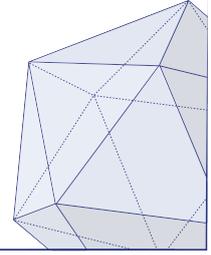




IMAG
INSTITUT MONTPELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
INSTITUT MONTPELLIÉRAIN ALEXANDER GROTHENDIECK

Réalisation d'invariants asymptotiques pour des groupes et des actions de groupes

JÉRÉMIE BRIEUSSEL

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

PRÉSENTÉ LE 6 JUIN 2025 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

- EMMANUEL BREUILLARD, PROFESSOR, OXFORD UNIVERSITY (RAPPORTEUR)
- ANNA ERSCHLER, DR, SORBONNE UNIVERSITÉ (RAPPORTRICE)
- DAMIEN GABORIAU, DR, ENS LYON
- SÉBASTIEN GOUËZEL, DR, UNIVERSITÉ DE RENNES (RAPPORTEUR)
- JEAN-FRANÇOIS QUINT, DR, UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
- WOLFGANG WOESS, PROFESSOR, GRAZ TECHNISCHE UNIVERSITÄT

CONTENTS

Table des matières	i
Remerciements	3
Travaux présentés	5
Introduction	7
1 Croissance de groupes	11
1.1 Deux exercices	12
1.2 Croissance polynomiale	12
1.3 Croissance intermédiaire	13
1.3.1 Premier calcul de fonction de croissance intermédiaire	14
1.3.2 Diversité des fonctions de croissance intermédiaire	15
1.3.3 Diversité des groupes à croissance intermédiaire	16
2 Marches aléatoires sur des groupes	23
2.1 Marches aléatoires	25
2.1.1 Invariants/quantités asymptotiques	25
2.1.2 Produits en couronne	26
2.1.3 Bord de Poisson	28
2.2 Sensibilité au bruit	32
2.3 La famille des groupes dirigés	35
2.3.1 Les groupes dirigés	36
2.3.2 Réalisations pour l'entropie	37
2.4 La famille des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères	39
2.4.1 Produits diagonaux d'allumeurs de réverbères	39
2.4.2 Réalisation pour la vitesse et la probabilité de retour	42
3 D'autres invariants asymptotiques	47
3.1 Les compressions hilbertiennes et banachiques	48
3.2 Le profil isopérimétrique	50
3.3 Les profils de séparation et de Poincaré	51
3.4 La propriété H_{FD} de Shalom	53
3.5 Équivalence orbitale quantitative	55
3.6 Et pour d'autres groupes moyennables ?	57
4 Entropie de Furstenberg	59
4.1 Spectre entropique	61
4.2 Fibrés de Poisson	62
4.3 Questions et perspectives	66
Bibliographie	81

Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier Emmanuel Breuillard, Anna Erschler et Sébastien Gouëzel d'avoir accepté d'écrire un rapport sur mon mémoire d'habilitation, et pour leurs remarques utiles et précieuses. Je remercie également Damien Gaboriau, Jean-François Quint et Wolfgang Woess de participer au jury de mon habilitation.

En me retournant sur mon parcours mathématique, j'ai une pensée nostalgique pour mes années de post-doc, pour lesquelles mon directeur de thèse, Andrzej Zuk, m'a tant soutenu. Ces années m'ont tant apporté mathématiquement et humainement : à l'Université Cornell avec Laurent Saloff-Coste, à l'Université de Neuchâtel avec Alain Valette et à l'Université de Kyoto avec Tsuyoshi Kato. Les rencontres que j'ai pu faire à ces occasions ont nourri mes apprentissages mathématiques et ont donné lieu à des amitiés réjouissantes.

La recherche en mathématiques est une activité bien plus collective qu'il n'y paraît. Les conférences, rencontres, écoles et projets ANR auxquels j'ai participé ont enrichi mes connaissances et ont stimulés mes motivations. J'en remercie les divers organisatrices et organisateurs.

Mon laboratoire, l'IMAG, est le collectif où se déroule mon quotidien depuis plus de douze ans, avec toujours le même plaisir. Je remercie en particulier l'équipe administrative pour sa disponibilité. J'ai été très bien accueilli au sein de l'équipe GTA et je m'y épanouis pleinement, notamment autour du séminaire Darboux. Je remercie les participants d'avoir accepté d'écouter autant d'exposés de probabilités sur des groupes dans un séminaire originellement consacré à la géométrie différentielle.

J'ai eu le plaisir de partager mon bureau, de la bonne humeur et des rires avec Jean Malgoire, Thomas Haettel et Nicolas Séguin. Merci à vous trois.

Je tiens à remercier mes collaboratrices et collaborateurs avec qui j'ai toujours eu un grand plaisir à échanger, à travailler; en particulier Tianyi Zheng pour nos échanges réguliers et fructueux depuis déjà dix ans, et Ryokichi Tanaka, que je me réjouis de retrouver prochainement à Kyoto.

Je remercie également Thibault Godin et Hanna Oppelmayer, venus à Montpellier comme post-doc ANR, avec qui j'ai eu la chance de travailler dans une humeur si joyeuse.

Romain Tessera m'a accordé sa confiance pour co-encadrer les thèses de Corentin Le Coz et Amandine Escalier; tout comme Constantin Vernicos pour co-encadrer celles de Tom Ferragut et Lucas Froger. Ç'ont été et ce sont des expériences enrichissantes, et les réussites de nos étudiant·es sont un honneur.

Enfin je remercie Magali, Judith et Alice d'être là tous les jours.

TRAVAUX PRÉSENTÉS

Ce mémoire présente mes travaux de recherche, consacrés à la géométrie des groupes, notamment sous un point de vue probabiliste. Une large part a été consacrée aux problèmes de réalisation pour des invariants asymptotiques de groupes et d'actions de groupes. Il présente de manière synthétique les articles suivants dont je suis auteur:

- [Bri14b] *Growth behaviors in the range e^{r^α}* . In: Afr. Mat. 25.4 (2014), pp. 1143–1163.
- [Bri13] *Behaviors of entropy on finitely generated groups*. In: Ann. Probab. 41.6 (2013), pp. 4116–4161.
- [Bri14a] *Folner sets of alternate directed groups*. In: Annales Institut Fourier 64.3 (2014), pp. 1109–1130.
- [BT15] *Discrete random walks on the group Sol*, avec Ryokichi Tanaka. In: Israel J. Math. 208.1 (2015), pp. 291–321.
- [BG18] *Connectedness of spheres in Cayley graphs*, avec Antoine Gournay. In: Algebra and Discrete Mathematics 26 (2018), pp. 190–246.
- [Bri18] *An automata group of intermediate growth and exponential activity*. In: Journal of Group Theory 21.4 (2018), pp. 573–578.
- [BZ21] *Speed of random walks, isoperimetry and compression of finitely generated groups*, avec Tianyi Zheng. In: Ann. of Math. (2) 193 n.1, 1-105 (2021).
- [BZ19] *Shalom's property H_{FD} and extensions by \mathbb{Z} of locally finite groups*, avec Tianyi Zheng. In: Israel J. Math. 230.1 (2019), pp. 45–70.
- [BTZ21] *Random walks on the discrete affine group*, avec Ryokichi Tanaka et Tianyi Zheng. In: Groups Geom. Dyn. 15.3 (2021), pp. 935–963.
- [BGM22] *Numerical upper bounds on growth of automata groups*, avec Thibaut Godin et Bijan Mohammadi. In: International Journal of Algebra and Computation 32.1 (2022), pp. 159–191.
- [BB23b] *Noise sensitivity of random walks on groups*, avec Itai Benjamini. In: ALEA, Lat. J. Probab. Math. Stat. 20 (2023), pp. 1139–1164.
- [BZ23] *Furstenberg entropy spectra of stationary actions of semisimple Lie groups*, avec Tianyi Zheng. arxiv.org/abs/2307.01495. 2023.

Ce mémoire présente aussi des travaux de Corentin Le Coz, d'Amandine Escalier et de Tom Ferragut, effectués lorsque j'ai eu le plaisir de co-encadrer leurs recherches de doctorat, conjointement avec Romain Tessera pour les deux premiers nommés et avec Constantin Vernicos pour le troisième.

- [GLC23] Antoine Gournay et Corentin Le Coz. *Separation profile, isoperimetry, growth and compression*. In: *Annales de l’Institut Fourier* 73.4 (2023), pp. 1627–1675.
- [LC20] Corentin Le Coz. *Poincaré profiles of lamplighter diagonal products*. arXiv:2007.04709. 2020.
- [Esc24] Amandine Escalier. *Building prescribed quantitative orbit equivalence with the integers*. In: *Groups Geom. Dyn.* DOI 10.4171/GGD/766 (2024).
- [Esc22] Amandine Escalier. “Sofic approximations and quantitative measure couplings”. arXiv:2205.12137. 2022.
- [Fer20] Tom Ferragut. *Geodesics and Visual boundary of Horospherical Products*. arXiv:2009.04698. 2020.
- [Fer22] Tom Ferragut. *Geometric rigidity of quasi-isometries in horospherical products*. arXiv:2211.04093. 2022.

INTRODUCTION

Les groupes sont des objets mathématiques d'une diversité surprenante. On peut dire si peu de choses qui s'appliquent à tous les groupes que leur étude et leur classification s'apparentent à une véritable zoologie. Les méthodes et les communautés sont très diverses selon les familles de groupes, véritables genres taxonomiques : groupes finis, groupes algébriques, groupes de Lie, groupes de type fini...

L'étude des groupes infinis de type fini a été largement développée ces dernières décennies. La théorie géométrique des groupes y a joué un rôle essentiel. Consacrée aux liens entre les propriétés algébriques d'un groupe et les propriétés géométriques des espaces sur lesquels il agit, elle a trouvé un objet d'étude incontournable dans les graphes de Cayley, puisque tout groupe agit dessus. Leur géométrie n'est toutefois pertinente qu'à quasi-isométrie près seulement puisqu'elle dépend du choix de partie génératrice. Les questions de rigidités, lien entre un groupe de Lie et ses réseaux, ont également joué un rôle important dans ce développement, donnant naissance à la théorie mesurée des groupes. Les probabilités, et notamment les marches aléatoires, ont également contribué au développement de ce champs d'étude.

Objets de ces théories se trouvent des groupes de types finis variés : réseaux des groupes de Lie, groupes hyperboliques, groupes modulaires, groupes agissant sur des arbres (ou d'autres complexes)... Le rôle joué par les exemples dans le développement de ces sujets de recherche est essentiel : usage du bord de Poisson pour distinguer des réseaux par Furstenberg [Fur71], extraction de la notion d'hyperbolicité métrique par Gromov.

Les manières de construire des groupes ne sont pas si nombreuses, et il est souvent difficile de trouver des exemples de groupes ayant des propriétés demandées. On peut utiliser les présentations, mais c'est délicat puisque le problème des mots n'est en ces termes pas résoluble, les matrices, mais alors on trouve assez peu de groupes, par exemple l'alternative de Tits contraint les groupes linéaires sans sous-groupe libre à être virtuellement résolubles, ou diverses constructions géométriques au moyen d'actions explicites, l'enjeu étant alors d'extraire des informations, ce qui ne peut pas se faire en très grande généralité.

Le thème central de ce mémoire, qui lui donne son titre, est l'étude des problèmes de réalisation pour des invariants asymptotiques (ou du moins pour des quantités asymptotiques car on ignore parfois si elles sont invariantes) pour des groupes de type fini. On retiendra parmi les nombreux invariants et quantités asymptotiques : la croissance, la vitesse, l'entropie et la probabilité de retour des marches aléatoires, la compression hilbertienne, les profils isopérimétriques et de Poincaré. La réalisation, qu'on peut aussi appeler problème inverse, a pour but, étant donnée une valeur possible de l'invariant, d'exhiber un groupe la réalisant effectivement. Par exemple, trouver un groupe de fonction de croissance donnée.

Lorsque l'on cherche à déterminer quelles valeurs peuvent prendre ces invariants, on est donc confronté à la difficulté de trouver des exemples. Pendant très longtemps, les seuls exemples de groupes à croissance intermédiaire dérivait d'une manière ou d'une autre des groupes de Grigorchuk, construits à partir d'actions sur des arbres enracinés. Il est remarquable de voir à quel point ces exemples, a priori isolés, ont donné lieu à des progrès

considérables sur notre compréhension du monde des groupes et une littérature aussi vaste.

Ils constituent le point de départ de ce mémoire, formant la première famille de groupes auxquels il est dédié, en lien avec la croissance. La seconde famille est une généralisation : les groupes dirigés, qui contient notamment les groupes “mère” d’automates à activité bornée, en lien avec l’entropie des marches aléatoires, et leur vitesse. La troisième famille est formée des produits diagonaux d’allumeurs de réverbères. Elle a permis de résoudre simultanément de nombreux problèmes inverses : vitesse, entropie, probabilité de retour des marches aléatoires, compression hilbertienne, profils isopérimétriques et de Poincaré...

Dans cette zoologie des groupes, certains exemples se sont vus qualifiés de *monstres*, par exemple les groupes “monstres de Tarski” construits par Olshanskii, dont tous les sous-groupes non-triviaux sont cycliques [Ols81], ou le groupe dit de *Frankenstein* des homéomorphismes projectifs par morceaux de la ligne introduit par Monod [Mon13]. Dans cette optique, les groupes que nous présentons ici relèvent de la catégorie domestique et adoptent les comportements que l’on attend d’eux.

Ce mémoire est structuré autour de la série de quatre théorèmes suivants.

En utilisant les groupes de Grigorchuk et leurs extensions permutacionnelles introduites par Bartholdi-Erschler [BE12]. On obtient le résultat suivant.

Théorème 0.1 ([Bri14b]). *Pour tout $\alpha \in [0.77, 1]$, il existe un groupe dont la croissance satisfait $b(R) = \exp(R^{\alpha+o(1)})$.*

Ce résultat a été largement amélioré par Bartholdi-Erschler [BE14] qui ont obtenu un équivalent précis $b(R) \asymp \exp(R^\alpha)$. La manière dont ces groupes agissent sur un arbre binaire enraciné est paramétrée par l’ensemble de Cantor $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Pour des suites valant $(012)^\infty$ à partir d’un certain rang, la croissance est $\exp(n^{\alpha_0})$ pour un $\alpha_0 \approx 0.767$ explicite. Pour celles constantes à partir d’un certain rang, les groupes sont virtuellement résolubles à croissance exponentielle. On obtient des comportements intermédiaires en considérant des suites de la forme $(012)^{m_1} 0^{n_1} (012)^{m_2} 0^{n_2} \dots$

En utilisant les groupes dirigés agissant sur des arbres enracinés dont la suite des degrés est bien choisie.

Théorème 0.2 ([Bri13]). *Pour tout $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, il existe un groupe probabilisé (G, μ) avec μ symétrique à support fini dont l’entropie de Shannon satisfait $H(\mu^{*n}) = n^{\alpha+o(1)}$.*

Ce résultat a été largement amélioré par Amir-Virag [AV17] qui ont montré $H(\mu^{*n}) \asymp n^\alpha$. Ces groupes sont une généralisation des extensions permutacionnelles des groupes de Grigorchuk. Ils agissent toujours sur un arbre enraciné, mais cette fois de valence arbitraire (ne dépendant que de la distance à la racine). C’est en jouant sur la suite des valences de l’arbre que l’on obtient de la flexibilité.

En utilisant des produits diagonaux d’allumeurs de réverbères avec des expanseurs homothétiquement plongés.

Théorème 0.3 ([BZ21]). *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $f(1) = 1$ et $x/f(x)$ croissante, il existe un groupe Δ et une mesure μ symétrique à support fini tel que*

- *la vitesse de la marche aléatoire satisfait $L_\mu(n) \asymp_C \sqrt{n}f(\sqrt{n})$,*
- *la compression équivariante L_p est de l'ordre de $n/f(n)$ pour tout $p \in]1, \infty[$,*
- *le profil isopérimétrique satisfait $\Lambda_{\mu,\Delta,p}(v) \asymp_C \left(\frac{f(\log v)}{\log v}\right)^p$ pour tout $p \in [1, 2]$,*
- *la probabilité de retour satisfait $-\log \Phi_\Delta(n) \asymp_C w(n)$ où $n = \int_1^{w(n)} \left(\frac{s}{f(s)}\right)^2 ds$.*

En divers sens, le groupe d'allumeur de réverbères $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ est un groupe à croissance exponentiel aussi *petit* que possible : sa vitesse est diffusive, et il se plonge avec exposant de compression 1 dans un espace de Hilbert. À contrario, les expanseurs sont des graphes finis aussi *gros* que possible : leur vitesse est linéaire jusqu'au diamètre et leur exposant de compression est nul. Les groupes construits pour prouver ce théorème sont en quelque sorte des groupes d'allumeurs de réverbères dans lesquels on a plongé homothétiquement des expanseurs. La malléabilité de ces groupes provient de la capacité à faire varier deux paramètres simultanément : les diamètres des expanseurs, notés (ℓ_s) par la suite, tendent à grossir le groupe, et les rapports d'homothétie, notés (k_s) , tendent à rapetisser le groupe. L'usage d'expanseurs homothétiquement plongés dans des graphes de groupes avait déjà permis à Arzhantseva, Drutu et Sapir d'obtenir un résultat similaire pour la compression non équivariante [ADS09]. La construction des produits diagonaux fournit pour les expanseurs un enrobage plus mince dans des groupes moyennables.

Enfin, un dernier résultat concernant le problème de la réalisation des entropies de Furstenberg des actions stationnaires d'un groupe probabilisé est présenté.

Théorème 0.4 ([BZ23]). *Le spectre des entropies de Furstenberg du groupe $SL(d, \mathbb{R})$ pour une mesure admissible μ est*

$$\text{SpEnt}(SL(d, \mathbb{R}), \mu) = \bigcup_{(Q, Q')} [h_\mu(G/Q), h_\mu(G/Q')],$$

où Q est un sous-groupe de matrices triangulaires supérieures par blocs et $Q' = Q$ ou Q' s'obtient à partir de Q en remplaçant un bloc diagonale de taille 2 par $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Ce résultat se décompose en deux aspects. Il énonce d'une part des obstructions, puisque les valeurs hors de ces intervalles ne sont pas atteintes. Ces obstructions se déduisent des techniques de Nevo et Zimmer [NZ02b] qui assurent qu'en rang supérieur, l'entropie de Furstenberg minimale d'un système non-invariant est au moins celle d'un facteur projectif non trivial.

Le second aspect est un problème de réalisation pour les actions de groupe. Il se ramène par induction au cas de $SL(2, \mathbb{R})$ et même au cas d'un groupe libre qui s'y trouve plongé

comme réseau. Pour le groupe libre, on dispose d'une construction magnifique de Bowen [Bow14] : des fibrés de Poisson au dessus de sous-groupes aléatoires invariants (IRS en anglais). Ces sous-groupes sont obtenus par des revêtements aléatoires d'arbres décorés de boucles. Le paramètre de flexibilité est simplement la probabilité de Bernoulli $p \in [0, 1]$ de tenir compte d'une boucle en prenant le revêtement.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres, qui correspondent approximativement à ces quatre théorèmes. Le premier chapitre est dédié à la croissance des groupes, un sujet introduit notamment par Svarc et Milnor. J'y dresse un panorama des résultats connus sur la croissance des groupes. Le second chapitre est consacré aux marches aléatoires sur des groupes. Après une première section générale et une digression sur la sensibilité au bruit, j'y présente mes résultats sur les problèmes inverses liés aux marches aléatoires. Le troisième chapitre est dédié aux diverses utilisations pour des problèmes de réalisation géométriques et analytiques des produits diagonaux, ainsi qu'à la propriété H_{FD} de Shalom. Le quatrième chapitre est consacré aux calculs du spectre de l'entropie de Furstenberg des actions stationnaires.

J'ai cherché à faire une présentation du contexte global et à insérer divers travaux illustratifs, plutôt que d'insister sur les aspects formels. On ne donne dans ce mémoire aucune preuve détaillée même si pour les résultats importants, j'ai systématiquement cherché à esquisser les éléments clés de leurs démonstrations.

CROISSANCE DE GROUPES

1.1	Deux exercices	12
1.2	Croissance polynomiale	12
1.3	Croissance intermédiaire	13
1.3.1	Premier calcul de fonction de croissance intermédiaire . .	14
1.3.2	Diversité des fonctions de croissance intermédiaire	15
1.3.3	Diversité des groupes à croissance intermédiaire	16

La croissance d'un groupe Γ pour un système générateur fini S est la fonction

$$b_{\Gamma,S}(R) = \#(S \cup \{1\})^R,$$

c'est-à-dire le cardinal de la boule de rayon R dans le graphe de Cayley. Elle ne dépend pas de la partie génératrice modulo la relation d'équivalence \asymp qui sera omniprésente dans ce mémoire, définie par $f \asymp g$ s'il existe $c > 0$ avec

$$\frac{1}{c}g\left(\frac{x}{c} - c\right) - c \leq f(x) \leq cg(cx + c) + c.$$

On notera $f \preceq g$ si on a seulement l'inégalité de droite. On notera \asymp_c si on souhaite insister sur la constante c .

La croissance des groupes est un invariant qui a joué un rôle considérable dans le développement de la théorie géométrique des groupes. Bien que mes contributions sur ce sujet soient modestes [Bri14b; Bri18; BGM22], ce thème est l'objet du premier chapitre de ce mémoire car il se trouve à la source de mes motivations de recherche et il a connu des développements spectaculaires ces dernières années.

Pour un panorama global sur la croissance des groupes, on pourra consulter, en sus du présent chapitre, le livre de Mann [Man12], et les articles de survey de Grigorchuk [Gri14a] et de la Harpe [Har21].

1.1 Deux exercices

La notion de croissance des groupes apparaît dans les travaux de Svarc [Sva55] et Milnor [Mil68b] sur la croissance des boules des variétés Riemanniennes. Si M est une telle variété, le volume d'une boule de grand rayon dans le revêtement universel est équivalent à la fonction de croissance du groupe fondamental. Milnor a montré que si le groupe est résoluble, alors la croissance est soit exponentielle, soit polynomiale, et que dans le second cas le groupe est virtuellement nilpotent. Ce résultat l'a mené à poser deux exercices dans le journal *American Mathematical Monthly* [Mil68a].

