztig. Lusztig a montré (cf [L5]) qu'il existe une bijection entre $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$ et $\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*},1)$ qui, étendue par linéarité aux caractères virtuels, envoyait $\varepsilon_{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$ sur $\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} R_{\mathbf{T}^*}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1)$ pour tout tore maximal F^*-stable $\mathbf{T}^*$ de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. On va construire une telle bijection compatible à l'induction de Lusztig.

Lemme 17.2.1. *L'application $\xi_s : A(s)^{F^*} \to \{1,-1\}$, $\alpha \mapsto \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^\alpha}$ est un caractère linéaire de $A(s)^{F^*}$.*

PREUVE - On note τ l'automorphisme de $X(\mathbf{T}^*)$ induit par F^*, et on note toujours τ l'automorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E = X(\mathbf{T}^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ induit par τ. Alors, d'après [DM2], lemme 3.9, le $\mathbb{F}_q$-rang de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^\alpha$ est égal à $\dim E^{\tau,\alpha}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^\alpha} &= (-1)^{\dim E^\tau - \dim E^{\tau,\alpha}} \\ &= \det(\alpha, E^\tau), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. ■

S'il y a confusion possible, on notera $\xi_{\mathbf{G},s}$ le caractère linéaire ξ_s décrit dans le lemme 17.2.1. On peut voir ξ_s comme un caractère linéaire de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ trivial sur $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. On remarque que, pour tout caractère irréductible λ de $W(s)^{F^*}$, on a :

$$\mathbf{R}_\lambda^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1) \otimes \xi_s = \mathbf{R}_{\lambda \otimes \xi_s}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1).$$

Notre paramétrage de Lusztig sera l'application $\mathbb{K}$-linéaire qu'on notera $\nabla_{\mathbf{G}}$ ou $\nabla_{\mathbf{G}}$: $\mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \to \mathbb{K}\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$ définie par

(17.2.2)
$$\nabla_{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{G}}(s)) = \mathbf{R}_\lambda^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1) \otimes \xi_s.$$

Proposition 17.2.3. *Soit $\mathbf{T}^*$ un tore maximal F^*-stable de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors :*

$$\nabla_{\mathbf{G}}(\varepsilon_{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)) = \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} R_{\mathbf{T}^*}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1).$$

PREUVE - Soit w un élément de $W(\tilde{s})$. Il suffit de montrer le résultat lorsque $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*_w$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{T}^*_w}^{\mathbf{G}}(s) &= \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \overline{\boldsymbol{\chi}^+(w\phi)} R_{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{G}}(s) \\ &= \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{(\chi,\xi) \in \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(s)} \overline{\boldsymbol{\chi}^+(w\phi)} R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{\mathbf{G}}(s), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{T}^*_w}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1) &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W(\tilde{s})^{F^*}} \overline{\boldsymbol{\chi}^+(w\phi)} R_{\boldsymbol{\chi}}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1) \\ &= \sum_{(\chi,\xi) \in \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(s)} \overline{\boldsymbol{\chi}^+(w\phi)} R_{\boldsymbol{\chi},\xi}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1), \\ &= \sum_{(\chi,\xi) \in \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(s)} \overline{\boldsymbol{\chi}^+(w\phi)} R_{\boldsymbol{\chi},\xi\xi_s}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. ■

17.3. Paramétrage de Lusztig et induction de Lusztig. Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe régulier F-stable de $\mathbf{G}$ dont le dual $\mathbf{L}^*$ contient s. Le théorème 16.2.1 et le théorème 5.5.1 montrent que :

Théorème 17.3.1. ***On suppose les conjectures*** **($\mathfrak{M}$)** ***et*** **(GG)** ***vraies***. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{L}^F,[s]) \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"'] & \mathbb{K}\mathcal{E}(C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*},1) \arrow[d, "\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)}R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}"] \\ \mathbb{K}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s]) \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{G}}"] & \mathbb{K}\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*},1) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Bibliographie

[A] T. Asai, *On the twisting operators on the class functions of finite special linear groups*, Proc. of Symp. in Pure Math. **47** (1987), pp 99-148.

[BT] A. Borel - J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. de l'IHES **27** (1965), pp 55-160.

[D] F. Digne, *Descente de Shintani et descente des scalaires*, prépublication du LAMIFA (Amiens), **94-12** (1994).

[DL] P. Deligne - G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), pp 103-161.

[DLM1] F. Digne - G.I. Lehrer - J. Michel, *The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected center*, J. reine angew. Math. **425** (1992), pp 155-192.

[DLM2] F. Digne - G.I. Lehrer - J. Michel, *On the Lusztig's restriction of Gel'fand-Graev characters*, communication personnelle.

[DM1] F. Digne - J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type*, London Math. Soc. Students Texts **21**, Cambridge University Press (1991).

[DM2] F. Digne - J. Michel, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série **27** (1994), pp 345-406.

[F] F.G. Frobenius, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Preuβ. Akad. Wiss. (1900), pp 516-534 ($\simeq$ Ges. Abhandlungen **3**, pp 148-166).

[G] M. Geck, *A note on Harish-Chandra induction*, Manuscripta Math. **80** (1993), pp 393-401.

[HL1] R.B. Howlett - G.I. Lehrer, *Induced cuspidal representations and generalized Hecke algebra*, Invent. Math. **58** (1980), pp 37-64.

[HL2] R.B. Howlett - G.I. Lehrer, *Representations of generic algebras of finite groups of Lie type*, Trans. A.M.S. **280**, pp 753-779.

[L1] G. Lusztig, *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Invent. Math. **34** (1976), pp 201-213.

[L2] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. Studies **107** (1984), Princeton University Press.

[L3] G. Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984), pp 205-272.

[L4] G. Lusztig, *Character sheaves I-V*, Adv. in Math. **56** (1985), pp 193-237 ; **57** (1985), pp 226-265 ; **57** (1985), pp 266-315 ; **59** (1986), pp 1-63 ; **61** (1986), pp 103-155.

[L5] G. Lusztig, *On the representations of reductive groups with non connected center*, Astérisque **168** (1988), pp 157-166.

[L6] G. Lusztig, *Green functions and character sheaves*, Annals of Math. **131** (1990), pp 355-408.

[LS] G. Lusztig - B. Srinivasan, *The characters of the finite unitary groups*, J. Algebra **49** (1977), pp 167-171.

[S] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the AMS, **80** (1968).