Exercice 1.1. *Les groupes à croissance polynomiale sont-ils virtuellement nilpotents ?*

Exercice 1.2. *Existe-t-il des groupes à croissance intermédiaire, c'est-à-dire entre polynomiale et exponentielle ?*

1.2 Croissance polynomiale

Le premier exercice a été résolu par Gromov, apportant une réponse positive [Gro81], dans un des articles fondateurs de la théorie géométrique des groupes.

Théorème 1.3 (Gromov [Gro81]). *Un groupe de type fini a croissance polynomiale si et seulement si il est virtuellement nilpotent.*

Sa preuve introduit la notion de cône asymptotique et utilise les solutions au 5ème problème de Hilbert apportées par Gleason [Gle51], Montgomery-Zippin [MZ52] et Yamabe [Yam53]. Vu la profondeur de ces résultats, il a longtemps apparu souhaitable d'obtenir une autre preuve plus directe de ce théorème.

Une deuxième preuve du théorème de Gromov a été donnée par Kleiner [Kle10]. Elle repose sur l'analyse harmonique. Kleiner utilise d'abord l'existence d'une application $\Gamma \rightarrow \mathcal{H}$ équivariante pour une action sans point fixe sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , due à Mok [Mok95] et Korevaar-Schoen [KS97], puis adapte un résultat de Colding-Minicozzi [CM97] assurant que l'espace des applications harmoniques sur Γ ayant croissance au plus polynomiale de degré donné est de dimension fini. Cela fournit une représentation de dimension finie de Γ , et le théorème en découle d'après la partie facile de la preuve de Gromov. Les techniques de Kleiner ont été raffinées par Shalom et Tao qui ont obtenu une version effective du théorème de Gromov [ST10], à savoir qu'il existe un R_0 pour lequel la seule inégalité $b_{\Gamma,S}(R_0) \leq R_0^d$ assure l'existence d'un sous-groupe d'indice i , nilpotent d'ordre au plus n où R_0 , i et n sont majorés explicitement en fonction de d . Une telle version effective peut aussi s'obtenir à partir des sous-groupes approchés d'après Breuillard-Green-Tao [BGT12]. La version explicite de Shalom-Tao permet d'obtenir le renforcement suivant du théorème de Gromov.

Théorème 1.4 (Shalom-Tao [ST10]). *Il existe $c > 0$ de sorte que $b_{\Gamma,S}(R) \leq R^{c(\log \log R)^c}$ implique la nilpotence virtuelle du groupe Γ .*

Une troisième preuve du théorème de Gromov a été donnée par Ozawa [Oza18], basée sur la propriété H_{FD} de Shalom [Sha04] sur laquelle nous reviendrons.

1.3 Croissance intermédiaire

Le second exercice posé par Milnor a été résolu par Grigorchuk [Gri83; Gri85]. Grigorchuk considère une famille de groupes $\{G_\omega\}_{\omega \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}}$ paramétrée par un ensemble de Cantor (voir Section 1.3.2), et montre que, hormis pour une quantité dénombrable de valeurs du paramètre, ces groupes ont croissance intermédiaire. La croissance du groupe $G_{(012)^\infty}$ a fait l'objet de nombreuses recherches.

Les estimations connues sur ce groupe sont de la forme

$$\exp(R^\beta) \leq b_{(012)^\infty}(R) \leq \exp(R^\alpha).$$

Grigorchuk a d'abord montré ces estimations pour $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \log_{32}(31) \approx 0.993$ [Gri85], et conjecturé que la borne inférieure serait optimale. Bartholdi a amélioré la borne supérieure à $\alpha = \alpha_0 := \frac{\log(2)}{\log(2/\eta)} \approx 0.7674$ où η est la racine réelle de $X^3 + X^2 + X - 2$ [Bar98]. Leonov a montré que la borne $\beta = 0.5047$ convient [Leo01], améliorée à $\beta = 0.5153$ par Bartholdi [Bar01], puis à $\beta = 0.5207$ par mes soins dans ma thèse [Bri08]. Tous ces résultats sont basés sur la combinatoire des mots lors du passage aux facteurs dans le produit en couronne permutatif qui définit le groupe de Grigorchuk.

La meilleure (et de loin !) borne inférieure à ce jour a été déterminée par Erschler et Zheng [EZ20a], qui ont obtenu $\beta = \alpha_0 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Leur méthode utilise la borne optimale sur les moments d'une mesure de probabilité sur $G_{(012)^\infty}$ pour laquelle le bord de Poisson est non-trivial. Une telle stratégie avait été mise en place par Erschler [Ers04a] pour obtenir des estimations sur la croissance du groupe $G_{(01)^\infty}$. Pour $G_{(012)^\infty}$, c'est techniquement plus délicat et leur preuve utilise notamment des estimées hors-diagonale pour le noyau de la chaleur dues à Barlow-Grigor'yan-Kumagai [BGK09].

On ne connaît pas à ce jour de groupe ayant une fonction de croissance inférieure à celle de $G_{(012)^\infty}$.

Question 1.5. *Existe-t-il un groupe dont la fonction de croissance serait inférieure à $\exp(R^{\alpha_0})$ hormis ceux virtuellement nilpotents ?*

Grigorchuk a conjecturé que tout groupe dont la fonction de croissance est inférieure à $\exp(\sqrt{R})$ est virtuellement nilpotent [Gri91]. On sait par exemple que si le groupe est résiduellement résoluble et la croissance inférieure à $\exp(R^{1/6})$, alors le groupe est virtuellement nilpotent, d'après Wilson [Wil05; Wil11], voir aussi le survey [Gri14b]. L'écart entre cette question et le théorème 1.4 de Shalom-Tao est considérable, très mystérieux.

Motivés par cette question, mes travaux sur la croissance ont porté sur la diversité des fonctions de croissance possibles, dans le but notamment de montrer que toutes les fonctions entre $\exp(n^{\alpha_0})$ et $\exp(n)$ en sont, et sur la recherche d'exemples avec une fonction de croissance plus faible, recherche infructueuse à ce jour.

1.3.1 Premier calcul de fonction de croissance intermédiaire

Les estimations précises sur les fonctions de croissance intermédiaires de groupes n'ont été obtenues qu'au cours des quinze dernières années. Un premier résultat crucial est dû à Bartholdi et Erschler en 2010 [BE12] qui utilisent des produits en couronne permutationnels.

Théorème 1.6 (Bartholdi-Erschler [BE12]). *Soit $G = G_{(012)^\infty}$ le groupe de Grigorchuk. La fonction de croissance du produit permutational $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G,1^\infty} G$ satisfait*

$$b_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G,1^\infty} G}(R) \asymp \exp(R^{\alpha_0}).$$

Il s'agit du premier calcul explicite de fonction de croissance (ou plutôt de la classe asymptotique de croissance) hors des comportements exponentiels et polynomiaux.

On définit maintenant le groupe qui apparait dans le théorème. Rappelons d'abord que le produit en couronne permutational $H \wr_X G$ des groupes G et H au dessus du G -ensemble X est le produit semi-direct $\oplus_X H \rtimes G$. Ces éléments sont des paires (φ, g) avec $\varphi : X \rightarrow H$ à support fini et g dans G , et la loi de composition est $(\varphi, g)(\varphi', g') = (\varphi + g \cdot \varphi', gg')$.

Soit T un arbre binaire enraciné, dont on note $\text{Aut}(T)$ le groupe des automorphismes (de graphe fixant la racine). On dispose alors d'un isomorphisme

$$\text{Aut}(T) \simeq (\text{Aut}(T) \times \text{Aut}(T)) \rtimes \mathcal{S}_2 =: \text{Aut}(T) \wr_{\{0,1\}} \mathcal{S}_2. \quad (1.1)$$

Essentiellement, cet isomorphisme décrit le fait que les deux sous-arbres issus de la racine sont chacun isomorphes à l'arbre entier, et se donner un automorphisme de l'arbre revient à se donner un automorphisme de chacun des deux sous-arbres et décider si on les permute ou pas (choix d'une permutation de \mathcal{S}_2).

Soit $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On lui associe un groupe G_ω , suivant Grigorchuk [Gri85], en définissant quatre automorphismes $a, b_\omega, c_\omega, d_\omega$ d'un arbre binaire enraciné, au moyen de l'isomorphisme (1.1), par $a = (1, 1)\varepsilon$ où ε désigne la permutation non triviale de \mathcal{S}_2 et

$$b_\omega = (u_b(\omega_0), b_{\sigma\omega}), \quad c_\omega = (u_c(\omega_0), c_{\sigma\omega}), \quad d_\omega = (u_d(\omega_0), d_{\sigma\omega}).$$

Ici σ désigne le décalage, donc $\sigma\omega = (\omega_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et les trois applications $u_b, u_c, u_d : \{0, 1, 2\} \rightarrow \text{Aut}(T)$ sont données par

$$u_b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que ce jeu de données définit bien une action des éléments $b_\omega, c_\omega, d_\omega$ sur l'arbre T . Le groupe G_ω est alors le sous-groupe de $\text{Aut}(T)$ engendré par les quatre éléments $a, b_\omega, c_\omega, d_\omega$. Sous l'isomorphisme (1.1), on obtient un morphisme injectif

$$G_\omega \hookrightarrow G_{\sigma\omega} \wr_{\{0,1\}} \mathcal{S}_2.$$

Les sommets de l'arbre binaire enraciné T peuvent s'identifier aux suites finies à valeurs dans $\{0, 1\}$. Dans ce cas, le bord de T peut s'identifier aux suites infinies à valeurs dans $\{0, 1\}$. Ainsi 1^∞ désigne un point du bord (sur lequel G_ω agit) et $G_\omega \cdot 1^\infty$ désigne l'orbite de 1^∞ .

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G_\omega \cdot 1^\infty} G_\omega$ est un produit en couronne permutatif. Il est engendré par les générateurs de G_ω et l'élément $(\delta_{1^\infty}, 1)$ avec la fonction $\delta_{1^\infty}(x) = 1$ si $x = 1^\infty$ et $\delta_{1^\infty}(x) = 0$ sinon. On peut l'interpréter comme le groupe G_ω agissant sur l'arbre uni à son bord, et où les points du bord sont munis de lampes à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un élément du groupe peut donc s'interpréter comme une collection de permutations de \mathcal{S}_2 indexée par les sommets (décrivant l'action sur l'arbre), parfois appelé *portrait* de l'automorphisme, avec une collection de lampes sur le bord de l'arbre (seules celles sur l'orbite $G_\omega \cdot 1^\infty$ pouvant être allumées). Dans cette interprétation, la multiplication à droite $(\varphi, g)(\delta_{1^\infty}, 1) = (\varphi + \delta_{g^{-1} \cdot 1^\infty}, g)$ se voit comme une modification de l'état de la lampe en $g^{-1} \cdot 1^\infty$.

Esquisse de preuve du Théorème 1.6. Le groupe G est évidemment un quotient du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G \cdot 1^\infty} G$. Pour obtenir la borne supérieure sur la croissance, il s'agit de montrer que les arguments de contraction des longueurs des mots sous l'application $G \hookrightarrow G \wr_{\{0,1\}} \mathcal{S}_2$ mis en oeuvre par Bartholdi [Bar98] pour $G = G_{(012)^\infty}$ restent valides dans ce groupe plus grand. Pour obtenir la borne inférieure, on montre que pour tout n il existe un mot $w = x_1 \dots x_k$ en les générateurs de G de longueur $k \leq C(2/\eta)^n$ dont l'orbite inverse de 1^∞

$$\mathcal{O}(w) = \{1^\infty, 1^\infty x_k, 1^\infty x_{k-1} x_k, \dots, 1^\infty x_1 \dots x_k\}$$

a cardinal $\#\mathcal{O}(w_n) \geq 2^n =: R$. Ceci assure que les 2^k mots de la forme

$$\delta_{1^\infty}^{\varepsilon_1} x_1 \delta_{1^\infty}^{\varepsilon_2} x_2 \dots \delta_{1^\infty}^{\varepsilon_k} x_k = \left(\prod_{z \in \mathcal{O}(w)} \left(\sum_{i: 1^\infty x_i \dots x_k = z} \varepsilon_i \right) \delta_{1^\infty x_i \dots x_k} \right) x_1 \dots x_k$$

prennent au moins 2^R valeurs. Ces mots sont tous dans la boule de rayon $2C(2/\eta)^n \simeq R^{1/\alpha_0}$. La borne inférieure suit immédiatement. \square

1.3.2 Diversité des fonctions de croissance intermédiaire

En m'appuyant sur l'article [BE12], j'ai obtenu dans [Bri14b] le résultat suivant :

Théorème 1.7 ([Bri14b]). *Pour tout $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, il existe un groupe, de la forme $\Gamma_\omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G_\omega \cdot 1^\infty} G_\omega$, dont la fonction de croissance satisfait :*

$$b_{\Gamma_\omega}(R) \asymp \exp(R^{\alpha+o(1)}).$$

De plus, pour tout $\alpha_0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, il existe un groupe, de la même forme, dont la fonction de croissance satisfait :

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \log b_\Gamma(R)}{\log R} = \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \log b_\Gamma(R)}{\log R} = \beta.$$

Le deuxième énoncé assure qu'il existe un groupe dont la fonction de croissance oscille entre deux fonctions $\exp(R^{\alpha+o(1)})$ et $\exp(R^{\beta+o(1)})$. Il s'agit là d'un premier résultat de réalisation, pour les exposants de croissance.

Esquisse de preuve du Théorème 1.7. Ce théorème est basé sur le Théorème 1.6 de Bartholdi et Erschler sur $\Gamma_{(012)^\infty}$. Notons que par des arguments classiques de Grigorchuk [Gri85], l'estimation $\asymp \exp(R^{\alpha_0})$ reste vraie pour tous les groupes de la forme $\Gamma_{\omega_1 \dots \omega_k (012)^\infty}$. D'autre part les groupes de la forme $G_{\omega_1 \dots \omega_k 0^\infty}$, et a fortiori ceux de la forme $\Gamma_{\omega_1 \dots \omega_k 0^\infty}$, sont virtuellement résolubles et à croissance exponentielle, encore d'après [Gri85].

Tout $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ s'écrit $\alpha = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{\eta^\lambda}}$ pour un $\lambda = \lambda(\alpha)$ dans $[0, 1]$. Pour un α ou λ donné, on considère une suite $\omega = 0^{m_1} (012)^{n_1} 0^{m_2} (012)^{n_2} \dots$ de sorte que $\frac{3n_k}{m_k + 3n_k}$ soit une suite de rationnels tendant vers λ par valeurs supérieures. On suppose aussi que $n_k, m_k \rightarrow \infty$.

Essentiellement, cela assure que le coefficient multiplicatif de contraction $\frac{2}{\eta}$ de la preuve du Théorème 1.6 est remplacé par $2 = \frac{2}{1}$ dans une proportion $\frac{m_k}{m_k + 3n_k}$ des itérations. On obtient donc un coefficient géométriquement moyen

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{m_k}{m_k + 3n_k}} \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{3n_k}{m_k + 3n_k}} = \frac{2}{\eta^{\frac{3n_k}{m_k + 3n_k}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\eta^\lambda}$$

Le reste de la preuve suit essentiellement la méthode du Théorème 1.6 de Bartholdi-Erschler.

Pour obtenir la deuxième assertion du théorème, on fait osciller $\frac{3n_k}{m_k + 3n_k}$ entre $\lambda(\alpha)$ et $\lambda(\beta)$ suffisamment lentement. \square

On renvoie à l'article [Bri14b] pour les détails.

Au moment où je rédigeais ce résultat, Bartholdi et Erschler obtenaient un théorème nettement plus raffiné pour les mêmes groupes, dont le théorème précédent est un corollaire.

Théorème 1.8 (Bartholdi-Erschler [BE14]). *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant $\varphi(2R) \leq 2\varphi(R) \leq \varphi(\eta R)$, alors il existe un groupe, de la forme Γ_ω , dont la fonction de croissance satisfait*

$$b_{\Gamma_\omega}(R) \asymp \exp f(R).$$

Ce théorème décrit toutes les classes de croissance connues à ce jour, hormis bien sûr celles polynomiales, réhaussant la pertinence de la Question 1.5.

1.3.3 Diversité des groupes à croissance intermédiaire

Pendant longtemps les seuls exemples de groupes à croissance intermédiaire ont été des variantes assez directes du groupe de Grigorchuk, et ce sont à ce jour les seuls cas où des estimations quantitatives précises sont connues. Récemment, ces constructions ont été largement diversifiées, notamment avec la construction, due à Nekrashevych, de groupes simples à croissance intermédiaires [Nek18].

Des groupes simples à croissance intermédiaires

Un résultat remarquable a d'abord été la construction des premiers exemples de groupes moyennables de type fini qui soient simples par Juschenko et Monod [JM13]. Pour T un homéomorphisme minimal d'un espace de Cantor C , on appelle groupe plein topologique, noté $[[T]]$, le groupes des homéomorphismes de C qui sont puissances de T par morceaux. D'après Matui [Mat06], son sous-groupe dérivé $[[T]]'$ est simple et infini, et également de type fini lorsque T est un sous-décalage (c'est-à-dire que C est un fermé invariant du décalage T sur $F^{\mathbb{Z}}$ pour un ensemble fini F). Juschenko et Monod ont démontré que le groupe plein topologique $[[T]]$ est moyennable [JM13]. On renvoie par exemple au séminaire Bourbaki de Cornulier sur le sujet [Cor14].

Ces résultats ont été étendus à des classes de groupes plus larges par Juschenko, Nekrashevych et de la Salle [JNS16], puis Juschenko, Matte Bon, Monod et de la Salle [Jus+18]. Matte Bon a notamment montré que des groupes pleins topologiques de sous-décalages minimaux peuvent contenir les groupes de Grigorchuk G_ω à croissance intermédiaire [MB15].

La construction par Nekrashevych de groupes simples à croissance intermédiaire [Nek18] se situe dans la lignée de ces travaux. Grossièrement on peut y penser comme une manière de remplacer le groupe \mathbb{Z} d'homéomorphisme du Cantor par une action minimale du groupe diédral infini $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$. Étant donnée une involution a du Cantor C , on appelle fragmentation de a tout groupe fini A d'homéomorphismes de C tels que $\forall h \in A, \forall x \in C, h(x) = x$ ou $h(x) = a(x)$. On appelle fragmentation de l'action diédrale le sous-groupe $\langle A \cup B \rangle$ engendré par des fragmentations A et B de a et b .

S'il existe un point fixe ξ de a de sorte que pour tout $h \in A$ l'intérieur de l'ensemble des points fixes de h s'accumule sur ξ (ce que Nekrashevych appelle élégamment une *singularité purement non-Hausdorff*), alors le groupe $\langle A \cup B \rangle$ est périodique. Si de plus les orbites sont linéairement répétitives, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que tout sous-graphe fini Σ du graphe de Schreier apparait dans toute boule de rayon $C \text{diam}(\Sigma)$, alors le groupe a croissance intermédiaire. Ces critères abstraits s'incarnent dans des groupes tout à fait concrets. Par exemple l'action $a(x) = \varphi - x$ et $b(x) = 1 - x$ sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} (qui s'identifie au Cantor modulo une partie dénombrable) admet une fragmentation explicite décrite dans [Nek18, Section 8] en termes de bord d'un arbre binaire.

Cette construction recouvre le cas des groupes de Grigorchuk, qui fragmentent l'action diédrale sur le bord de l'arbre binaire enraciné donnée par $a = (1, 1)\varepsilon$ et $b = (a, b)$ (cf définition de G_ω à la section 1.3.2). Elle recouvre surtout bien d'autres exemples.

Diversités des groupes à croissance intermédiaire agissant sur des arbres enracinés

Ces résultats spectaculaires ont légitimement attiré l'attention des spécialistes sur ces nouveaux groupes, mais les exemples de groupes à croissance intermédiaire agissant sur des arbres enracinés, et donc en particulier résiduellement finis, se révèlent aussi assez variés.

Rappelons d'abord que si l'on se concentre sur les groupes de Grigorchuk agissant sur un arbre binaire, il existe des variantes de cette famille agissant sur des arbres enracinés

de degrés p premiers, dont Grigorchuk a également montré qu'ils ont croissance intermédiaire [Gri80; Gri83; Gri85; Gri86]. Aleshin avait construit dès 1972 des groupes infinis de torsion agissant sur des arbres enracinés de degré premier [Ale72]. Merzlyakov a montré que le groupe de Grigorchuk $G_{(012)^\infty}$ (pour $p = 2$) est commensurable à un exemple d'Aleshin [Ale72, Fig. 1]. D'autres variantes ont été construites notamment par Gupta-Fabrykoski [FG91] et par Bartholdi et Sunik [BS01].

D'autres exemples, assez peu étudiés, sont apparus en lien avec les premières constructions de groupes à croissance non uniforme par Wilson [Wil04b; Wil04a]. Un groupe Γ a croissance non-uniforme s'il a croissance exponentielle et si pour tout $\alpha > 1$ il existe une partie génératrice S telle que la fonction de croissance associée ait un taux de croissance exponentiel inférieur à α , soit $b_{\Gamma,S}(R) \leq C\alpha^R$ pour une constante C . D'autres exemples de groupe à croissance non-uniforme apparaissent dans des articles de Bartholdi [Bar03] et Nekrashevych [Nek09]. Bartholdi démontre la croissance non-uniforme en montrant que pour une suite de partie génératrices bien choisies, les graphes de Cayley de Γ convergent dans la topologie de Chabauty vers le graphe de Cayley d'un groupe à croissance intermédiaire. Il s'avère, comme je l'ai montré dans ma thèse [Bri08; Bri09], que c'est aussi le cas pour les groupes construits par Wilson. Ceci a fourni d'autres exemples de groupes à croissance intermédiaires.

On peut noter que pour tous les exemples de groupes à croissance non-uniforme connus, il existe une suite de parties génératrices pour laquelle le groupe marqué par ces générateurs converge en topologie de Chabauty vers un groupe limite ayant croissance intermédiaire. Bartholdi et Erschler ont en particulier construit des groupes à croissance non-uniforme où le groupe limite ayant croissance intermédiaire est $A \wr_{G,1^\infty} G_{(012)^\infty}$ pour A abélien [BE15]. Leur construction montre que n'importe quel groupe dénombrable peut être plongé dans un groupe ayant croissance non-uniforme.

On ignore si l'existence d'un groupe limite ayant croissance intermédiaire est nécessaire pour avoir croissance non-uniforme (un argument de compacité montre que si tel n'est pas le cas, alors les parties génératrices pour lesquelles la croissance diminue doivent avoir un cardinal non-borné). Dans les articles [Nek09; BE15], le groupe limite est un groupe de Grigorchuk ou apparenté. Dans [Wil04b; Wil04a; Bar03; Bri09] ce sont des groupes à croissance intermédiaire originaux.

Tous ces exemples ont en commun d'avoir des portraits des générateurs supportés à distance finie de rayons géodésiques de l'arbre.

Le portrait d'un automorphisme φ d'un arbre enraciné T est un moyen de décrire cet automorphisme. On se concentre comme toujours sur les arbres enracinés sphériquement homogènes, c'est-à-dire que la valence d'un sommet ne dépend que de la distance à la racine. Un tel arbre est de la forme $T_{(d_\ell)}$ pour une certaine suite $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ où $1 + d_\ell$ est le degré de tout sommet à distance ℓ de la racine (de sorte que d_ℓ est le nombre d'arêtes issues du sommet et s'en éloignant). On identifie les sommets de cet arbre aux suites $(i_1 \dots i_\ell)$ finies avec $i_j \in \{1, \dots, d_j\}$ et son bord aux telles suites infinies, la racine correspondant à la suite vide \emptyset . L'ensemble des sommets à distance ℓ de la racine est souvent appelé *niveau* (plutôt que sphère) dans ce contexte, noté $\text{Niv}(\ell)$.

L'isomorphisme (1.1) se généralise en

$$\text{Aut}(T_{(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}}) \simeq \text{Aut}(T_{(d_{\ell+1})_{\ell \in \mathbb{N}}}) \wr_{\{1,2,\dots,d_0\}} \mathcal{S}_{d_0} \quad (1.2)$$

Cela signifie que se donner un automorphisme de l'arbre associé à la suite (d_0, d_1, d_2, \dots) revient à se donner d_0 automorphismes de l'arbre associé à la suite décalée (d_1, d_2, \dots) ainsi qu'une permutation σ_\emptyset de $\{1, 2, \dots, d_0\}$. En itérant l'isomorphisme (1.2), il apparaît que se donner un automorphisme de $T_{(d_\ell)}$ est équivalent à la donnée d'une application qui à chaque sommet de T de niveau ℓ associe une permutation de $\{1, \dots, d_\ell\}$. C'est cette application qu'on appelle le portrait.

Notation 1.9. *Étant donné un arbre enraciné T et un sommet v , pour tout automorphisme φ de T , on note T_v le sous-arbre issu de v (l'ombre de v), on note σ_v la permutation associée au sommet v . Le portrait de φ est la collection $(\sigma_v)_{v \in T}$. La section de φ à v est l'automorphisme noté $\varphi|_v$ de l'arbre T_v dont le portrait est $(\sigma_w)_{w \in T_v}$*

La fonction d'activité d'un automorphisme φ est définie par

$$a_\varphi(\ell) := \#\{v \in \text{Niv}(\ell) : \varphi|_v \neq \text{id}\}$$

Elle compte le nombre de sous-arbres actifs au niveau ℓ . Un groupe Γ d'automorphismes de T a activité majorée par une fonction $f(\ell)$ si pour tout $\varphi \in \Gamma$ on a $a_\varphi(\ell) \preceq f(\ell)$. Un résultat bien connu de Sidki assure que lorsque Γ provient d'un automate, alors son activité est soit polynômiale de degré entier, soit exponentielle [Sid00].

Les groupes de Grigorchuk [Gri85; Gri86] ainsi que les variantes des articles [FG91; BS01] ont des générateurs dont le portrait est supporté à distance ≤ 1 d'un même rayon géodésique de T . Pour les exemples des articles [Bar03; Bri09], les générateurs ont un portrait situé sur deux (trois dans l'exemple de Bartholdi) rayons géodésiques. Pour tous ces groupes, le portrait de chaque élément est situé à distance ≤ 1 d'une union finie de rayons géodésiques. En particulier, ils ont activité bornée.

Dans la note [Bri18], j'ai donné un exemple de groupe d'automate à activité exponentielle et croissance intermédiaire.

Proposition 1.10 ([Bri18]). *Il existe des groupes à croissance intermédiaire engendrés par des automates ayant activité exponentielle.*

Comme observé par Nekrashevych, ce sont aussi les seuls exemples connus de groupes à croissance intermédiaire ayant des graphes de Schreier qui ne soient pas simplement connexes à grande échelle. La construction est fournie par un automate explicite ayant 3 états et un alphabet à 8 lettres.

Implémentation d'estimations du coefficient de croissance intermédiaire d'un groupe d'automate

En vue de la question 1.5, il apparaît nécessaire d'obtenir des bornes aussi précises que possibles sur les fonctions de croissance dans le cas intermédiaire, notamment des bornes

supérieures. Dans le cas des groupes agissant sur des arbres enracinés, il y a une méthode générale, élaborée par Grigorchuk [Gri85; Gri86] qui fournit une borne supérieure en fonction du taux de contraction de la longueur des mots lors du passage au produit en couronne. Cette méthode a été raffinée par Bartholdi [Bar98] qui a introduit l’usage de poids appropriés sur les générateurs. Muchnik et Pak [MP01] ont également obtenu la même borne supérieure que Bartholdi. Leur méthode est similaire, mais elle utilise les poids triviaux (uniformes), au coût d’une version développée de la partie analytique de la preuve, là où les estimations de contraction de longueurs sont utilisées pour borner la croissance. Dans un travail en commun avec Thibault Godin et Bijan Mohammadi, nous avons implémenté cette méthode pour obtenir des bornes supérieures sur la fonction de croissance, ou plus précisément sur l’exposant de croissance des groupes d’automates. Ce travail a donné lieu à l’article [BGM22], les codes GAP et Fortran sont disponibles en ligne [God].

L’exposant (supérieur) de croissance d’un groupe Γ est le réel

$$\alpha(\Gamma) := \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \log b_\Gamma(R)}{\log R}.$$

Notons qu’il existe des groupes à croissance intermédiaire ayant exposant $\alpha(\Gamma) = 1$, comme par exemple le groupe $G_{(01)^\infty}$ dont la fonction de croissance est comparable à $\exp(\frac{R}{\log R})$ d’après des travaux d’Erschler [Ers04a]

Pour un groupe Γ , on appelle système de poids d’une partie génératrice finie S toute application $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Un système de poids induit une norme sur Γ mesurant la π -longueur minimale d’un mot représentant :

$$\|\gamma\|_\pi := \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \pi(s_i) : s_1 \dots s_k = \gamma, s_i \in S \right\}$$

Cette norme est symétrique lorsque S et π le sont. On peut donc définir la croissance du groupe relativement à cette norme

$$b_{\Gamma, S, \pi}(R) = \#\{\gamma : \|\gamma\|_\pi \leq R\}.$$

Il est élémentaire de voir que $b_{\Gamma, S, \pi} \asymp b_{\Gamma, S}$ avec des constantes ne dépendant que de π . Le résultat principal de l’article [MP01] peut se formuler comme suit.

Théorème 1.11 (Muchnik-Pak [MP01]). *Pour un triplet (Γ, S, π) , s’il existe $d \in \mathbb{N}$, $\eta \in]0, 1[$, $c_0 > 0$ et un ensemble fini K tels que pour tout R entier on dispose d’une injection*

$$B_{\Gamma, S, \pi}(R) \hookrightarrow \bigcup_{R_1 + \dots + R_d \leq \eta R + c_0} K \times \prod_{i=1}^d B_{\Gamma, S, \pi}(R_i)$$

alors la croissance de Γ satisfait $b_\Gamma(R) \preceq \exp(R^\alpha)$ pour $\alpha = \frac{\log(d)}{\log(d) - \log(\eta)} < 1$.

Le point clé est que le facteur η , qui gouverne le coefficient de croissance α peut-être amélioré pour un choix judicieux de poids π . En pratique, pour obtenir de telles injections pour des groupes d’automates, il suffit de construire un certain type de partie qui soit

finie et dont tous les éléments satisfont une contraction forte lors du passage au produit en couronne (1.2).

On dit qu'une partie Δ d'un groupe de type fini Γ muni d'une partie génératrice pondérée (S, π) est *essentiellement génératrice des géodésiques* (noté e.g.g.) s'il existe une famille finie F de mots en S telle que pour tout γ dans Γ , il existe $\delta_1, \dots, \delta_n$ dans Δ et h dans F de sorte que le mot $\delta_1 \dots \delta_n h$ soit un représentant minimal de γ . Notons que si l'on dispose d'une telle partie pour un groupe, alors sa projection dans tout groupe quotient a encore la même propriété.

Proposition 1.12 ([BGM22]). *Soit Γ un groupe muni d'une injection $\Gamma \hookrightarrow \text{Sym}(X) \wr_X \Gamma$ pour un ensemble fini X . S'il existe une partie génératrice pondérée (S, π) , une partie e.g.g. Δ finie et une constante $\eta \in [0, 1]$ telles que*

$$\forall \delta \in \Delta, \sum_{x \in X} \|\delta|_x\|_\pi \leq \eta \|\delta\|_\pi,$$

alors les hypothèses du Théorème 1.11 sont satisfaites avec $d = |X|$ et le même η .

Ainsi, l'estimation du coefficient $\alpha(\Gamma)$ se réduit à la recherche d'une telle partie e.g.g. et d'une bonne pondération. D'un point de vue théorique c'est assez simple mais d'un point de vue pratique c'est assez délicat. Le premier écueil est qu'on connaît en général très mal le groupe Γ . On construit donc une partie e.g.g. dans le groupe libre \mathbb{F}_S , et on utilise Gap [Gap] pour implémenter les calculs dans l'injection au produit en couronne. Cela a été possible grâce au bagage informatique de Thibault Godin. Ensuite, il s'agit d'optimiser le choix du poids π , c'est-à-dire de minimiser la quantité

$$\sup_{w \in \Delta} \frac{\sum_{x \in X} \|w|_x\|_\pi}{\|w\|_\pi}.$$

On doit donc minimiser la borne supérieure d'une famille finie (mais potentiellement nombreuse) de fractions rationnelles sur un polytope de \mathbb{R}^S . Pour cela, nous avons utilisé un algorithme d'optimisation numérique mis au point par Bijan Mohammadi.

Nous avons obtenu des estimées nouvelles pour plusieurs groupes et l'implémentation a permis de vérifier que de nombreux groupes d'automates ont croissance intermédiaire (voir article [BGM22] pour les détails), mais malheureusement nous n'avons pas obtenu d'estimations inférieures à α_0 .

Questions et perspectives

La Question 1.5 apparaît centrale dans la compréhension du monde des groupes de type fini. Les exemples de groupes à croissance intermédiaire sont maintenant très nombreux, mais leur diversité est encore mal comprise.

Un premier objectif est d'obtenir des estimations fines sur les fonctions de croissance. La recherche de bornes supérieure est intéressante relativement à la Question 1.5, mais afin de déterminer la qualité des bornes supérieures, il faut aussi obtenir des bornes inférieures. En

particulier, on dispose de bornes supérieures intéressantes sur des groupes simples par les travaux de Bartholdi-Nekrashevych-Zheng [BNZ22], qui assurent que $\alpha(\Gamma) \leq 0.9181$ pour le groupe décrit dans [Nek18, Section 8], là où les estimations générale de Nekrashevych ne permettait pas de savoir si l'exposant était < 1 . Toutefois, on ne dispose pas de bornes inférieures comparables.

Déjà pour les p -groupes introduits par Grigorchuk dans [Gri86], avec $p \geq 3$, on ne dispose pas de bornes inférieures satisfaisantes, même si l'on considère leurs extensions avec un produit en couronne à la Bartholdi-Erschler comme dans [BE12]. Il y a là un problème combinatoire laissé en suspens. Dans les termes de l'esquisse de preuve du Théorème 1.6, on dispose bien d'un coefficient de contraction η explicite (cf [Gri86; BS01]), mais on ignore s'il y a un mot w de longueur $(p/\eta)^n$ dont l'orbite inverse aurait cardinal p^n . De telles questions sont encore pertinentes pour des groupes d'automates plus généraux tels que ceux introduits dans [Bri18; BGM22].

Dans le cas des groupes obtenus par des moyens dynamiques, tels que les groupes plein-topologiques ou les fragmentations de Nekrashevych, il y a un lien fort entre les propriétés du groupe et celles du sous-décalage sous-jacent. Essentiellement, la petitesse du groupe (croissance intermédiaire, moyennabilité) est corrélée à la faible complexité du sous-décalage. Mieux comprendre cette correspondance est une tâche importante, déjà pertinente en se restreignant au cadre donné par Nekrashevych dans [Nek18].

Une première question serait de caractériser les sous-décalages correspondants aux fragmentations qui admettent une action sur un arbre binaire enraciné. Le sous-décalage correspondant au groupe de Grigorchuk a été décrit complètement dans [Sel20; Gri+22]. C'est un cas particulier de sous-décalage Toeplitz (tout sous-mot w est périodique mais la période dépend du sous-mot). Mes échanges avec Thibault Godin sur le sujet nous laissent penser qu'une fragmentation de Nekrashevych admet une action sur un arbre binaire enraciné si et seulement si le sous-décalage appartient à une classe un peu plus large que celle des sous-décalages Toeplitz.

MARCHES ALÉATOIRES SUR DES GROUPES

2.1	Marches aléatoires	25
2.1.1	Invariants/quantités asymptotiques	25
2.1.2	Produits en couronne	26
2.1.3	Bord de Poisson	28
2.2	Sensibilité au bruit	32
2.3	La famille des groupes dirigés	35
2.3.1	Les groupes dirigés	36
2.3.2	Réalisations pour l'entropie	37
2.4	La famille des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères	39
2.4.1	Produits diagonaux d'allumeurs de réverbères	39
2.4.2	Réalisation pour la vitesse et la probabilité de retour	42

Étant donné un groupe G et une mesure de probabilité μ sur G , la marche aléatoire est la suite de variables aléatoires $Z_n = g_1 \dots g_n$ où les g_i sont indépendantes, toutes de même loi μ . Lorsque μ est équilibrée sur une partie génératrice S , on qualifie la marche aléatoire de simple. La suite (Z_n) décrit alors la trajectoire d'une particule se déplaçant sur le graphe de Cayley en tirant équitablement au sort sa direction à chaque sommet.

Une marche aléatoire est donc une manière d'explorer un groupe en tant qu'espace géométrique. Les marches aléatoires sur \mathbb{R}^d ou \mathbb{Z}^d ont été étudiées depuis longtemps. Kesten et Furstenberg ont été pionniers dans l'étude des marches aléatoires sur des groupes plus généraux, dès les années 60 [Kes59; Fur63a].

Diverses questions probabilistes se posent concernant les marches aléatoires. On en considère ici deux types principaux. Un premier type est lié à l'étude de certaines caractéristiques, telles que la probabilité que la marche soit de retour à son point de départ au temps n , ou bien à quelle distance elle s'en trouve en moyenne, ou encore l'entropie de Shannon de la distribution au temps n . On s'intéressera ici au comportement asymptotique de ces quantités en temps long, et pas aux calculs explicites, qui semblent inaccessibles pour

la plupart des groupes. Celles-ci sont reliés à diverses propriétés des groupes, en termes d'analyse, de géométrie ou des représentations.

Un second type de question est l'étude de la diversité des comportements typiques de la marche aléatoires. Par exemple pour un groupe agissant sur un espace hyperbolique, la marche induite se comporte généralement à peu près comme une géodésique, et le bord géométrique décrit donc en un certain sens l'ensemble des trajectoires de la marche aléatoire. Pour un groupe plus général, on peut définir un espace abstrait décrivant ces trajectoires : le bord de Poisson [Fur63a; KV83]. Pour un groupe donné, se pose la question d'identifier ce bord à un espace géométrique concret.

On commence ce chapitre par des généralités sur ces deux types de questions. Après une digression sur la sensibilité au bruit, on présentera des résultats sur la réalisation des quantités asymptotiques des marches aléatoires (premier type de question). Les outils présentés pour le bord de Poisson s'avéreront utiles au chapitre 4.

2.1 Marches aléatoires

On note μ^{*n} la convolée $n^{\text{ième}}$ de la loi μ , c'est-à-dire la loi de Z_n . On note \mathbb{P}_μ la loi des trajectoires de la marche aléatoire. En d'autres termes, c'est l'image par l'application trajectoire $\vartheta : G^{\mathbb{N}} \rightarrow G^{\mathbb{N}}$, qui aux incréments (g_1, g_2, g_3, \dots) associe la trajectoire $(g_1, g_1g_2, g_1g_2g_3, \dots)$, de la loi produit $\mu^{*\mathbb{N}}$.

Les aspects des marches aléatoires présentés ici ne constituent bien évidemment qu'une petite partie de la théorie. On renvoie par exemple aux livres de référence [Woe00; LP21b] pour une introduction appropriée à ce sujet.

2.1.1 Invariants/quantités asymptotiques

On s'intéressera principalement aux trois quantités suivantes, ou plutôt à leur comportement asymptotique. On donne ici simplement les définitions pour des groupes dénombrables.

Définition 2.1. *Pour un groupe probabilisé (G, μ) , on définit :*

- sa vitesse $L_\mu(n) := \mathbb{E}d_S(e, Z_n) = \sum_{g \in G} d_S(e, g)\mu^{*n}(g)$, comme la distance moyenne au point de départ,
- sa probabilité de retour $\Phi_\mu(n) = \mathbb{P}(Z_n = e)$,
- et son entropie de Shannon $H_\mu(n) = H(\mu^{*n}) = - \sum_{g \in G} \mu^{*n}(g) \log \mu^{*n}(g)$.

On appelle aussi parfois entropie et vitesse les nombres réels suivants

$$\ell(\mu) := \lim_n \frac{L_\mu(n)}{n} \quad \text{et} \quad h_\infty(\mu) := \lim_n \frac{H(\mu^{*n})}{n},$$

que l'on nommera ici vitesse et entropie asymptotiques afin d'éviter les confusion.

Ces trois quantités ont été largement étudiées. Les deux premières ont une interprétation évidente. L'entropie de Shannon d'une mesure peut s'interpréter comme la quantité moyenne d'information dans le tirage d'un événement. On renvoie par exemple au livre de Gray [Gra11] pour une présentation détaillée de la théorie de l'entropie de Shannon. L'entropie de Shannon est un outil majeur pour l'étude des bords de Poisson, voir ci-dessous. Notons une inégalité triviale mais utile :

$$H(\mu) \leq \log \#\text{supp}(\mu) \tag{2.1}$$

Dés 1959, Kesten a montré que pour des mesures symétriques, la probabilité de retour a une décroissance moins rapide que les exponentielles si et seulement si le groupe est moyennable [Kes59]. En fait, pour les mesures à support fini symétriques, la probabilité de retour est un invariant de quasi-isométrie d'après Pittet-Saloff-Coste [PSC00].

En ce qui concerne la vitesse et l'entropie, on ignore si elles sont invariantes par quasi-isométrie, où même par changement de systèmes générateurs symétriques pour les marches aléatoires simples.

Question 2.2. Soit G un groupe, S et T deux systèmes générateurs symétriques, a-t-on

$$L_S(n) \asymp L_T(n) \quad \text{et} \quad H_S(n) \asymp H_T(n) \quad ?$$

On ignore même si le fait d'être asymptotiquement linéaire est stable par changement de système générateur symétrique. Cependant la question de la dépendance de l'entropie et la vitesse asymptotiques au choix de mesure a été étudiée. Elle sont continues et même analytiques pour des groupes hyperboliques [GL13; EK13; Gou17].

Dans mes travaux, je me suis intéressé à ces quantités principalement du point de vue du problème inverse, c'est-à-dire de la réalisation.

Question 2.3. Quels sont les comportements asymptotiques possibles des trois quantités : entropie, vitesse, probabilité de retour ? En particulier si on se restreint à des mesures symétriques à support fini, ou à des marches aléatoires simples.

Parmi les premiers exemples, on a pour des groupes virtuellement nilpotents de croissance $b(R) \asymp R^d$

$$L(n) \asymp \sqrt{n} \quad \text{et} \quad H(n) \asymp \log(n) \quad \text{et} \quad \Phi(n) \asymp \frac{1}{n^{d/2}}.$$

La vitesse était connue dès Guivarch [Gui80]. La borne supérieure sur l'entropie découle de (2.1). Les bornes inférieures d'entropie et vitesse s'obtiennent en projetant sur l'abélianisation du groupe nilpotent d'indice fini. Les estimations sur la probabilité de retour sont dues à Varopoulos [Var87] (voir aussi Hebisch-Saloff-Coste [HSC93]).

Pour des groupes libres non abéliens, ou plus généralement des groupes non-moyennables, on a d'après [KV83; Kes59]

$$L(n) \asymp n \quad \text{et} \quad H(n) \asymp n \quad \text{et} \quad \Phi(n) \asymp \exp(-n).$$

2.1.2 Produits en couronne

Le produit en couronne de deux groupes L et B est le produit semi-direct

$$L \wr B = (\oplus_B L) \rtimes B$$

où B agit par translation des indices. Le groupe B est dit de base et L de lampe. Les produits en couronnes, à commencer par le célèbre groupe d'allumeur de réverbère $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, ont fourni de nombreux exemples et contre-exemples en théorie des groupes : sur des calculs de spectre [GZ01; BW05; LNW08], sur la géométrie des groupes [CT05; BG18], et sur les marches aléatoires et leur quantités asymptotiques (à commencer par l'article de Kaimanovich-Vershik [KV83], voir aussi les très nombreuses références subséquentes).

Quantités asymptotiques des marches aléatoires sur des produits en couronne

Les marches aléatoires sur des produits en couronne ont été étudiées notamment par Pittet-Saloff-Coste [PSC02] et Erschler [Ers01; Ers04b; Ers06a; Ers03a].

On rappelle entre autres les résultats suivants :

- D’après [Ers01], si L est fini, le groupe $L \wr B$ est Liouville (c’est-à-dire d’entropie sous-linéaire) si et seulement si la marche aléatoire induite sur B est récurrente. Pour les marches aléatoires simples, cela signifie B commensurable à $\{e\}$ ou \mathbb{Z} ou \mathbb{Z}^2 .
- D’après [Ers04b], si on note $G_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_{i+1} = G_i \wr \mathbb{Z}$, alors pour une marche aléatoire simple, $L_{G_i}(n) \asymp n^{1-\frac{1}{2^i}}$ et $H_{G_i}(n) \asymp n^{1-\frac{1}{2^i}}$.
- D’après [PSC02; Ers06a], si L est fini et B a croissance polynomiale de degré d , alors

$$\Phi_G(n) \asymp \exp\left(-n^{\frac{d}{d+2}}\right).$$

Notons en particulier que d’après [Var91] (voir aussi [HSC93; VSCC92]), la probabilité de retour d’une marche aléatoire à support fini symétrique sur un groupe à croissance exponentielle satisfait $\Phi_\mu(n) \leq \exp(-n^{1/3})$. Ainsi en un certain sens, le groupe d’allumeur de réverbère $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ est “aussi petit que possible” pour un groupe à croissance exponentielle.

Digression sur les propriétés géométriques de certains produits en couronne

La petitesse du groupe d’allumeur de réverbère du point de vue de la probabilité de retour peut être relié heuristiquement à la présence dans son graphe de Cayley d’impasses, c’est-à-dire de sommets dont tous les voisins sont plus proches de l’identité. Lorsqu’une trajectoire de la marche aléatoire s’engage dans une impasse, elle doit attendre d’en ressortir avant de s’éloigner. C’est ce qui explique que la probabilité de retour soit relativement grande et la vitesse relativement petite.

Il est possible de quantifier précisément la profondeur des impasse, voir [CT05]. Dans un travail en commun avec Antoine Gournay, nous avons plus généralement étudié l’épaisseur des sphères dans les graphes de Cayley de groupes de types finis et notamment de produit en couronne [BG18]. L’épaisseur d’une sphère $S(n)$ est le r minimal tel que la partie $S(n)$ soit connexe dans l’anneau $A(n, n+r)$. Elle est finie pour les groupes à un bout de présentation fini [Gou14], infinie pour les groupes à plusieurs bouts. Pour le groupe d’allumeur de réverbère, l’épaisseur est $n+2$ pour le système générateur “switch-walk-switch”. Notons que l’épaisseur, tout comme l’existence et la profondeur des impasses dépend en général fortement du système générateur. On renvoie à l’introduction de l’article [BG18] pour un panorama plus complet.

Une autre manière de décrire la géométrie du groupe d’allumeur de réverbère, mise en lumière par Woess, est comme produit horosphérique de deux arbres réguliers de même valence [Woe13]. Le produit horosphérique $X \bowtie Y$ de deux espaces X et Y munis de fonctions de Busemann h_X et h_Y (limites en convergence uniforme sur les compacts de

fonctions distance à un point auxquelles on ajoute une constante pour fixer la valeur en un point de référence) est la partie du produit cartésien définie par

$$X \bowtie Y := \{(x, y) \in X \times Y : h_X(x) + h_Y(y) = 0\}.$$

Pour deux plans hyperboliques X et Y , on retrouve les groupes de Lie $Sol(p, q)$. Ici p et q dépendent de la constante de courbure du plan hyperbolique choisie dans chacune des deux copies. Pour $X = \mathbb{H}^2$ et Y un arbre, on obtient l'espace "tree-bolique" étudié par exemple dans [FM99; Ben+15], qui s'identifie au 2-complexe de Cayley du groupe de Baumslag-Solitar $BS(1, p) = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^p \rangle$ où l'arbre a valence $p + 1$.

Ce point de vue a permis à Eskin-Fisher-Whyte de classier les graphes de Cayley de groupes d'allumeurs de réverbères $F \wr \mathbb{Z}$. Deux tels groupes sont quasi-isométriques si et seulement si $\#F_1$ et $\#F_2$ sont puissances d'un même entier [EFW12; EFW13].

Dans son travail de thèse que j'ai eu le plaisir de co-encadrer avec Constantin Vernicos, Tom Ferragut a étudié de manière systématique les produits horosphériques d'espaces hyperboliques. Il a notamment montré que le bord visuel de $X \bowtie Y$ est l'union des bord de X et de Y [Fer20], ce qui était bien connu dans les cas classiques [Tro98; Ben+15]. Il a aussi étendu la rigidité des quasi-isométries (description explicites des quasi-isométries du produit horosphérique) au cas où X et Y sont Busemann convexes et à géométrie bornée, sous une hypothèse technique de différence des facteurs de contractions sur X et Y [Fer22]. Cette hypothèse technique correspond au cas $p \neq q$ pour les groupes Sol , sous laquelle le résultat de [EFW07] est moins difficile. Le théorème de Ferragut s'applique en particulier au cas où X et Y sont des groupes de Heintze, c'est-à-dire des groupes de Lie de la forme $(N_1 \times N_2) \rtimes \mathbb{R}$ où l'action de \mathbb{R} est diagonale, contractante sur N_1 , dilatante sur N_2 , données par deux matrices de déterminants distincts.

Ces résultats sont significatifs dans la perspective d'une classification à quasi-isométrie près des groupes de Lie résolubles, vaste programme en lien notamment avec la classification des groupes de Lie nilpotents initiée par Pansu. Dans la lignée de ce travail, comprendre le cas des groupes de Lie $N \rtimes \mathbb{R}$ semble un passage obligé mais ardu.

Dans une autre direction, la classification à quasi-isométrie près due à Eskin-Fisher-Whyte a été généralisée par Genevois-Tessera aux cas où le groupe de base a un bout et présentation finie [GT24]. À l'inverse, le groupe $F \wr \mathbb{F}_2$ est quasi-isométrique à un groupe simple d'après Le Boudec [LB21]. Reste la question des graphes d'allumeurs de réverbères sur une base ayant un nombre fini ≥ 3 de bouts (ce ne sont alors plus des groupes).

2.1.3 Bord de Poisson

Hormis les quantités ou invariants asymptotiques, une des questions majeures de l'étude des marches aléatoires est la compréhension globale de l'ensemble des trajectoires $(G^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu)$. D'un point de vue de la géométrie de grande échelle, il s'agit de comprendre le comportement asymptotique des trajectoires. Il existe une construction fonctorielle d'un espace décrivant ces trajectoires : le bord de Poisson.

Définition

On considère, sur l'espace des trajectoires, le décalage temporel :

$$T : (Z_1, Z_2, Z_3, \dots) \mapsto (Z_2, Z_3, Z_4, \dots).$$

L'espace des composantes ergodiques de ce système dynamiques est un espace probabilisé, noté (B, ν_∞) , et appelé *bord de Poisson* de (G, μ) . Cette construction d'un espace abstrait s'avère extrêmement pertinente. Elle peut se reformuler en différents termes.

Définition 2.4. Soit (G, μ) un groupe probabilisé.

- Une application $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -harmonique si

$$\forall g \in G, \quad \sum_{h \in G} f(gh)\mu(h) = f(g).$$

Le signe somme est bien sûr remplacé par une intégrale dans le cas des mesures non-atomiques sur des groupes localement compacts.

- Si G agit sur X , et η est une probabilité sur X , η est μ -stationnaire si $\eta * \mu = \eta$, où la convolée désigne la loi du produit xh de deux variables aléatoires indépendantes où x a loi η et h a loi μ .
- Un (G, μ) -espace stationnaire (X, η) , muni d'une topologie pour laquelle l'action est continue, est un μ -bord si pour \mathbb{P}_μ -presque toute trajectoire, la suite $Z_n \eta(\cdot) = \eta(Z_n^{-1} \cdot)$ converge \star -faiblement vers une masse de Dirac.

Il est également possible de définir la notion de μ -bord pour des espaces stationnaires non-topologiques. Pour cela, on renvoie au survey de Furman [Fur02, Def. 2.10].

Le bord de Poisson se caractérise par plusieurs propriétés équivalentes, tirées des travaux de Furstenberg [Fur63a; Fur63b; Fur71] pour les groupes de Lie et de Kaimanovich-Vershik [KV83] pour les groupes dénombrables. On renvoie au survey de Furman [Fur02] pour une exposition détaillée.

Théorème 2.5 ([Fur63a; KV83]). *Le bord de Poisson (B, ν_∞) du groupe probabilisé (G, μ) est caractérisé par les propriétés suivantes.*

- (Représentation de Poisson) Pour toute fonction μ -harmonique bornée f sur G , il existe une application $\Phi_f \in L^\infty(B)$ telle que

$$\forall h \in G, \quad f(h) = \int_B \Phi_f(h^{-1}x) d\nu_\infty(x).$$

on dispose donc d'un G -isomorphisme $H^\infty(G) \leftrightarrow L^\infty(B)$ entre les fonctions harmoniques bornées sur G et les fonctions $L^\infty(B, \nu_\infty)$.

- (Universalité) Tout μ -bord est un quotient équivariant du bord de Poisson.

Pour un mouvement brownien sur le disque de Poincaré en lieu et place de la marche aléatoire, on retrouve la représentation de Poisson en termes des fonctions sur le cercle, bord du disque [Fur63a]. C'est pour cela que Furstenberg a nommé ces objets *bords de Poisson*.

Notons que l'espace des composantes ergodiques de $(G^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu, T)$ est obtenu en quotientant $G^{\mathbb{N}}$ par la tribu \mathcal{I} des événements T -invariants. D'après Kaimanovich [Kai92], sous des hypothèses très générales, par exemple s'il existe n tel que $d_{\text{TV}}(\mu^{*n}, \mu^{*(n+1)}) < 1$, la tribu \mathcal{I} coïncide, modulo ensembles de mesure nulle, avec la tribu asymptotique \mathcal{T} , engendrée par la relation d'équivalence entre trajectoires $(Z_n) \sim T((Z_n)) = (Z_{n+1})$. Ainsi en un sens précis, le bord de Poisson décrit précisément les comportements asymptotiques des trajectoires de la marche aléatoire.

Les bords de Poisson se sont avérés des objets très utiles, notamment d'un point de vue de la rigidité des actions de groupes, un vaste sujet que nous ne détaillons pas ici, voir par exemple [Fur67; BF14].

Identification

La construction fonctorielle du bord de Poisson ne fournit qu'un espace abstrait, et pour une groupe (probabilisé) donné, il n'est pas évident de le décrire explicitement, et notamment de le relier à d'autres notions de bord, d'origines géométriques. Il s'agit du problème d'identification, largement étudié par Kaimanovich, qui a élaboré un critère entropique. Ce critère permet d'identifier un μ -bord (disons géométrique ou "concret") donné comme isomorphe au bord de Poisson.

Soit (Z, λ) un μ -bord. On sait alors que pour presque toute trajectoire (Z_n) , il existe $z \in Z$ telle que $Z_n \lambda$ converge vers la masse de Dirac δ_z . On note \mathbb{P}_μ^z la probabilité conditionnée à cet événement. On dispose alors d'une application G -equivariante $p : G^{\mathbb{N}} \rightarrow Z$ telle que $p\mathbb{P}_\mu = \lambda$. D'après Bader-Shalom [BS06, Prop. 2.19], la probabilité conditionnelle coïncide avec la désintégration $\mathbb{P}_\mu = \int_Z \mathbb{P}_\mu^z d\lambda(z)$.

Théorème 2.6 (Kaimanovich [Kai00]). *Soit (Z, λ) un μ -bord de G . Si $h_\infty(\mathbb{P}_\mu^z) = 0$ pour λ -presque tout z dans Z , alors $(Z, \lambda) \simeq (B, \nu_\infty)$.*

Ici $h_\infty(P)$ désigne la limite (P -presque sûrement constante dans ce contexte) de la suite $-\frac{1}{n} \log(P(Z_n))$ sur une trajectoire de loi P . On renvoie à [Kai00, Section 4] pour les détails.

Ce résultat généralise le fait que si l'entropie asymptotique $h_\infty(\mu) = \lim \frac{1}{n} H(\mu^{*n})$ s'annule, alors le bord de Poisson est trivial (réduit à un point) et en particulier toutes les fonctions μ -harmoniques bornées sont constantes [KV83; Der80]. On dit dans ce cas que le groupe probabilisé (G, μ) est de type *Liouville*.

De plus, ce résultat est à l'origine de critères plus géométriques pour l'identification, comme le critère des rayons (ray) ou le critère des bandes (strip) décrits dans [Kai00, Sections 5 & 6]. Ces critères ont permis d'unifier et simplifier divers résultats d'identification,

notamment [Woe89; Woe93] pour des groupes ayant une infinité de bouts, [BL94] pour les groupes fondamentaux de variétés riemanniennes de courbures négative et rang 1, [GR85] pour les sous-groupes discrets de groupes de Lie semi-simples. Il sont aussi été utilisés pour identifier le bord de Poisson de groupes agissant sur des complexes cubiques CAT(0) par Nevo-Sageev et Fernos [NS13; Fer17]. Récemment, Chawla-Forghani-Frisch-Tiozzo ont raffiné ces résultats d'identification en supprimant toute hypothèse de moment sur la mesure pour des groupes agissant sur des espaces métriques hyperboliques de manière faiblement proprement discontinue [Cha+22].

L'identification du bord de Poisson pour les groupes d'allumeurs de réverbères $L \wr G$ (voir Section 2.1.2 pour la définition) a aussi été l'objet d'une attention soutenue. La configuration limite de lampes fournissant naturellement un μ -bord candidat, la question de savoir s'il s'agissait bien du bord de Poisson a été posée par Kaimanovich-Vershik [KV83]. Kaimanovich a montré que c'est le cas pour $G = \mathbb{Z}$ et une marche aléatoire non-centrée. Karlsson et Woess ont montré que c'est le cas lorsque G est un groupe libre [KW07], voir aussi les travaux de Sava [Sav10]. Un progrès décisif est dû à Erschler qui a montré que c'est toujours le cas pour des groupes de base à croissance au moins R^5 [Ers11]. Lyons et Peres ont complété la preuve en traitant les cas de croissance au moins R^3 [LP21a].

Dans leur article, une version plus général du critère des rayons est énoncé : il ne s'agit plus de donner (en fonction du point du bord de l'espace candidat) un rayon (indexé par \mathbb{N} dans le groupe dont la trajectoire serait proche, mais seulement une famille infinie de parties (à croissance sous-exponentielle) par lesquelles la marche aléatoire doit passer. Ce critère nous a permis d'identifier le bord de Poisson du groupe discret affine d'un arbre régulier comme espace de configurations dans l'article [BTZ21] en commun avec Ryokichi Tanaka et Tianyi Zheng.

Le groupe discret affine $DA(T)$ est le sous-groupe des automorphismes d'un arbre régulier T de valence $d + 1$ engendré par $t \cup \text{Sym}(d)$ où t est une translation de longueur 1 le long d'un axe de l'arbre, et étant donné un point de cet axe, $\text{Sym}(d)$ est le groupe des permutations des d sous-arbres enracinés en ce point ne contenant pas le point limite positif de t . Ce groupe n'est pas un produit en couronne mais y ressemble à plusieurs égards de par sa structure algébrique et aussi son bord de Poisson. On renvoie à l'article [BTZ21], où ce groupe a été introduit, en lien avec les graphes allumeurs de réverbères sur des arbres étudiés par Sava [Sav10] et le bord de Poisson des groupes affines [CKW94].

Régularité des mesures au bord

Pour un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie semi-simple G , il s'avère que le bord de Poisson du groupe de Lie, en l'occurrence l'espace de drapeau $B_G = G/P$, est un espace stationnaire pour Γ . Une question naturelle est de savoir si la mesure stationnaire est régulière. Une construction de Kaimanovich-Le Prince [KLP11] permet de toujours trouver une mesure μ sur Γ pour laquelle la mesure stationnaire est absolument singulière. Ces derniers avaient conjecturé que pour μ symétrique, la mesure stationnaire serait toujours absolument singulière. Ce n'est pas le cas. Pour $G = SL(2, \mathbb{R})$, des exemples non-symétriques sont dus à Barany-Pollicott-Simon [BPS12], et des exemples symétriques à Bourgain [Bou12]. Pour les autres groupes de Lie semi-simples, on peut obtenir des mesures

de classe C^k pour toute valeur de k d'après Benoist-Quint [BQ18].

Dans un travail en commun avec Ryokichi Tanaka, nous avons traité le cas du groupe affine "ax+b" et du groupe Sol. Dans ces cas, le bord de Poisson du groupe de Lie s'identifie à \mathbb{R} . Nous avons montré le résultat suivant

Théorème 2.7 ([BT15]). *Soit $G = Sol$.*

1. *Pour tout sous-groupe Γ dénombrable Zariski dense, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une mesure μ non dégénérée sur Γ telle que la mesure stationnaire sur \mathbb{R} ait dimension de Hausdorff $\dim_H(\nu) < \epsilon$. En particulier, ν est singulière.*
2. *Pour tout entier k , il existe des mesures à support fini sur Sol dont les mesures stationnaires sont de classe C^k .*
3. *Pour tout $\ell > 0$, il existe une mesure à support fini sur Sol ayant vitesse $\ell(\mu) = \lim_n \frac{1}{n} L_\mu(n) = \ell$ et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Le premier point découle de l'inégalité suivante: classique (voir par exemple):

$$\dim_H(\nu) \leq \frac{h_\infty(\mu)}{\ell(\mu)}$$

et du fait qu'on peut augmenter la vitesse arbitrairement tout en maintenant l'entropie bornée. Cette inégalité est classique dans le contexte des groupes hyperboliques, voir notamment [Kai98; Led01; LP07; LP08; Tan19; GMM18].

Les deuxième et troisième points s'obtiennent en reliant la mesure stationnaire ν à des convolutions de Bernoulli, qui sont les lois des variables aléatoires de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n \alpha^n$ pour $\alpha \in [0, 1]$ et une suite ε_i de variable de Bernoulli indépendantes $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Les convolutions de Bernoulli peuvent être singulière par rapport à la mesure de Lebesgue [Erd39; Gar62]. On renvoie à l'article [BT15] pour les détails.

2.2 Sensibilité au bruit

Avant de détailler plus avant les questions de réalisations et les constructions de familles de groupes qui sont centrales dans mes travaux, je consacre une digression à la sensibilité au bruit des marches aléatoires sur des groupes. La sensibilité au bruit des processus stochastiques a été un thème important du développement des probabilités ces dernières décennies, par exemple en lien avec la théorie de la percolation [GS14; GPS10] ou en théorie des jeux, en particulier des systèmes de vote [Kal18].

Itai Benjamini a élaboré une notion de bruitage des marches aléatoires sur des groupes, en cherchant à savoir s'il peut y avoir des phénomènes de sensibilité au bruit. Un bruitage de paramètre $\rho \in [0, 1]$ d'une marche aléatoire (G, μ) est la suite de variables aléatoires Y_n^ρ obtenues en remplaçant, avec une probabilité ρ , chaque incrément de Z_n par un tirage

indépendant. On dit que la marche aléatoire est sensible au bruit si la variable Y_n^ρ diffère fortement (en un sens à définir) de X_n . Dans l'article [BB23b] en commun avec Itai Benjamini, nous donnons des obstructions assez générales à la sensibilité au bruit, et fournissons néanmoins des exemples de ce phénomène.

Plus précisément, on définit sur le groupe $G \times G$ la probabilité $\pi_\rho := (1-\rho)\mu_{\text{diag}} + \rho\mu \times \mu$, et on considère la marche aléatoire associée. La marche aléatoire (G, μ) est dite sensible au bruit si, même pour des valeurs petites de ρ , la marche aléatoire de loi π_ρ se comporte comme un produit de deux tirages indépendants.

Définition 2.8. *La marche aléatoire (G, μ) est sensible au bruit*

- au sens ℓ^1 si

$$\forall \rho > 0, \quad \|\pi_\rho^{*n} - \mu^{*n} \times \mu^{*n}\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- au sens de l'entropie si

$$\forall \rho > 0, \quad \frac{H(Y_n^\rho | X_n)}{H(X_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ici $H(Y_n^\rho | X_n) := \sum_{x_0 \in G} H(Y_n^\rho | X_n = x_0) \mu^{*n}(x_0)$ est l'entropie conditionnelle moyenne de Y_n^ρ par rapport à X_n . Heuristiquement, elle mesure la quantité moyenne d'information nécessaire pour décrire Y_n^ρ lorsqu'on connaît X_n .

La sensibilité au bruit au sens ℓ^1 est très forte puisqu'elle assure qu'au sens de la variation totale, la distribution π_ρ^{*n} est arbitrairement proche du produit de deux tirages indépendants pour n grand (c'est évidemment impossible pour un n fixé).

La sensibilité au sens de l'entropie est plus faible, mais possède l'interprétation suivante. Considérant l'entropie comme une quantité d'information, cette propriété assure que même si l'on révèle le tirage original, la quantité d'information nécessaire à décrire le tirage bruité est en moyenne aussi grande que si l'on n'avait rien révélé.

Les obstructions principales à la sensibilité au bruit sont :

Théorème 2.9 ([BB23b]). *Soit (G, μ) un groupe de type fini probabilisé.*

- Si (G, μ) est sensible au bruit au sens ℓ^1 , alors (G, μ) est Liouville et l'abélianisation $G/[G, G]$ est fini.
- Si (G, μ) est sensible au bruit au sens de l'entropie, alors (G, μ) est Liouville.

Si G admet un morphisme vers \mathbb{Z} , alors le théorème de la limite centrale assure que la projection de π_ρ^{*n} sur $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ rapportée à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge faiblement vers une loi Gaussienne dont les lignes de niveau sont des ellipses dont l'excentricité tend vers 1 lorsque ρ tend vers 0, donc très loin d'être indépendantes.

Heuristiquement, ne pas être Liouville signifie que l'information fournie par le premier incrément a une signification forte. Ceci explique pourquoi la marche aléatoire simple sur

le groupe libre n'est pas sensible au bruit au sens ℓ^1 , le premier incrément étant très fortement corrélé à l'appartenance au quadrant du bord de Poisson identifié au bord de l'arbre. L'argument général est similaire [BB23b, Thm 4.1].

On s'attend à ce que la sensibilité au sens ℓ^1 implique la sensibilité pour l'entropie, c'est bien le cas pour des mesures μ^{*n} suffisamment concentrées, voir [BB23b, Prop. 3.2 & Rmk 3.3].

Comme résultats positifs, on dispose déjà du théorème suivant :

Théorème 2.10 ([BB23b]). *Les groupes virtuellement abéliens (pour probabilités à support fini) et le groupe d'allumeur de réverbère $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (pour la marche “switch-walk-switch”) sont sensibles au bruit au sens de l'entropie.*

Le groupe dihedral infini est sensible au bruit au sens ℓ^1 pour la marche aléatoire simple fainéante, mais pas pour la marche aléatoire simple.

En particulier la sensibilité au sens ℓ^1 dépend du choix de la mesure.

La sensibilité entropique des groupes virtuellement abéliens se déduit rapidement du théorème central limite local. On s'attend bien sûr à ce que les groupes virtuellement nilpotents aient sensibilité entropique, mais on ne dispose pas du théorème local limite. Les résultats récents de Bénard et Breuillard sur le théorème local limite des groupes de Lie nilpotents [BB23a] ne s'appliquent malheureusement pas aux réseaux.

La sensibilité entropique de l'allumeur de réverbère est due au phénomène suivant : lorsque l'on bruite une trajectoire, on peut décomposer le bruit en une composante de translations sur la base et une composante de perturbation des lampes. Bien sûr, il suffit de vérifier que la seconde composante engendre déjà assez d'entropie. Or l'entropie de cette marche aléatoire est asymptotiquement équivalente à l'entropie de la configuration de lampes, et le temps local sur les sites visités tend vers l'infini pour toute proportion $1 - \epsilon$ de sites d'après le théorème de Ray-Knight. On en déduit que presque toutes les lampes sont perturbées, et ce quel que soit le paramètre de bruit $\rho > 0$.

Ce type d'argument permet de démontrer aussi le résultat suivant :

Théorème 2.11 ([BB23b]). *Tout groupe de la forme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr_{G_{\omega,1^\infty}} G_\omega$ est partiellement sensible au bruit au sens de l'entropie, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall \rho > 0, \quad \liminf \frac{H(Y_n^\rho | X_n)}{H(X_n)} \geq c.$$

Notons que ce résultat s'applique aussi aux groupes introduits dans [Bri13] que nous retrouverons à la section 2.3.

En ce qui concerne la sensibilité au bruit au sens ℓ^1 , le groupe dihedral ne peut pas être sensible au bruit pour la marche aléatoire simple car en identifiant son graphe de Cayley à \mathbb{Z} , la mesure π_ρ^{*n} induit le même processus stochastique que pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} . Toutefois, lorsque la marche aléatoire est fainéante, c'est-à-dire $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(b) =$

$\mathbb{P}(e) = 1/3$, où $D_\infty = \langle a, b | a^2 = b^2 = e \rangle$, alors le fait de bruite un seul incrément g_i peut avoir pour effet de remplacer la trajectoire aux temps $t \geq i$ par son opposé. Ainsi, bruite un seul incrément peut déjà avoir un effet très significatif sur la valeur finale. En développant cet argument et par une décomposition en somme de variables Bernoulli, on obtient un argument de couplage qui montre la sensibilité au bruit au sens ℓ^1 .

Cette argument fastidieux a été remplacé par Tanaka par une version effective du théorème local limite. Il a notamment pu établir que tout groupe de Weyl affine est sensible au bruit au sens ℓ^1 [Tan24].

Question 2.12. *Les deux obstructions du Théorème 2.9 sont-elles les seules obstructions à la sensibilité au bruit ?*

Cette question est assez vague, et il parait peu vraisemblable d’espérer une réponse positive. Il serait toutefois très intéressant d’obtenir d’autres obstructions significatives.

On s’attend néanmoins à ce que la sensibilité au bruit soit fréquente hors de ces deux obstructions. En particulier, on conjecture que le groupe de Grigorchuk est sensible au bruit au sens ℓ^1 et de l’entropie. Le théorème 2.11 est un indice favorable. De plus, une analyse du bruit révèle que le paramètre ρ augmente lors du passage au produit en couronne, et le bruitage au aussi pour effet de “mélanger” les deux mots aléatoires $(Z_n|_1, Z_n|_2)$.

Vu les difficultés à étudier le groupe de Grigorchuk, il est sans doute difficile de prouver ou réfuter une telle conjecture, car la sensibilité au bruit au sens ℓ^1 est une propriété très fine, qui nécessite de comparer les deux mesures ponctuellement. On peut toutefois espérer un résultat positif pour une sensibilité au bruit à large échelle, c’est-à-dire en comparant les deux mesures sur des ensembles de taille petite mais tendant vers l’infini (c’est significatif si la taille est inférieure à la vitesse de la marche aléatoire, voir [BB23b, Def. 2.4]). Essentiellement, si l’on interprète la distance ℓ^1 en terme de transport optimal, la sensibilité au bruit à large échelle signifie que les deux mesures coïncident quitte à autoriser des transports de masse sur des distances inférieures à la vitesse.

Si l’on se concentre sur des classes de groupes plus aisées à manipuler, on peut espérer des résultats positifs. L’article de Tanaka [Tan24] incite à penser que une marche aléatoire sur un groupe virtuellement \mathbb{Z}^d est sensible au bruit au sens ℓ^1 si et seulement si l’action induite du groupe fini sur \mathbb{Z}^d ne préserve aucune direction.

Il serait également intéressant d’obtenir des exemple de groupes sensibles au bruit au sens ℓ^1 qui soient virtuellement nilpotents mais pas abéliens. Dans ce cas, on ne dispose pas de théorème local limite, mais l’approche originale par couplage pourrait permettre d’y palier.

2.3 La famille des groupes dirigés

Après cette courte présentation des marches aléatoires sur des groupes, revenons aux problèmes de réalisation pour des invariants ou quantités asymptotiques. On a vu au chapitre 1 que les extensions par produits en couronne permutational des groupes de Grigorchuk

permettent de résoudre le problème inverse de la croissance pour une vaste plage d'après le théorème 1.8 de Bartholdi-Erschler [BE14].

À plusieurs égards, l'entropie de Shannon d'une marche aléatoire peut se voir comme un analogue probabiliste de la croissance. Par exemple en vue de l'inégalité classique (2.1). Ou bien parce que pour n grand, toute partie de mesure $\mu^{*n}(A) \geq 1/2$ doit avoir cardinal au moins $e^{(h_\infty(\mu)-\varepsilon)n}$, et qu'il existe une partie A' de cardinal au plus $e^{(h_\infty(\mu)+\varepsilon)n}$ avec $\mu^{*n}(A') \geq 1/2$.

On peut donc s'attendre à ce que des constructions similaires aux groupes de Grigorchuk permettent de résoudre pour une large plage le problème inverse pour l'entropie des marches aléatoires. C'est le résultat principal de mon article [Bri13].

2.3.1 Les groupes dirigés

On considère un arbre enraciné $T = T_{(d_\ell)}$ dont les sommets à distance ℓ de la racine ont valence $d_\ell + 1$. On peut identifier les sommets de cet arbre aux suites $i_1 \dots i_\ell$ avec $i_j \in \{1, \dots, d_j\}$, et son bord aux telles suites infinies. On rappelle l'isomorphisme fondamental (1.2) et la notation 1.9 définissant portrait et sections d'un automorphisme de T .

Définition 2.13. *Un sous-groupe $G < \text{Aut}(T)$ est dirigé s'il admet une partie génératrice de la forme $A \cup H$, où A et H sont deux groupes finis tels que*

- *les éléments de A sont enracinés, c'est-à-dire leur portrait est supporté sur la racine, soit $a|_v = \text{id}$ pour tout $v \neq \emptyset$,*
- *l'action de A sur le premier niveau $\{1, \dots, d_o\}$ est transitive,*
- *les éléments de H fixent le rayon 1^∞ (allant de la racine au point 1^∞ du bord), et ont leur portrait supporté à distance ≤ 1 de ce rayon, soit $h|_v \neq \text{id}$ implique $v = 1 \dots 1i_\ell$,*
- *pour tout $v = 1 \dots 1i_\ell$, le morphisme $H \rightarrow \text{Sym}(d_\ell)$ a une image agissant transitivement sur $\{1, \dots, d_\ell\}$.*

On notera $G = G(A, H)$ un tel groupe.

Pour un arbre binaire, on retrouve simplement la famille des groupes de Grigorchuk G_ω introduite dans [Gri85]. Cette construction recouvre également les groupes de [Gri86; BS01; BKN10]. Elle généralise la construction principale de mon travail de thèse [Bri09] qui produisait une famille indénombrable de groupes moyennables à croissance non-uniforme deux-à-deux non-isomorphes.

Suivant Bartholdi-Erschler [BE12], on peut également considérer un produit en couronne permutational $F \wr_{G, 1^\infty} G$ pour un groupe fini F . On dispose d'une extension de l'isomorphisme (1.2) qui s'étend à F de sorte que tout élément $f \in F$ satisfasse $f = (f, e, ;e)$.

2.3.2 Réalisations pour l'entropie

Notons η_A la mesure de Haar sur un groupe fini A . On considère la probabilité $\mu = \eta_A \eta_H \eta_F$ sur $F \wr_{G,1^\infty} G$. La suite des valences $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est le paramètre clé pour déterminer l'entropie d'une marche aléatoire sur un groupe dirigé, tout comme la suite $\omega \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ détermine la croissance d'un groupe de Grigorchuk.

Théorème 2.14 ([Bri13]). *Pour tout $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, il existe une suite bornée $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout sous-groupe dirigé $G < \text{Aut}(T_{(d_\ell)})$, l'entropie de la marche aléatoire de loi μ sur $F \wr_{G,1^\infty} G$ satisfait :*

$$H(\mu^{*n}) = n^{\alpha+o(1)}.$$

*De plus pour tout $\frac{1}{2} \leq \alpha < \beta < 1$, il existe une suite bornée $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout sous-groupe dirigé $G < \text{Aut}(T_{(d_\ell)})$, l'entropie $H(\mu^{*n})$ oscille entre $n^{\alpha+o(1)}$ et $n^{\beta+o(1)}$.*

Ce résultat et sa preuve sont des analogues probabilistes des théorèmes 1.7 et 1.8. On peut aussi obtenir le cas $\beta = 1$ avec une construction de groupe plus sophistiquée, utilisant des arguments de [Ers06b] ou [KP13].

Esquisse de preuve. Notons que les groupes H et F commutent, donc $\mu = \eta_A \eta_{HF}$. On note $Z_n = (Z_n|_1, \dots, Z_n|_{d_0}) \sigma_n$ l'image du mot aléatoire Z_n par (1.2). Les lettres de chaque mot section $Z_n|_t$ sont les sections de lettres de Z_n , c'est-à-dire des sections d'éléments de HF car les sections de A sont toutes triviales. L'action de A étant transitive, une lettre de $Z_n|_t$ est soit un élément enraciné d'un groupe A' (engendré par l'union des images des morphismes $H \rightarrow \text{Sym}(d_0)$), soit un élément du groupe $H'F$, groupe section de HF au sommet 1. De plus, une telle lettre est dans A' avec probabilité $\frac{d_0-1}{d_0}$ et dans $H'F$ avec probabilité $\frac{1}{d_0}$. On peut concaténer des facteurs successifs dans un même groupe (car la convolution de deux mesures de Haar reste Haar). Il s'ensuit que la section $Z_n|_t$ est une marche aléatoire de loi $\mu' = \eta_{A'} \eta_{H'F}$, mais à un temps aléatoire m_t qui est le nombre d'alternances dans une suite binomiale de loi $\text{Bin}(\frac{1}{d_0}, n)$. On a en particulier $m_t \sim \frac{d_0-1}{d_0^2} n$ presque sûrement.

Cela fournit une borne supérieure sur l'entropie:

$$H(Z_n) \leq H(\sigma_n) + \sum_{t=1}^{d_0} H(Z_n|_t) \leq C + d_0 H(Z_n|_t)$$

En utilisant $m_t \leq \frac{d_0-1+\varepsilon}{d_0^2} n$ pour n grand avec une immense probabilité (grandes déviations), on déduit que $H(Z_n) \leq d_0 H(Z_{\frac{d_0-1+\varepsilon}{d_0^2} n})$. On peut ensuite itérer le procédé et obtenir

$$H(Z_n) \leq d_0 d_1 \dots d_k H(Z_{\frac{d_0-1+\varepsilon}{d_0^2} \frac{d_1-1+\varepsilon}{d_1^2} \dots \frac{d_k-1+\varepsilon}{d_k^2} n}).$$

On obtient une borne supérieure $H(Z_n) \leq n^{\alpha+o(1)}$ pourvu que

$$\frac{\log \frac{d_0-1}{d_0^2} \frac{d_1-1}{d_1^2} \dots \frac{d_k-1}{d_k^2}}{\log d_0 d_1 \dots d_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha.$$

Pour la borne inférieure, on montre avec le même type d'arguments que le cardinal de l'orbite inverse $\#\mathcal{O}(Z_n) \geq n^{\alpha-\varepsilon}$ avec probabilité immense. Conditionnée par l'orbite inverse, l'entropie est au moins celle de la configuration de lampes $F^{\mathcal{O}(Z_n)}$, qui est équilibrée, d'où la borne inférieure correspondante. \square

Notons que la preuve du théorème fournit en fait une fonction $\sqrt{n} \leq f(n) < n$ en principe explicite selon la suite (d_ℓ) tel que $H(Z_n) = f(n)n^{o(1)}$.

La précision de ce résultat a été largement améliorée par Amir et Virag.

Théorème 2.15 (Amir-Virag [AV17]). *Soit $\beta < 1$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et pour tous $a, n \geq 1$*

$$a^{\frac{1}{2}} f(n) \leq f(an) \leq a^\beta f(n).$$

*Alors il existe un groupe G dirigé tel que l'entropie de la marche aléatoire sur $F \wr_{G,1^\infty} G$ satisfasse $H(\mu^{*n}) \asymp f(n)$.*

C'est l'analogie entropique du théorème 1.8 de Bartholdi-Erschler pour la croissance. L'article d'Amir-Virag considère seulement un exemple de groupe dirigés mais leurs arguments, en terme de résistance du graphe de Schreier, s'appliquent aux groupes dirigés agissant sur le même arbre, puisque leurs graphes de Schreier sont des fragmentations, au sens de Nekrashevych, du groupe "mère" utilisé dans [AV17].

Notons que dans les deux théorèmes précédents, on ne dispose pas de bornes inférieures satisfaisantes si l'on ne considère pas d'extension permutatonnelle. L'analogie de la question 1.5 pour l'entropie est tout simplement:

Question 2.16. *Existe-t-il des marches aléatoires (à support fini symétriques) dont l'entropie est inférieure à \sqrt{n} mais supérieure au logarithme ?*

Sous l'hypothèse que la croissance du groupe est exponentielle, on dispose d'une borne générale $H(\mu^{*n}) \geq n^{\frac{1}{3}}$, si bien que cette question est ouverte également pour les groupes à croissance exponentielle.

Amir et Virag ont également obtenu des résultats de réalisation pour la plage de fonctions vitesse entre $n^{\frac{3}{4}}$ et $n^{1-\varepsilon}$.

Théorème 2.17 (Amir-Virag [AV17]). *Soit $\beta < 1$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et pour tous $a, n \geq 1$*

$$a^{\frac{3}{4}} f(n) \leq f(an) \leq a^\beta f(n).$$

Alors il existe un groupe G dirigé tel que la vitesse de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z} \wr_{G,1^\infty} G$ satisfasse $L_\mu(n) \asymp f(n)$.

Il est important ici d'utiliser le groupe \mathbb{Z} plutôt qu'un groupe fini, auquel cas on ne connaît pas de bornes optimales. En effet, cela permet d'obtenir une minoration de la distance en fonction du temps local (nombre de visites par site) sur l'orbite inverse. Il s'avère que cette minoration correspond ici à la borne supérieure générale $L\mu(n) \leq c\sqrt{n}H(\mu^{*n})$. La métrique, la géométrie, des groupes dirigés, et en particulier des groupes de Grigorchuk, reste à ce jour absolument mystérieuse, ce qui rend très délicate l'étude de la vitesse (et autres invariants asymptotiques) sur ces groupes.

2.4 La famille des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères

Afin de poursuivre plus avant l'étude des problèmes inverses pour d'autres quantités, il apparaissait utile de trouver d'autres familles de groupes, à la fois vastes et flexibles, et si possible plus compréhensibles.

Une construction intéressante a été les groupes "bulles" introduits par Kotowski-Virag dans [KV15]. Ces groupes ont fourni des exemples de groupes probabilisés non-Liouville satisfaisant $\Phi_\mu(n) \geq \exp(-n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Cela montre l'optimalité d'un résultat de Gournay [Gou16] assurant que $\Phi_\mu(n) \geq \exp(-n^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ implique (G, μ) Liouville. Ces groupes "bulles" sont des produits en couronnes permutationnels sur des graphes de Schreier (qui déterminent le groupe de base). Le point clé est de choisir un graphe de Schreier qui soit un arbre de bulles, dont les diamètres des bulles croissent rapidement. Là où les bulles ne branchent pas, le graphe ressemble donc à celui d'un allumeur de réverbère. Si les parties où les bulles branchent sont suffisamment petites, le groupe ressemblera localement à une extension finie d'un produit direct d'allumeurs de réverbères.

Dans un travail en commun avec Tianyi Zheng, nous avons construit une autre famille de groupes, à la fois très flexibles et compréhensibles : les produits diagonaux d'allumeurs de réverbères [BZ21].

Peu avant ce travail, j'avais introduit certains produits diagonaux (groupes résolubles avec Γ_s diédraux, voir ci-dessous) afin d'obtenir des groupes ayant vitesse $L(n) \asymp n^{f(n)}$ avec $\limsup f(n) = \alpha$ pour toute valeur de α dans l'intervalle $[1/2, 3/4]$ [Bri15]. Comme ces résultats ont été largement améliorés dans [BZ21], le preprint [Bri15] n'a jamais été soumis à publication.

2.4.1 Produits diagonaux d'allumeurs de réverbères

Étant donnés deux groupes finis A et B , une famille $\{\Gamma_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ de quotients du produit libre $A * B$ et une suite $(k_s)_{s \in \mathbb{N}}$ d'entiers satisfaisant $k_{s+1} \geq 2k_s$, on définit un groupe comme suit.

Définition

On considère deux groupes finis A et B . Pour chaque valeur de s , on se donne une application surjective $A * B \rightarrow \Gamma_s$ vers un groupe Γ_s . On se donne aussi une suite d'entiers $(k_s)_{s \in \mathbb{N}}$ telle que $k_{s+1} \geq 2k_s$. Par convention, on suppose que $\Gamma_0 = A \times B$ et $k_0 = 0$.

À ce jeu de données, on associe un groupe Δ défini par une action libre sur l'espace de configuration

$$\mathcal{C} := \prod_{s \in \mathbb{N}} \prod_{\mathbb{Z}} \Gamma_s. \tag{2.2}$$

On note $(f_s)_{s \in \mathbb{N}}$ un élément de \mathcal{C} où $f_s : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_s$ est une fonction. Le produit libre $\mathbb{Z} * A * B$ agit sur \mathcal{C} par :

$$t f_s(x) = f_s(x - t), \quad a f_s(x) = \begin{cases} a f_s(0) & \text{si } x = 0 \\ f_s(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad b f_s(x) = \begin{cases} b f_s(k_s) & \text{si } x = k_s \\ f_s(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}, a \in A$ et $b \in B$. En d'autres termes, \mathbb{Z} translate les configurations, A agit par multiplication sur les valeurs $f_s(0)$ et B agit par multiplication sur les valeurs $f_s(k_s)$.

Définition 2.18. *Le groupe Δ est le quotient de $\mathbb{Z} * A * B$ dont l'action sur \mathcal{C} est libre.*

Un autre point de vue sur ce groupe est lié aux groupes notés $\Delta_s = \Gamma_s \wr \mathbb{Z}$. Un tel groupe est un quotient de $\mathbb{Z} * A * B$ par l'application $t \mapsto (Id, t), a \mapsto (a\delta_0, 0), b \mapsto (b\delta_{k_s}, 0)$. Ici l'application Id est constante identité, et $g\delta_x$ désigne la fonction valant g en x et identité ailleurs. Le jeu de données fournit donc pour chaque s une application $\varphi_s : \mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Delta_s$. Le *produit diagonal* de ces applications est le plus petit quotient de $\mathbb{Z} * A * B$ les factorisant toutes.

Heuristiquement, on peut penser à ces groupes comme "interpolant" entre les groupes $(A \times B) \wr \mathbb{Z}$ et $(A * B) \wr \mathbb{Z}$, ce qui explique qu'ils ont permis de résoudre divers problèmes inverses.

Notons que si tous les groupes Γ_s sont finis, alors Δ est un groupe élémentairement moyennable et de dimension asymptotique 1.

Estimations métriques

Un caractère remarquable de cette famille de groupe est le fait que l'on comprend très bien la distance entre deux éléments, ce qui n'est pas le cas pour les groupes agissant sur des arbres enracinés ou pour les groupes "bulles". On note $g = ((f_s), i)$ un élément de Δ , vu comme produit diagonal des groupes Δ_s . En particulier (f_s, i) est un élément de Δ_s .

On note $\tau : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme évident. On fait une hypothèse supplémentaire technique sur les groupes Γ_s . On note $\Gamma'_s = [A, B]^{\Gamma_s}$ le sous-groupe normal contenant tous les commutateurs $[a, b]$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On suppose dorénavant que les abélianisés relatifs Γ_s/Γ'_s sont isomorphes à $A \times B$. Ceci assure l'existence d'une application $\Delta_s \rightarrow (A \times B) \wr \mathbb{Z}$ factorisant τ .

On note $\text{range}(f_s, i)$ le plus petit intervalle de \mathbb{Z} pour lequel on peut écrire (f_s, i) au moyen de la partie génératrice $\{\pm 1\} \cup A\delta_0 \cup B\delta_{k_s}$ de sorte que pour tout préfixe w on ait $\tau(w)$ dans cet intervalle. On définit de même $\text{range}(g)$.

Pour chaque valeur de $s \geq 1$, on partitionne \mathbb{Z} en une suite d'intervalles de longueur $k_s/2$, notés $I_j^s := [\frac{jk_s}{2}, \frac{(j+1)k_s}{2}]$. La contribution essentielle de f_s est la quantité:

$$E_s(f_s) := \sum_{j: I_j^s \cap \text{range}(f_s, i) \neq \emptyset} k_s \max_{x \in I_j^s} (|f_s(x)|_{\Gamma_s} - 1)_+$$

En d'autres termes, $E_s(f_s)$ est obtenu comme suit. Pour chaque x , on regarde la norme de $f_s(x)$ dans Γ_s (pour le système générateur $A \cup B$), on prend le maximum sur chaque intervalle de la forme I_j^s , on additionne et on multiplie par k_s .

Proposition 2.19 (Prop. 2.14 [BZ21]). *Soit $g = ((f_s), i)$ un élément de Δ . On a pour tout $s \geq 1$*

$$\frac{1}{c} \max \{E_s(f_s), \text{range}(f_s, i)\} \leq |(f_s, i)|_{\Delta_s} \leq c (E_s(f_s) + \text{range}(f_s, i)).$$

De plus, on a

$$\max_{s \geq 0} |(f_s, i)|_{\Delta_s} \leq |g|_{\Delta} \leq c \sum_{0 \leq s \leq s_0(g)} |(f_s, i)|_{\Delta_s}$$

où $s_0(g)$ est le plus grand s tel que $k_s \leq \text{range}(g)$.

Esquisse de preuve. La borne inférieure sur $|g|$ est triviale. De plus, si un mot w représente $\tau(g)$, alors gw^{-1} est de la forme $((f_s), 0)$ avec f_s à valeurs dans Γ'_s . On est donc ramené au cas où $f_0 = Id$ et où $f_s(x)$ est un produit de conjugués de commutateurs.

Pour écrire un élément de la forme $(a_1 b_1 \dots a_r b_r \delta_x, 0)$, il est nécessaire d'appliquer $a_1 \delta_0$, puis t_s^k afin de "placer le curseur en k_s ", puis appliquer $b_1 \delta_{k_s}$ puis t^{-k_s} afin de "ramener le curseur en 0", etc. Il s'ensuit que la copie de Γ'_s au dessus de 0 (ou de tout élément $x \in \mathbb{Z}$) est une copie homothétique de Γ'_s avec un rapport d'homothétie valant $k_s + 1$. Ceci explique le facteur k_s dans la définition de E_s .

Notons que si l'on écrit ce mot en 0 dans Δ_s , alors pour $s' \neq s$, on écrit le mot $a_1 \dots a_r$ en 0 dans $\Delta_{s'}$ et le mot $b_1 \dots b_r$ en $k_s - k_{s'}$ dans $\Delta_{s'}$. Mais ces deux mots représentent l'identité de Γ'_s puisque $a_1 b_1 \dots a_r b_r$ est un produit de conjugués de commutateurs.

Comme la suite (k_s) est doublante, on profite des "aller-retours" du curseur pour écrire $f_s(x)$ pour tous les x dans un intervalle de longueur $k_s/2$, sans perturber les autres copies $\Delta_{s'}$. Ceci explique les estimations sur $|(f_s, i)|_{\Delta_s}$ (il faut aussi tenir compte du range mais c'est plus classique) et que l'on puisse majorer la distance dans Δ par les distances dans Δ_s . \square

Choix des groupes (Γ_s)

On considérera deux cas particuliers principaux :

- Celui où les groupes $(\Gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ forment une famille de graphes expandeurs. Cela signifie qu'il existe une constante $c > 0$ minorant leurs constantes de Cheeger

$$c < h(\Gamma_s, \mu) := \inf \left\{ \frac{1}{\#\Omega} \sum_{x,y} \mathbb{1}_\Omega(x) \mathbb{1}_{\Gamma_s \setminus \Omega}(xy) \mu(y) : \#\Omega \leq \frac{\#\Gamma_s}{2} \right\}.$$

Ici μ désigne une, où de manière équivalente toute, mesure finie dont le support engendre $A * B$, par exemple la mesure de comptage sur $A \cup B$.

Un point important pour nous est l'existence de graphes expandeurs de taille presque arbitraire. Par exemple, le groupe $SL(3, \mathbb{F}_3[X])$ est engendré deux sous-groupes finis : d'une part le sous-groupe additif de $\mathbb{F}_3[X]$ engendré par 1 et X et d'autre part un trois cycle, soit

$$A = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \simeq \mathbb{F}_3^2, \text{ et } B = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Ce groupe ayant la propriété (T), ses quotients finis forment une famille d'expandeurs. Les quotients de congruence $\Lambda_m = SL(3, \mathbb{F}_3[X]/(X^m - 1))$ ont une taille presque arbitraire à l'échelle logarithmique :

$$\exists c, c_1 > 0, \quad \forall m > 0, \quad cm - c_1 \leq \log |\Lambda_m| \leq cm + c_1.$$

Lorsque ce sont des expandeurs, le diamètre satisfait $\ell_s := \text{diam}(\Gamma_s) \asymp \log |\Gamma_s|$.

- Le second cas pertinent que nous considérerons est celui où $A = B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors les groupes Γ_s sont diédraux et le groupe Δ obtenu est 3-résoluble.

Dans les deux cas, il est possible de choisir les (logarithmes des) diamètres des groupes Γ_s de manière arbitraire, modulo \asymp_c pour un c explicite.

Par complétude pour l'énoncé du prochain théorème, notons que l'on peut se contenter d'un produit diagonal fini pour $0 \leq s \leq S$ (le groupe Δ est alors un authentique groupe d'allumeur de réverbère avec un groupe de lampes dépendant des Γ_s), et qu'on peut dans ce cas aussi considérer le cas $\Gamma_s = A * B$ comme ayant "diamètre infini".

2.4.2 Réalisation pour la vitesse et la probabilité de retour

Les produits diagonaux d'allumeurs de réverbères ont permis de résoudre presque complètement le problème inverse pour la vitesse des marches aléatoires, et pour la probabilité de retour des groupes à croissance exponentielle.

Vitesse des marches aléatoires

La famille des groupes Δ avec un choix de Γ_s expandeurs permet d'obtenir presque tous les comportements de vitesse.

Théorème 2.20 ([BZ21]). *Il existe une constante C telle que pour tout $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ satisfaisant $f(1) = 1$ et $\sqrt{a}f(n) \leq f(an) \leq af(n)$ il existe un groupe Δ et une mesure μ symétrique à support fini tels que $L_\mu(n) \asymp_C f(n)$.*

Ce résultat étend celui d'Amir-Virag [AV17]. La condition $f(an) \leq af(n)$ est nécessaire par sous-additivité. La condition $\sqrt{a}f(n) \leq f(an)$ ne l'est pas. On peut le voir de diverses manières, par exemple en utilisant une variante de la construction principale présentée en section 3.4, ou avec d'autres constructions par Erschler-Zheng [EZ20b]. Toutefois, cette condition est proche d'être nécessaire, car la vitesse satisfait $L(n) \geq c\sqrt{n}$ pour un groupe infini d'après Lee-Peres [LP13].

Notons que la constante C est ici universelle, en particulier on obtient aussi un résultat significatif pour des groupes non-Liouville avec vitesse linéaire. De plus, pour ces groupes, l'entropie de la marche est du même ordre que la vitesse $H(n) \asymp L(n)$.

Notons enfin que les résultats concernant la vitesse (espérance de la distance au point de départ) de ces groupes ont été largement raffinés par Amir-Blachar [AB22] qui ont obtenu des lois du logarithme itéré pour ces groupes.

Esquisse de preuve. On considère la mesure $\mu = \eta_{AB}\eta_{\{0,\pm 1\}}\eta_{AB}$ de type "switch-walk-switch". On peut dans un premier temps exprimer la vitesse explicitement en fonction des paramètres (k_s) et $(\ell_s = \text{diam}(\Gamma_s))$. D'après la proposition 2.19, il suffit d'estimer les distances dans une copie Δ_s . Le point clé est que la vitesse d'une marche aléatoire dans un expanseur croît linéairement jusqu'à atteindre le diamètre. Donc la variable $f_s(x)$ dépend du temps passé par le curseur (qui suit une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}). À chaque temps où le curseur est en x , on obtient un incrément uniforme dans A , et à chaque temps où il est en $x + k_s$, on obtient un incrément uniforme dans B . Comme un produit de facteurs uniformément distribués est équidistribué, ce qui compte est le nombre d'alternances entre des facteurs dans A et dans B , c'est-à-dire le nombre $T(x, k_s, n)$ de traversées entre x et $x + k_s$ avant le temps n . Cette variable aléatoire est d'ordre $\frac{\sqrt{n}}{k_s}$ avec concentration gaussienne pour x dans un intervalle d'échelle \sqrt{n} . On a donc

$$\mathbb{E}|f_s(x)|_{\Gamma_s} \asymp \min \left\{ \frac{\sqrt{n}}{k_s}, \ell_s \right\}.$$

Avec (2.4.1), on obtient

$$\mathbb{E}_{\mu^{*n}}|(f_s, i)|_{\Delta_s} \asymp \min \left\{ \frac{n}{k_s}, \sqrt{n}\ell_s \right\},$$

et les suites (k_s) et (ℓ_s) étant doublantes, on déduit de la proposition 2.19, qu'avec d'autres constantes plus larges, pour tout $k_s\ell_s \leq n \leq k_{s+1}\ell_{s+1}$,

$$\mathbb{E}_{\mu^{*n}}|((f_s), i)|_{\Delta} \asymp \min \left\{ \frac{n}{k_s}, \sqrt{n}\ell_s \right\}.$$

Par ailleurs, un résultat d'analyse élémentaire assure que pour toute fonction f requise, il existe des suites (k_s) et (ℓ_s) doublantes avec, pour tout $k_s\ell_s \leq n \leq k_{s+1}\ell_{s+1}$,

$$f(n) \asymp \min \left\{ \frac{n}{k_s}, \sqrt{n}\ell_s \right\}.$$

Il suffit alors de choisir des expandeurs Γ_s de diamètre ℓ_s et de combiner les deux égalités précédentes. On renvoie à l'article [BZ21] pour une preuve complète tenant compte des nombreux aspects techniques. \square

Lorsqu'on utilise des groupes Γ_s diédraux, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.21 ([BZ21]). *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ satisfaisant $f(1) = 1$ et que les fonctions $\frac{f(x)}{\sqrt{x} \log^{1+\epsilon} x}$ et $\frac{x^{3/4}}{f(x)}$ soient croissantes, il existe un groupe Δ qui est 3-résoluble et une mesure μ symétrique à support fini tels que $L_\mu(n) \asymp_C f(n)$.*

*De plus, on a aussi $\sqrt{n} \leq H(\mu^{*n}) \leq \sqrt{n} \log^2(n)$.*

La preuve est similaire à la précédente. Elle est toutefois plus technique car lorsque l'on considère les normes $|f_s(x)|_{\Gamma_s}$ pour $x \in I_j^s$, le maximum est substantiellement supérieur à la moyenne. C'est cela qui explique le facteur $\log^{1+\epsilon} x$. Les fonctions \sqrt{n} et $n^{3/4}$ correspondent aux cas $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$ et $D_\infty \wr \mathbb{Z}$ respectivement. On a donc heuristiquement une famille de groupes 3-résolubles qui "interpole" entre ces deux extrêmes.

Ces deux théorèmes permettent de compléter un résultat d'Amir [Ami17] sur le comportement asymptotique conjoint de vitesse et entropie.

Théorème 2.22 ([Ami17; BZ21]). *Soit (β, γ) un point du triangle du plan donné par les équations $\gamma \leq \beta \leq 2\gamma - 1$ et $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Alors il existe un groupe de type fini G et une mesure symétrique à support fini tels que*

$$L_\mu(n) = n^{\beta+o(1)} \quad \text{et} \quad H(\mu^{*n}) = n^{\gamma+o(1)}.$$

Les contraintes $\gamma \leq \beta \leq 2\gamma - 1$ sont nécessaire d'après [Ers03a] (voir aussi Gouëzel-Mathéus-Maucourant [GMM15] pour des inégalités similaires pour les constantes asymptotiques). Le résultat d'Amir [Ami17] était valide pour un triangle plus petit, utilisant les constructions de [AV17]. En vue de la question 2.16, il est naturel de se demander si le résultat s'étend au triangle $\gamma \leq \beta \leq 2\gamma - 1$ et $\beta \geq \frac{1}{2}$.

Ce résultat est parfois appelé "problème de la glace à deux boules", puisqu'on prescrit deux quantités au choix simultanément. On peut naturellement chercher à résoudre le problème de la glace à trois boules en rajoutant le coefficient α de croissance du groupe, ou un autre coefficient par exemple l'exposant de compression hilbertienne, voir section 3.1, mais il faut prendre gare au risque d'indigestion.

Probabilité de retour

Le problème inverse pour la probabilité a en partie été résolu par Saloff-Coste-Zheng [SCZ18] au moyen des groupes "bulles" mentionnés en préambule. Ils ont montré par exemple que pour tout $1/3 \leq \gamma < 1$ il existe un groupe pour lequel $\Phi_G(n) \asymp \exp(-n^\gamma (\log n)^{1-\gamma})$. Ceci résout le problème inverse au niveau des exposants.

La famille des produits diagonaux s'avère toutefois plus flexible et permet de résoudre presque intégralement le problème inverse pour la probabilité de retour concernant les groupes à croissance exponentielle.

Théorème 2.23 ([BZ21]). *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ satisfaisant $f(1) = 1$ et que les fonctions $\frac{f(x)}{x^{1/3}}$ et $\frac{x}{f(x)}$ soient croissantes, il existe un groupe Δ tel que $\log \Phi_G(n) \asymp_C -f(n)$.*

On rappelle que si G a croissance exponentielle, alors $-\log \Phi_G(n) \geq n^{1/3}$ d'après Varopoulos [Var91]. On obtient ce résultat dans le cas où (Γ_s) sont expandeurs. Dans le cas où (Γ_s) sont diédraux, on a $cn^{1/3} \leq -\log \Phi_G(n) \leq Cn^{1/3} \log^{3/4} n$. Un calcul plus précis mériterait d'être fait pour avoir une estimation précise. La preuve de ce théorème n'est pas directe. Elle découle d'estimations sur les profils isopérimétriques ℓ^p que l'on discutera en section 3.2.

D'AUTRES INVARIANTS ASYMPTOTIQUES

3.1	Les compressions hilbertiennes et banachiques	48
3.2	Le profil isopérimétrique	50
3.3	Les profils de séparation et de Poincaré	51
3.4	La propriété H_{FD} de Shalom	53
3.5	Équivalence orbitale quantitative	55
3.6	Et pour d'autres groupes moyennables ?	57

La famille des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères s'est avéré être une famille intéressante non seulement pour les problèmes inverses sur des quantités probabilistes asymptotiques, mais aussi concernant divers problèmes de représentations, d'analyse et de dynamique sur des groupes. On présente dans ce chapitre de telles applications.

3.1 Les compressions hilbertiennes et banachiques

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application entre espaces métriques. Sa fonction de compression est

$$\rho_f(t) := \inf \{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x, y) \geq t\}.$$

On a bien sûr $\rho_f(t) = t$ pour les plongements isométriques. On peut donc penser à ρ_f comme une manière de quantifier le défaut d'isométrie, c'est-à-dire à quel point f "comprime" les distances. Il est naturel, étant donné deux tels espaces de chercher à mesurer à quel point il est difficile de plonger l'un dans l'autre en respectant les métriques. Cela mène à la définition d'intervalle de compression de X vers Y .

Définition 3.1. *Un couple de fonctions (ρ_1, ρ_2) est un intervalle de compression de X vers Y si*

- pour tout $f : X \rightarrow Y$ et pour tout $t \geq 0$ on a $\rho_f(t) \leq \rho_2(t)$
- il existe $f : X \rightarrow Y$ telle que pour tout $t \geq 0$ on a $\rho_f(t) \geq \rho_1(t)$.

Il est bien sûr pertinent de chercher des intervalles avec ρ_1 proche de ρ_2 . Notons qu'il est parfois utile de disposer d'une fonction ρ'_1 telle que pour tout $t \geq 0$, il existe f avec $\rho_f(t) \geq \rho'_1(t)$. On peut souvent obtenir ρ'_1 plus proche de ρ_2 que ρ_1 . Toutefois la définition ci-dessus est plus répandue. On vérifie aisément que si (ρ_1, ρ_2) est un intervalle de compression de X vers Y , et que si X' , resp. Y' , est quasi-isométrique à X , resp. Y , alors (ρ'_1, ρ'_2) est un intervalle de compression de X' vers Y' avec $\rho'_1 \asymp \rho_1$ et $\rho'_2 \asymp \rho_2$.

On dit que X se plonge uniformément dans Y si $\rho_1(t) \rightarrow \infty$.

Le cas où X est un groupe (de type fini) et Y un espace de Banach, notamment un Hilbert, a reçu une grande attention depuis que Yu [Yu00] a montré qu'un groupe plongé uniformément dans un espace de Hilbert satisfait la conjecture de Baum-Connes grossière et donc la conjecture de Novikov. Notons toutefois qu'il existe des groupes sans plongement uniforme vers des Hilbert d'après Gromov [Gro03]. En effet, ces groupes possèdent des *expanseurs* isométriquement plongés, et les *expanseurs* ne se plongent pas uniformément dans des espaces de Hilbert.

Lorsque $X = G$ est un groupe, il est aussi intéressant de considérer la compression équivariante. Si $Y = \mathcal{X}$ est un espace de Banach, on se restreint aux applications $f : G \rightarrow \mathcal{X}$ qui sont équivariantes pour une action affine isométrique de G sur \mathcal{X} . L'existence d'une fonction équivariante vers un Hilbert avec $\rho_f(t) \rightarrow \infty$ est la célèbre propriété de Haagerup, critère suffisant pour satisfaire la conjecture de Baum-Connes d'après Higson-Kasparov [HK01].

Pour des groupes moyennables, un intervalle de compression est aussi un intervalle de compression équivariante. De plus si $\rho_1^{\text{equiv}}(t) \succ \sqrt{t}$ alors le groupe G est moyennable, résultat optimal puisque \sqrt{t} est atteinte pour le groupe libre. Pour le groupe d'allumeur de réverbère, on a $\rho_1(t) \geq \frac{t}{\log t}$. On renvoie par exemple à Guentner-Kaminker [GK04] et Cornulier-Tessera-Valette [CTV08] pour un panorama détaillé.

Le problème inverse pour la compression des groupes a été résolu par Arzhantseva-Drutu-Sapir [ADS09].

Théorème 3.2 (Arzhantseva-Drutu-Sapir [ADS09]). *Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\frac{t}{\log(t)\rho(t)}$ soit croissante. Alors il existe un groupe de type fini de dimension asymptotique au plus 2 pour lequel $(\frac{\rho(t)}{\log^{1+\epsilon}(1+t)}, \rho(t))$ est un intervalle de compression hilbertienne.*

La preuve de ce théorème repose sur l'existence de graphes satisfaisant la conclusion, qui sont des unions de graphes expanseurs dilatés, et sur l'usage de la théorie des graphes de groupes.

Les produits diagonaux d'allumeurs de réverbère avec $\{\Gamma_s\}$ expanseurs ont permis d'obtenir l'analogie équivariant de ce théorème.

Théorème 3.3 ([BZ21]). *Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\frac{t}{\rho(t)}$ soit croissante. Alors il existe un groupe de type fini moyennable de dimension asymptotique 1 pour lequel le couple $(\frac{\rho(t)}{\log^{1+\epsilon}(1+\rho(t))}, \rho(t))$ est un intervalle de compression équivariante L^p pour tout $p \in]1, \infty[$.*

Noter l'amélioration sur la borne inférieure qui rend le résultat significatif pour des fonctions inférieures au logarithme.

La borne supérieure est similaire aux arguments de l'article [ADS09], et de l'article d'Austin [Aus11] qui construit des groupes moyennables avec compression très petite. La borne inférieure est obtenue par construction explicite d'un cocycle, adaptant les arguments de Tessera [Tes11].

Les produits diagonaux avec Γ_s diédraux produisent aussi des exemples intéressants, mais techniquement plus difficiles à étudier. On obtient seulement des résultats pour l'exposant de compression

$$\alpha(G, L^p) := \sup \{ \alpha : \exists f : G \rightarrow L^p, \rho_f(t) \succeq t^\alpha \}.$$

Théorème 3.4 ([BZ21]). *Pour tout $\alpha \in [\frac{2}{3}, 1]$, il existe un groupe Δ résoluble de degré 3 avec $\alpha(\Delta, L^p) = \alpha$ pour tout $p \in [1, 2]$.*

Il découle de ce théorème qu'il existe une quantité indénombrable de groupes de type fini 3 résolubles deux-à-deux non quasi-isométriques. Un résultat déjà connu de Cornulier-Tessera [CT13], par des constructions différentes et des arguments de type cônes asymptotiques. Noter qu'un tel résultat n'est pas possible pour des groupes métabéliens de type fini dont les classes d'isomorphisme sont dénombrables.

Pour ces groupes, les obstructions sont plus techniques, et reposent sur une inégalité de cotype métrique due à Mendel-Naor [MN08]. Très grossièrement, ces groupes contiennent des portions d'espaces ℓ^∞ en raison du max dans la formule (2.4.1). Pour $p > 2$, on ne connaît pas précisément l'exposant, mais on a une borne

$$\alpha(\Delta, L^p) \geq \frac{3p-4}{4p-5} > \alpha(\Delta, L^2) = \frac{2}{3}.$$

On ne connaît pas d'autres exemples pour lesquels la compression est meilleure pour p plus grand.

3.2 Le profil isopérimétrique

Sur un groupe probabilisé (G, μ) , on définit le profil isopérimétrique ℓ^p comme

$$\Lambda_{p,G,\mu}(v) := \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}_{p,\mu}(f)}{\|f\|_p^p} : \#\text{support}(f) \leq v \right\}, \quad (3.1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\mu}(f) := \frac{1}{2} \sum_{x,y \in G} |f(xy) - f(x)|^p \mu(y)$ est la forme de Dirichlet. Pour $p = 1$, il est classiquement, par formule de co-aire, équivalent à

$$\Lambda_{1,G,\mu}(v) \asymp \inf \left\{ \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} : |\Omega| \leq v \right\} \quad (3.2)$$

pour μ à support fini symétrique. La question de décrire les comportements possibles du profil isopérimétrique a été posée par Vershik [Ver82], en termes de fonctions de Folner. La fonction de Folner d'un groupe G relativement à une partie génératrice symétrique S est

$$F_{G,S}(x) = \min \left\{ |A| : A \subset G \text{ et } \frac{|\partial_S A|}{|A|} < \frac{1}{x} \right\}$$

où $\partial_S A = AS \setminus A$ est le bord de A relativement à S . On a

$$\Lambda_{1,G,\mu}(v) \asymp \frac{v}{F_{G,S}^{-1}(v)}$$

pour une constante dépendant de S et du support de μ et où F^{-1} désigne la fonction réciproque.

Il est facile de voir que le profil isopérimétrique ne dépend pas du choix de μ , tant qu'elle est non-dégénérée à support fini ce qui sera le cas ici.

Pour tout $p > 1$, le profil isopérimétrique ℓ^p tend vers 0 si et seulement si le groupe est moyennable.

On renvoie par exemple à l'article de Pittet [Pit00] concernant le profil isopérimétrique des groupes en lien avec le profil isopérimétrique des variétés riemanniennes. Le profil isopérimétrique des produits en couronne a notamment été étudié par Erschler [Ers06a; Ers03b]. Elle a également montré que le profil peut être arbitrairement proche d'une fonction constante : pour tout $\epsilon(v) \rightarrow 0$, il existe G tel que $\Lambda_{p,G}(v) \geq \epsilon(v)$ pour v assez grand, au moyen de constructions en liens avec des groupes d'automates [Ers06b].

Dans l'article [BZ21], on obtient une solution satisfaisante au problème inverse pour les profils isopérimétriques dans le cas des groupes à croissance exponentielle.

Théorème 3.5 ([BZ21]). *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1, 2]$ et pour toute $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ croissante satisfaisant $f(1) = 1$ et que $\frac{x^p}{f(x)}$ soit croissante, il existe un groupe Δ tel que $\Lambda_{p,\Delta}(v) \asymp_C \frac{1}{f(\log(v))}$.*

La démonstration de ce fait est basée sur les mêmes idées que pour la vitesse et la compression : à savoir que les expanseurs Γ_s homothétiquement plongés fournissent l'obstruction

optimale à la moyennabilité. Les outils sont bien sûr différents. On renvoie à la section 4 de [BZ21] pour une preuve complète. Notons que pour la fonction f de ce théorème et $\rho(t) = \frac{t}{f(t)}$ du théorème 3.3, on peut prendre le même groupe Δ .

Ce théorème peut facilement se reformuler en termes de fonctions de Folner. De plus, via la théorie de Coulhon [Cou96] et Coulhon-Grigor'yan [CG97], le profil ℓ^2 permet de déterminer la probabilité de retour des marches aléatoires. Le théorème 2.23 découle donc du théorème 3.5.

3.3 Les profils de séparation et de Poincaré

Les profils de Poincaré ont été introduits par Hume-Mackay-Tessera [HMT20] comme une généralisation du profil de séparation introduit par Benjamini-Schramm-Timar [BST12]. On présente ici les travaux sur cet invariant effectués par Corentin Le Coz, durant sa thèse que j'ai co-encadrée avec Romain Tessera. L'article [GLC23] aborde les liens entre profil isopérimétrique ℓ^1 et profil de séparation. L'article [LC20] fournit des estimations sur les profils de Poincaré des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères.

Pour $p \in [1, \infty]$, le profil de Poincaré ℓ^p d'un groupe G est la fonction

$$\Pi_{p,G}(v) := \sup \{ |\Omega| h_p(\Omega) : |\Omega| \leq v \text{ et } \Omega \subset G \}$$

où $h_p(\Omega)$ est la constante de Cheeger ℓ^p du sous-graphe induit par Ω du graphe de Cayley de G (pour une partie génératrice fixée dont le choix n'influence pas le profil modulo \asymp) définie par

$$h_p(\Omega) := \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|_p}{\|f\|_p} : f : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \text{supp}(f) \subset \Omega \text{ et } \sum_{x \in \Omega} \right\}.$$

Pour définition du gradient, on pose $\nabla f(x) := \max\{|f(x) - f(xs)| : s \in S\}$.

Comparaison avec les profils isopérimétriques

Ce profil de Poincaré est à mettre en relation avec la définition (3.1) du profil isopérimétrique. En particulier lorsque μ a support fini symétrique, il existe une constante c ne dépendant que de S et μ telle que $\mathcal{E}_{p,\mu}(f) \asymp_c \|\nabla f\|_p^p$. Ainsi $h_p^p(G)$ est comparable au profil isopérimétrique $\Lambda_{p,\Omega}(|\Omega|)$. Toutefois, les conditions au bord sur l'ensemble des fonctions f considérées est très différent : c'est une condition de type Dirichlet, annulation au bord, pour le profil isopérimétrique tandis que c'est une condition de type Neumann, moyenne nulle, pour les profils de Poincaré.

Le profil de Poincaré ℓ^1 est équivalent au profil de séparation défini comme

$$\text{sep}(v) := \sup \{ \text{cut}(\Omega) : \Omega \subset G \text{ et } |\Omega| = v \}$$

où la constante de découpage $\text{cut}(\Omega)$ d'un sous-graphe induit Ω est le cardinal minimum d'une partie de Ω le découpant en composantes connexes de cardinal au plus $|\Omega|/2$. Ceci correspond à l'interprétation (3.2) en termes d'ensembles de profil isopérimétrique ℓ^1 .

Les profils de Poincaré ne caractérisent pas la moyennabilité. Par exemple le profil de séparation des groupes libres est constant (il suffit d'un point pour déconnecter un arbre en parties de cardinal moitié moindre) tandis que le profil est linéaire (au moins sur une sous-suite) lorsque le groupe contient des expanseurs isométriquement plongés, comme par exemple les groupes aléatoires de Gromov [Gro03], voir l'article de Hume [Hum17].

Une comparaison entre ces deux profils a été obtenue par Corentin Le Coz, en collaboration avec Antoine Gournay, dans sa thèse. L'énoncé complet, Theorem 3.4 de [GLC23] est relativement technique, mais repose sur une observation simple : si une partie Ω est optimale pour l'isopérimétrie, c'est-à-dire si $\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} = \Lambda_1(|\Omega|)$, alors

$$2h_1(\Omega) \geq \Lambda_1\left(\frac{|\Omega|}{2}\right) - \Lambda_1(|\Omega|).$$

Par télescopage, on en déduit une inégalité d'autant plus pertinente que l'isopérimétrie décroît vite. On donne deux cas particuliers plutôt qu'un théorème général.

Théorème 3.6 (Gournay-Le Coz [GLC23]). *Soit $a > 0$.*

Si $\Lambda_1(v) \preceq \frac{1}{\log^a v}$, alors pour une infinité de v , on a $\frac{\Pi_1(v)}{v} \succeq \frac{\Lambda_1(v)}{\log v}$.

Si $\Lambda_1(v) \preceq \frac{1}{(\log \circ \dots \circ \log v)^a}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour une infinité de v , on a $\frac{\Pi_1(v)}{v} \succeq \frac{\Lambda_1(v)}{v^\varepsilon}$.

Gournay-Le Coz déduisent aussi que tout groupe de type fini résoluble satisfaisant $\Pi_1(v) \preceq v^{1-\varepsilon}$ est virtuellement nilpotent.

Invariants de plongements grossiers

Un intérêt remarquable des profils de Poincaré est d'être monotones par plongement grossier.

On rappelle qu'une application $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ entre espaces métriques est un plongement grossier s'il existe une constante C telle que $d_Y(f(x), f(y)) \leq C(1 + d_X(x, y))$ et que pour tout $y \in Y$, l'image réciproque $f^{-1}(B(y, 1))$ est couverte par l'union d'au plus C boules de rayons 1 dans X . Les quasi-isométries sont des exemples de plongement grossiers mais c'est une notion nettement plus flexible. Par exemple, une droite se plonge grossièrement dans une demi-droite par pliage.

Théorème 3.7 (Hume-Mackay-Tessera [HMT20]). *Soit X, Y deux graphes de degré borné. S'il existe un plongement grossier de X dans Y , alors $\Pi_{p,X}(v) \preceq_c \Pi_{p,Y}(v)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.*

Les profils de Poincaré et de séparation ont été calculés pour de nombreux groupes par Benjamini-Schramm-Timar [BST12] et Hume-Mackay-Tessera [HMT20; HMT22]. Par exemple d'après [HMT20], pour des groupes hyperboliques de dimension conforme équivariante q , on a $\Pi_1(v) \preceq v^{\frac{q-1}{q}}$ avec égalité pour les espaces symétriques de rang 1 et les groupes d'isométries d'immeubles de Bourdon [Bou97]. Les auteurs déduisent de ce résultat qu'il existe une partie A dénombrable dense de $]0, 1[$ telle que pour tout $a \in A$, il existe un groupe avec $\text{sep}(n) \asymp n^a$. On ignore à ce jour si cela est vrai pour $A = [0, 1]$.

Hume-Mackay-Tessera insistent sur la distinction entre le fait d'avoir $\Pi_1(v) \leq v^{1-\varepsilon}$ qu'ils nomment *finesse analytique* et celui d'avoir $\Pi_1(v) \geq \frac{v}{\log v}$ nommé *épaisseur analytique* . Ils montrent dans [HMT22] que cette distinction est dichotomique pour les groupes de Lie unimodulaires connexes, et caractérisent algébriquement les deux situations.

Dans l'article [LC20], Coz utilise les produits diagonaux pour résoudre en partie le problème inverse dans le cas analytiquement épais.

Théorème 3.8 (Le Coz [LC20]). *Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ croissante avec $f(1) = 1$ et $\frac{x}{f(x)}$ croissante, il existe un groupe Δ tel que pour tout $p \in [1, \infty[$*

- $\Pi_{p,\Delta}(v) \leq C \frac{v}{f(\log v)}$ pour tout v ,
- $\Pi_{p,\Delta}(v) \geq \frac{C}{4^p} \frac{v}{f(\log v)^2}$ pour une infinité de v .

Si de plus $\frac{\log v}{f(v)}$ est croissante, alors $\Pi_{p,\Delta}(v) \geq \frac{C}{4^p} \frac{v}{f(\log v)}$ pour une infinité de v .

Pour une fonction f donnée, le groupe de ce théorème est le même que celui du théorème 3.5. Il résout en partie le problème inverse pour des profils très proches de linéaire modulo une borne inférieure valide sur une seule sous-suite. C'est néanmoins suffisant pour en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 3.9 (Le Coz [LC20]). *Il existe une famille indénombrable $(G_r)_{r \in \mathbb{R}}$ de groupes moyennables de dimension asymptotique 1 telle que pour tout $s \neq r$, le groupe G_s n'admet pas de plongement grossier dans G_r .*

3.4 La propriété H_{FD} de Shalom

Les produits diagonaux ont aussi produit des exemples intéressants de groupes ayant la propriété H_{FD} , introduite par Shalom dans [Sha04]. On peut penser à cette propriété comme un analogue de la propriété (T) pour les groupes moyennables. Rappelons qu'un groupe a la propriété (T) si et seulement si toutes ses représentations unitaires ont une cohomologie réduite $\bar{H}^1(G, \pi) = 0$ d'après [Sha00]. La cohomologie réduite est l'espace des cocycles quotienté par l'adhérence des cobord $\bar{H}^1 = Z^1 / \bar{B}^1$. Ainsi tout groupe n'ayant pas la propriété (T) possède une représentation irréductible avec $\bar{H}^1 \neq 0$.

La propriété H_{FD} assure que de telles représentations ont dimension finie.

Définition 3.10 (Shalom [Sha04]). *Un groupe dénombrable Γ possède la propriété H_{FD} si pour toute représentation unitaire π avec $\bar{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$, il existe une sous-représentation σ de dimension finie.*

Shalom définit aussi deux renforcements: H_F qui demande à σ d'être fini et H_T qui demande à σ d'être triviale.

La propriété H_{FD} assure en un certain sens que les groupes sont “petits”. Elle est notamment satisfaite par les groupes virtuellement nilpotents, par les groupes polycycliques et par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, mais pas par $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ [Sha04]. Parmi les groupes moyennables, posséder H_{FD} est un invariant de quasi-isométrie, et tout groupe ayant cette propriété admet virtuellement un morphisme vers \mathbb{Z} [Sha04].

Avec cette dernière observation, Shalom a suggéré qu’on pourrait obtenir une nouvelle preuve du théorème de Gromov [Gro81] en démontrant directement qu’un groupe à croissance polynomiale possède la propriété H_{FD} . Cela a été fait par Ozawa [Oza18]. Sa preuve, remarquablement succincte, est basée sur les marches aléatoires et la concavité de l’entropie de Shannon. Notons que les marches aléatoires surviennent naturellement dans ce contexte, car pour le produit scalaire $\langle b, b' \rangle_\mu := \sum_g \langle b(g), b'(g) \rangle \mu(g)$ sur Z^1 , l’orthogonal de \bar{B}^1 est l’ensemble des cocycles μ -harmoniques, comme observé par Guichardet [Gui72].

Peu après l’article d’Ozawa, Erschler et Ozawa ont donné un critère probabiliste caractérisant la propriété H_{FD} , dont un corollaire est le suivant.

Théorème 3.11 (Erschler-Ozawa [EO18]). *Si $\limsup \mu^{*n}(B_G(c\sqrt{n})) > 0$ pour tout $c > 0$, alors G possède la propriété H_{FD} .*

En utilisant les techniques d’Ozawa [Oza18] et un argument de couplage réminiscent de Benjamini-Duminil-Copin-Kozma-Yadin [Ben+17], nous démontrons dans un article écrit en commun avec Tianyi Zheng le résultat suivant.

Théorème 3.12 ([BZ19]). *Soit $\tau : G \rightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupe. Si toute partie finie de $\ker \tau$ est incluse dans un sous-groupe normal fini de $\ker \tau$, alors G possède la propriété H_T de Shalom.*

Les produits diagonaux introduits dans [BZ21] satisfont les hypothèses de ce théorème et donc ont propriété H_{FD} . Ce furent les premiers exemples de tels groupes ne satisfaisant pas les prémices du théorème 3.11.

Une variante de la construction de la section 2.4.1 fournit d’autres groupes intéressants. Étant donnés $A, B, (\Gamma_s), (k_s)$, on peut aussi se donner une suite $(\ell_s)_{s \geq 1}$ satisfaisant $\ell_s \geq 2k_s$, et considérer le produit diagonal des groupes $\Delta_s := \Gamma_s \wr \mathbb{Z}/\ell_s \mathbb{Z}$ avec les mêmes générateurs que précédemment et $\Delta_0 = (A \times B) \wr \mathbb{Z}$. En d’autres termes, on remplace (2.2) par

$$\mathcal{C} := \prod_{s \in \mathbb{N}} \prod_{\mathbb{Z}/\ell_s \mathbb{Z}} \Gamma_s$$

en convenant que $\ell_0 = \infty$.

On ne connaît pas précisément la vitesse des marches aléatoires sur ces groupes-là, mais il est évident qu’en adaptant les preuves de [BZ21] on obtient de tels groupes avec à peu près n’importe quelle vitesse des marches aléatoires.

Pour ces nouveaux groupes, le noyau du morphisme $\Delta \rightarrow \Delta_0$ est le FC-centre, c’est-à-dire l’ensemble des éléments dont la classe de conjugaison est finie. Un résultat de Gournay [Gou18] assure alors que les cocycles harmoniques des représentations faiblement

mélangeantes (c'est-à-dire sans sous-espace invariant de dimension finie) factorisent par Δ_0 . Il découle que tout comme Δ_0 , ces groupes ont H_{FD} . De plus, les arguments de la preuve du théorème 3.12 permettent de montrer aussi que toute fonction réelle μ -harmonique à croissance sous-exponentielle factorise par le centre FC . Combiné à un résultat de [Ben+17] assurant que les fonctions harmoniques sous-linéaires de Δ_0 sont constantes, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.13 ([BZ19]). *Pour toute fonction avec $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, il existe un groupe de type fini avec une mesure μ symétrique à support fini ayant propriété H_{FD} , dont toutes les fonctions μ -harmoniques sous-linéaires sont constantes et dont la vitesse satisfait $L_\mu(n) \geq cf(n)$.*

Ces groupes ont été les premiers exemples de groupes ayant toutes leurs fonctions harmoniques sous-linéaires constantes, mais vitesse supérieure à diffusive. L'implication réciproque est ouverte:

Question 3.14. *Soit G un groupe probabilisé ayant une vitesse diffusive (c'est-à-dire $L_{G,\mu}(n) \leq c\sqrt{n}$ pour un certain $c > 0$), est-il vrai que toutes les fonctions harmoniques sous-linéaires sont constantes ?*

Kozma a conjecturé une réponse positive dans son exposé à la conférence "Random walks on groups" à l'IHP en janvier 2014. Plus généralement, on aimerait savoir quelles sont les conséquences pour un groupe d'avoir vitesse diffusive...

Notons également que cette famille de groupes agissant sur l'espace défini par (3.4) est reliée à des exemples de groupes résolubles "exotiques", voir [JK20; LBMB24].

3.5 Équivalence orbitale quantitative

Le théorie mesurée des groupes est une soeur jumelle de leur théorie géométrique, une notion d'équivalence mesurée étant le pendant de la notion de quasi-isométrie. On renvoie par exemple au survey de Gaboriau pour un point de vue global sur ce domaine [Gab11] que nous n'aborderons ici qu'à travers le prisme récent de la quantification.

Les notions d'équivalences mesurée et orbitale quantitatives ont été développées par Delabie-Koivisto-Le Maître-Tessera [Del+22]. On présente ici les travaux [Esc24; Esc22] sur ces invariants, effectués par Amandine Escalier, durant sa thèse que j'ai co-encadrée avec Romain Tessera.

Un célèbre théorème d'Ornstein-Weiss assure que deux groupes moyennables sont toujours orbitalement équivalents, c'est à dire qu'ils possèdent des actions libres sur un espace de probabilité partageant les mêmes orbites [OW80]. La relation d'équivalence orbitale est donc extrêmement flexible, puisqu'elle ne distingue pas des groupes ayant des propriétés géométriques très diverses.

Une manière de faire apparaître la géométrie dans l'équivalence orbitale est une quantification, introduite par Delabie-Koivisto-Le Maître-Tessera [Del+22].

Définition 3.15. Deux groupes G et H sont orbitalement équivalents s'il existe un espace probabilisé (X, η) sur lequel ils admettent des actions de sorte que pour presque tout $x \in X$, leurs orbites coïncident : $Gx = Hx$.

Pour deux systèmes générateurs S_G et S_H , les orbites sont équipées de métriques en tant que graphes de Schreier. L'équivalence orbitale sur X est dite (φ, ψ) -intégrable si pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, il existe $c_g, c_h > 0$ telles que

$$\int_X \varphi \left(\frac{1}{c_g} d_{S_H}(gx, x) \right) d\eta(x) < \infty \quad \text{et} \quad \int_X \psi \left(\frac{1}{c_h} d_{S_G}(hx, x) \right) d\eta(x) < \infty$$

Les constantes c_g, c_h apparaissent simplement pour assurer que la notion ne dépende pas des systèmes générateurs choisis.

Lorsque $\varphi(x) = \psi(x) = x^p$, on retrouve l'équivalence orbitale L^p introduite par Bader-Furman-Sauer [BFS13] : tout groupe L^1 -orbitalement équivalent à un réseau de $SO(n, 1)$ pour $n \geq 2$ est virtuellement un réseau dans $SO(n, 1)$, et utilisée par Austin [Aus16] : deux groupes à croissance polynomiale L^1 -orbitalement équivalents ont des cônes asymptotiques bi-Lipschitz.

Notons que les quantifications sur les G -orbites et celles des H -orbites ne sont pas nécessairement liées. Si l'on interprète la quantification comme une distance généralisée entre les groupes (où ils seraient d'autant plus proches que φ, ψ croîtraient vite), alors cette "distance" n'est pas symétrique. Bien sûr, si φ, ψ sont bornées, alors toute équivalence orbitale est (φ, ψ) -intégrable (noté aussi (L^∞, L^∞) -intégrable).

L'article [Del+22] entame une étude systématique de cette notion, et celle reliée d'équivalence mesurée quantitative. Ils introduisent aussi des variantes en autorisant l'action de G à n'être pas libre (notion de quotient orbital) ou d'avoir seulement des inclusions $Gx \subset Hx$ (notion de sous-groupe orbital). Un des résultats principaux assure que les profils isopérimétriques fournissent une obstruction quantitative à l'équivalence orbitale. Notons $j_{1,G}(v) := \frac{1}{\Lambda_{1,G}(v)}$ l'inverse du profil isopérimétrique.

Théorème 3.16 (Delabie-Koivisto-Le Maître-Tessera [Del+22]). Soit G, H deux groupes de type fini. S'il existe une équivalence orbitale (φ, L^∞) de G vers H , alors $j_{1,G} \succeq \varphi \circ j_{1,H}$.

Un résultat similaire a été obtenu par Bowen avec la croissance plutôt que l'isopérimétrie dans l'appendice de l'article [Aus16]. Il est naturel de chercher à savoir si cette obstruction est optimale, ou si elle pourrait être améliorée en toute généralité. Des résultats en faveur de l'optimalité ont été obtenus par Amadine Escalier au moyen des produits diagonaux d'allumeurs de réverbères avec $\{\Gamma_s\}$ expandeurs.

Théorème 3.17 (Escalier [Esc24]). Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante avec $g(1) = 1$ et $\frac{x}{g(x)}$ croissante, il existe un groupe Δ tel que $j_{1,\Delta}(v) \asymp g \circ \log(v)$ et une équivalence orbitale de G vers \mathbb{Z} qui est $(\frac{g \circ \log(v)}{\log \circ g \circ \log(v)}, L^\infty)$ -intégrable.

Comme $j_{1,\mathbb{Z}}(v) \asymp v$, ce résultat montre que dans ce cas le théorème 3.16 est optimal au facteur $\frac{1}{\log(j_{1,\Delta})}$ près.

Question 3.18. Soit Δ_1 et Δ_2 deux produits diagonaux d'allumeurs de réverbères. Existe-t-il une équivalence orbitale entre les deux dont la quantification soit proche de celle donnée par le théorème 3.16 ?

Des résultats dans cette direction ont été obtenus par Amandine Escalier dans [Esc22] mais seulement pour des sous-groupes mesurés et lorsque Δ_2 est un groupe d'allumeur de réverbère. On s'attend à une réponse positive.

Plus généralement, il serait intéressant d'obtenir d'autres obstructions aux quantifications d'équivalence orbitale, car il paraît peu vraisemblable qu'elle soit intégralement gouvernée par les profils isopérimétriques. A contrario, on aimerait aussi disposer d'une construction garantissant, à partir des profils isopérimétriques, une quantification de l'équivalence orbitale c'est à dire une sorte de réciproque au théorème 3.16 mais a priori avec une inégalité plus faible.

3.6 Et pour d'autres groupes moyennables ?

Les nombreux thèmes abordés dans ce chapitre restent presque totalement ouverts pour d'autres familles de groupes moyennables que nous avons mentionnées, notamment les groupes agissant sur des arbres enracinés, par exemple les groupes "mère" des automates à activité polynomiale [Sid00; AAV13], les groupes "bulles" de Kotowski-Virag [KV15] et les familles de groupes simples [JM13; Nek18].

Hormis les résultats de [Bri13; AV17] sur l'entropie et la vitesse des marches aléatoires, on ne dispose quasiment pas de résultats substantiels pour ces groupes concernant les profils isopérimétriques ou de Poincaré, la compression hilbertienne, ni concernant de possibles quantifications de leurs équivalences mesurées. Il y a là un vaste champ ouvert mais il ne semble pas que nous disposions d'outils adaptés pour le défricher.

Un résultat sporadique que j'ai pu obtenir est la construction d'ensembles de Folner explicites pour une version alternée du groupe "mère" des automates à activité bornée pour des arbres enracinés de degré au moins 5 [Bri14a]. Cela permet d'obtenir une preuve alternative de la moyennabilité des groupes d'automates à activité bornée, obtenue en premier lieu dans [BKN10], mais les ensembles de Folner décrits sont très loin des bornes isopérimétriques découlant de l'entropie [Bri13].

Une autre question, assez vertigineuse tant elle est peu documentée, est de savoir quelles sont les valeurs prises par ces invariants asymptotiques pour des groupes de présentation finie. Il s'agit alors de collections dénombrables. On dispose de peu d'exemples, et à ma connaissance aucune obstruction. De ce point de vue, la question de Milnor reste entière : existe-t-il des groupes à croissance intermédiaire de présentation finie ?

ENTROPIE DE FURSTENBERG

4.1	Spectre entropique	61
4.2	Fibrés de Poisson	62
4.3	Questions et perspectives	66

Dans son article sur les représentations de Poisson [Fur63a], Furstenberg a introduit la quantité suivante

$$h_\mu(X, \eta) = - \int_G \int_X \log \frac{dg^{-1}\eta}{d\eta}(x) d\eta(x) d\mu(g)$$

où (X, η) est un espace (G, μ) -stationnaire, nommée en hommage *entropie de Furstenberg*. Lorsque G est dénombrable, la première intégrale est une somme, mais on s'intéressera aussi aux groupes localement compacts. L'entropie de Furstenberg est un invariant monotone des espaces stationnaires qui mesure le défaut d'invariance.

Si $\pi : (X, \eta) \rightarrow (Y, \nu)$ est un facteur (c'est-à-dire π est G -équivariante et $\pi\eta = \nu$), alors $h_\mu(X, \eta) \geq h_\mu(Y, \nu)$, avec égalité si et seulement si $g\eta^y = \eta^{gy}$ pour la désintégration $\eta = \int_Y \eta^y d\nu(y)$. On dit dans ce cas que l'extension préserve relativement la mesure. En particulier, l'entropie est nulle si et seulement si η est invariante.

D'après Furstenberg et Kaimanovich-Vershik [Fur63a; KV83], l'entropie est maximale pour le bord de Poisson $H_\mu(X, \eta) \leq h_\mu(B, \nu_\infty)$. Une question naturelle, pour un groupe probabilisé (G, μ) donné est de déterminer l'ensemble des valeurs possibles des entropies de Furstenberg de ses actions stationnaires ergodiques, nommé spectre entropique

$$\text{SpEnt}(G, \mu) := \{h \geq 0 : \exists (X, \eta) \text{ stationnaire ergodique } h_\mu(X, \eta) = h\}.$$

Cet ensemble est donc inclus dans $[0, h_\mu(B, \nu_\infty)]$ et contient les bornes de cet intervalle. On rappelle que l'espace des mesures stationnaires est convexe et qu'une telle mesure est ergodique si elle est un point extrémal.

Déterminer le spectre entropique apparait donc comme un problème inverse pour les actions d'un groupe donné : étant donné une valeur, peut-on construire un espace qui la

réalise ? Dans une prépublication écrite avec Tianyi Zheng [BZ23], nous déterminer le spectre entropique des groupes $SL(d, \mathbb{R})$. Ce travail repose notamment sur des constructions de Bowen [Bow14] et des résultats de Nevo-Zimmer [Nev99; NZ00; NZ02b; NZ02a].

4.1 Spectre entropique

L'étude systématique des entropies de Furstenberg des groupes de Lie semi-simples G a été initiée par Nevo-Zimmer dans une série d'articles [Nev99; NZ00; NZ02b; NZ02a]. Pour ces groupes, lorsque la mesure μ est à support compact et absolument continue par rapport à celle de Haar (en bref *admissible*), le bord de Poisson s'identifie à l'espace homogène $B = G/P$ où P est un parabolique minimal. Pour $G = SL(d, \mathbb{R})$, où P est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, c'est l'espace des drapeaux complets. Il possède donc 2^{d-1} facteurs algébriques de la forme G/Q pour Q parabolique. Ces facteurs sont dits *projectifs*.

Si (X, η) est un espace (G, μ) -stationnaire, il admet des facteurs projectifs, ne serait-ce que le facteur trivial pour $Q = G$. Il est assez aisé de montrer qu'il en admet un maximal $X \rightarrow G/Q_{\max}$ qui factorise tout les autres [NZ02b].

Théorème 4.1 (Nevo-Zimmer [Nev99; NZ00; NZ02b]). *Soit G un groupe de Lie simple avec μ admissible. Soit (X, η) un espace stationnaire, de facteur projectif maximal G/Q_{\max} .*

Si $\text{rg}(G) \geq 2$, alors G/Q_{\max} est trivial si et seulement si η est invariante. Si η est mélangeante (voir [NZ00]), alors $h_\mu(X, \eta)$ appartient à l'ensemble fini donné par les facteurs projectifs.

Le spectre entropique de $SL(2, \mathbb{R})$ est infini.

Ce théorème assure qu'en rang supérieur le spectre entropique de G n'intersecte pas l'intervalle $]0, \min_{Q \neq G} \{h_\mu(G/Q)\}[$ où Q est parabolique. Plus généralement, si G a la propriété (T), alors 0 est un point isolé du spectre entropique, d'après [Nev03].

Le premier résultat de réalisation complète a été obtenu par Bowen pour le groupe libre.

Théorème 4.2 (Bowen [Bow14]). *Soit μ la mesure uniforme sur les générateurs usuels d'un groupe libre \mathbb{F}_k , alors $\text{SpEnt}(\mathbb{F}_k, \mu) = [0, h_\mu(B, \nu_\infty)]$.*

Ces résultats ont été généralisé par Hartman-Yadin [HY18] aux mesures non-dégénérées à support fini. Ils ont aussi montré la réalisation complète pour des produits en couronne $L \wr B$ où la marche aléatoire induite sur la base est Liouville et pour le groupe des permutations à support fini d'un ensemble dénombrable, pour toute mesure d'entropie finie dans les deux cas. Ron-George-Yadin ont obtenu la réalisation complète pour les groupes virtuellement libres avec des mesures de moment d'ordre 4 fini [RGY21].

Avec Tianyi Zheng, nous avons obtenu une description complète du spectre entropique de $SL(d, \mathbb{R})$. On rappelle que tout sous-groupe parabolique de $SL(d, \mathbb{R})$ est de la forme P_I pour I une partie de l'ensemble des racines simples $\Delta = \{1, \dots, d-1\}$ et admet une décomposition de Lévi $P_I = L_I \rtimes N_I$. On définit $f(I) \subset I$ comme la partie maximale telle que le sous-groupe de Lévi de $P_{f(I)}$ ne possède aucun facteur simple non-compact de rang 1. De manière très concrète, P_I est à conjugaison près un groupe de matrices triangulaires

supérieure par bloc, et $P_{f(I)}$ s'obtient à partir de P_I en remplaçant les blocs de taille deux par $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3 ([BZ23]). *Le spectre entropique de $SL(d, \mathbb{R})$ pour une mesure μ admissible est l'union d'intervalles*

$$\text{SpEnt}(SL(d, \mathbb{R}), \mu) = \bigcup_{I \subset \Delta} [h_\mu(G/P_I), h_\mu(G/P_{f(I)})].$$

Lorsque P_I ne possède aucun facteur simple de rang 1 l'intervalle est réduit à un point. Lorsque $d = 2$, on obtient réalisation complète. Pour $d = 3$, le spectre est de la forme $\{0\} \cup [h_\mu(G/Q), h_\mu(B)]$ pour l'un des deux paraboliques non-triviaux. À partir de $d = 4$, cela dépend des valeurs de l'entropie sur les facteurs projectifs (ils forment un treillis identifiable aux sommets d'un cube de dimension $d - 1$). Il semble possible d'obtenir plusieurs points isolés.

La preuve de ce résultat repose largement sur la construction par Bowen de fibrés de Poisson associés à des sous-groupes aléatoires (IRS) [Bow14] que nous décrivons maintenant.

4.2 Fibrés de Poisson

Définition des fibrés de Poisson

Soit (X, η) un espace (G, μ) -stationnaire et $(G^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu)$ l'espace des trajectoires de la marche aléatoire. L'action diagonale de G sur $X \times G^{\mathbb{N}}$ est stationnaire pour la mesure de couplage (joining en anglais)

$$\eta \vee \mathbb{P}_\mu := \int_{G^{\mathbb{N}}} \eta_\omega \times \delta_\omega d\mathbb{P}_\mu(\omega)$$

où η_ω est la limite presque sûre de $Z_n \eta$ pour la trajectoire $\omega = (Z_1, Z_2, \dots)$, qui existe par le théorème des martingales. On renvoie à l'article de Furstenberg-Glasner pour une étude détaillée des couplages [FG10].

On note $\text{Sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G , muni de la topologie de Chabauty et de l'action par conjugaison. Lorsqu'on dispose d'une application G -équivariante $L : X \rightarrow \text{Sub}(G)$, on peut considérer l'espace

$$W_\Omega := \sqcup_{x \in X} \{x\} \times (L_x G)^{\mathbb{N}}$$

muni de la G action

$$g.(x, L_x Z_1, L_x Z_2, \dots) = (g.x, gL_x Z_1, gL_x Z_2, \dots) = (g.x, L_{gx} gZ_1, L_{gx} gZ_2, \dots)$$

puisque $L_{g.x} = gL_x g^{-1}$. C'est donc un facteur intermédiaire $X \times G^{\mathbb{N}} \rightarrow W_\Omega \rightarrow X$. Le décalage temporel T sur $G^{\mathbb{N}}$ s'induit à W_Ω par $T(x, L_x Z_1, L_x Z_2, \dots) = (x, L_x Z_2, L_x Z_3, \dots)$.

Définition 4.4. *Le fibré de Poisson, noté (Z, λ) de (G, μ) relatif à (X, η) et $L : X \rightarrow \text{Sub}(G)$ est l'espace des composantes ergodiques de T . C'est donc la réalisation de Mackey de la σ -algèbre invariante $\mathcal{I} := \{A \in \text{Borel}(W_\Omega) : T^{-1}A = A\}$ complétée.*

Lorsque η est invariante (L_x est une IRS), alors $\eta \vee \mathbb{P}_\mu = \eta \times \mathbb{P}_\mu$, et on retrouve les fibrés de Poisson utilisés par Bowen [Bow14].

Formules d'entropie et identification des fibrés de Poisson

On suppose de plus que $\pi : (X, \eta) \rightarrow (Y, \nu)$ est une extension préservant relativement la mesure d'un système μ -proximal (Y, ν) et que $L_x < \text{Stab}_G(x)$ pour presque tout x . On dit alors que (X, η) est *standard*. Ces hypothèses techniques mais naturelles assurent que le processus $(L_x Z_n)_n$ est une chaîne de Markov, dont la loi $\mathbb{P}_\mu^{\pi(x)}$ ne dépend que de $\pi(x)$.

La mesure μ étant suffisamment régulière, on peut identifier fibre à fibre les σ -algèbres invariantes et asymptotiques (*tail* en anglais) $\mathcal{I}_x = \mathcal{T}_x$ modulo mesure zéro. De plus, la loi conditionnelle $\mathbb{P}_\mu^{\pi(x)}$ coïncide avec la mesure de désintégration $\mathbb{P}_\mu = \int_Y \mathbb{P}_\mu^y d\nu(y)$ d'après Bader-Shalom [BS06, Prop. 2.19]. Dans ce contexte, la fibre $\pi^{-1}(x)$ peut se voir comme le bord de Poisson de la chaîne de Markov $(L_x \setminus G, \mathbb{P}_\mu^{\pi(x)})$.

On peut alors généraliser à ces fibrés de Poisson les résultats sur l'entropie et l'identification de Kaimanovich-Vershik [KV83], Derriennic [Der85] et Kaimanovich [Kai00].

On obtient en particulier une formule d'entropie asymptotique.

Théorème 4.5 ([BZ23]). *Si G est dénombrable, l'entropie de Furstenberg du fibré de Poisson d'un système standard est donnée par*

$$h_\mu(Z, \lambda) = h_\mu(Y, \nu) + \inf_n \frac{1}{n} \int_X H(\xi_n^x) d\eta(x)$$

où ξ_n^x est la loi au temps n de la chaîne de Markov $(L_x \setminus G, \mathbb{P}_\mu^{\pi(x)})$ issue de L_x .

Dans le cas où (Y, ν) est invariant, cette formule est due à Bowen [Bow14]. Si G est localement compact, on dispose d'une formule similaire utilisant l'information mutuelle conditionnelle.

Ces formules d'entropie permettent d'étendre la théorie de l'identification des bords de Poisson aux fibrés de Poisson. Par exemple, on établit une version fibrée du critère des rayons (ray criterion) de Kaimanovich [Kai00]:

On suppose disposer d'une suite de facteurs $(W_\Omega, \bar{\mathbb{P}}_\mu) \rightarrow (Z, \lambda) \rightarrow (M, \bar{\lambda}) \rightarrow (X, \eta)$ avec un facteur M d'origine géométrique candidat à être le fibré de Poisson. On note $\theta_M : W_\Omega \rightarrow M$ l'application facteur.

Théorème 4.6 ([BZ23]). *Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie U de mesure positive de M , telle que pour tout n , on peut associer à tout point (x, ζ) de U un rayon $A_n^\epsilon(x, \zeta) \subset L_x \setminus G$ de*

cardinal sous-exponentiel $|A_n^\epsilon(x, \zeta)| \leq \exp(\epsilon n)$ qui attrape la trajectoire avec une probabilité positive :

$$\limsup_n \bar{\mathbb{P}}_\mu (\exists m \geq n : L_x Z_m \in A_n^\epsilon(x, \zeta)) > 0$$

où (Z_n) désigne une trajectoire dont la loi est conditionnée par $\theta_M(x, L_x Z_n) = (x, \zeta)$, alors ce facteur $(M, \bar{\lambda})$ est G -isomorphe au fibré de Poisson.

On dispose aussi d'un critère de la bande (strip criterion) mais seulement lorsque (X, η) est invariant.

Idées de la preuve du théorème 4.3

La preuve du théorème 4.3 comporte deux parties : obstructions et réalisations.

Concernant les obstructions, il s'agit essentiellement de donner une version fibré du théorème 4.1 de Nevo-Zimmer. En pratique, on utilise l'isomorphisme de Furstenberg [Fur63a] qui réalise un système stationnaire inconnu (X, η) comme facteur intermédiaire au dessus de son facteur projectif maximal $Q_{\max} = P_I$

$$(G/P_I \times_\sigma X, \nu_I \times \tilde{\lambda}) \rightarrow (X, \eta) \rightarrow (G/P_I, \nu_I),$$

où $\tilde{\lambda}$ est une mesure P -invariante sur X (existe car P est moyennable). Les arguments de Nevo-Zimmer en rang supérieur montrent que $P_{f(I)}$ préserve λ , ce qui permet de réaliser (X, η) comme facteur

$$(G/P_{f(I)} \times_\sigma \text{supp}(\tilde{\lambda}), \nu_{f(I)} \times \eta) \rightarrow (X, \eta).$$

Comme il s'agit d'une extension préservant relativement la mesure, on déduit

$$h_\mu(G/P_{f(I)}, \nu_{f(I)}) = h_\mu(G/P_{f(I)} \times_\sigma \text{supp}(\tilde{\lambda}), \nu_{f(I)} \times \eta) \geq h_\mu(X, \eta) \geq h_\mu(G/P_I, \nu_I).$$

Pour la réalisation, on utilise les techniques de Bowen [Bow14]. Commençons par revisiter sa démonstration de la réalisation complète pour un groupe libre F . Bowen considère des fibrés de Poisson sur des sous-groupes aléatoires invariants (IRS). C'est-à-dire que sur $X = \text{Sub}(G)$, il construit une famille d'IRS $(\rho_p)_{p \in [0,1]}$, qui dépend continuellement de p (en topologie faible \star avec la topologie de Chabauty sur $\text{Sub}(G)$), telle que $\rho_1 = \delta_{\{e\}}$ et ρ_0 est une moyenne finie de sous-groupes normaux $H < F$ avec $H \setminus F \simeq \mathbb{Z}$. La définition 4.4 fournit donc une famille de fibrés de Poisson de F notée $(Z_p, \lambda_p)_{p \in [0,1]}$. Il suffit alors de montrer que l'entropie de Furstenberg $p \mapsto h_\mu(Z_p, \lambda_p)$ est continue, puisque $h_\mu(Z_1, \lambda_1) = h_\mu(B, \nu_\infty)$ et $h_\mu(Z_0, \lambda_0) = 0$. On renvoie à l'article de Bowen, section 4, pour une description précise de ces IRS en terme de percolation de revêtements [Bow14].

La semi-continuité supérieure découle par un argument très général de la formule d'entropie du théorème 4.5. L'idée sous-jacente est très simple : si deux sous-groupes L et L' sont proches en topologie de Chabauty, alors les graphes de Schreier $L \setminus F$ et $L' \setminus F$ coïncident sur des boules de grand rayon. Si le rayon est assez grand pour contenir le support de μ^{*n} , alors LZ_n et $L'Z_n$ ont même distribution. Cet argument permet de montrer que

$p \mapsto \int_{\text{Sub}(G)} H(\xi_n^x) d\rho_p(x)$ est continue pour chaque valeur de n . On conclut car un infimum de fonctions continues est semi-continu supérieurement.

La semi-continuité inférieure découle d'une autre formule d'entropie, plus spécifique au cas du groupe libre et des IRS de Bowen [Bow14]. Celles-ci sont choisies de sorte que le graphe de Schreier soit presque sûrement un arbre décoré de boucles de longueur 1. Les critères d'identification permettent alors d'identifier explicitement (Z_p, λ_p) comme un fibré au dessus d'une partie de $\text{Sub}(G)$ dont les fibres sont les bords (ensemble des bouts) du graphe de Schreier $L_x \setminus F$ vu comme un arbre. On dispose alors d'une autre formule d'entropie en termes de divergence de Kullback-Leibler:

$$h_\mu(Z_p, \lambda_p) = h_\mu(Y, \nu) + \int_G \int_X D(\alpha_{x,g} || \alpha_{x,e}) \frac{dg\nu}{d\nu}(\pi(x)) d\eta_p(x) d\mu(g) \quad (4.1)$$

où $\alpha_{x,g} = (\zeta * g^{\mathbb{P}_\mu})_x$ et la divergence de Kullback-Leibler $D(\alpha || \beta) = \int_M \log \frac{d\alpha}{d\beta} d\alpha$ satisfait

$$D(\alpha || \beta) = \sup_n H_\alpha || \beta(\mathcal{P}_n) \quad \text{avec} \quad H_\alpha || \beta(\mathcal{P}) = \sum_{A \in \mathcal{P}} \alpha(A) \log \frac{\alpha(A)}{\beta(A)},$$

pour toute suite (\mathcal{P}_n) de partitions finies engendrant la σ -algèbre. Dans le cas du groupe libre, on prendra pour \mathcal{P}_n la partition du bord de l'arbre donné par les ombres des éléments de la sphère de rayon n . De ces formules compliquées, il faut surtout retenir qu'elles permettent d'exprimer l'entropie comme une intégrale d'un suprémum de fonctions qui ne dépendent que d'une boule finie du graphe de Schreier, donc continues. La semi-continuité supérieure en découle.

Remarque 4.7. *En détaillant proprement ces arguments, on peut montrer que le spectre entropique de F est un intervalle pour toute mesure d'entropie finie et de log-moment fini, voir théorème 1.10 [BZ23].*

Notons que l'on peut identifier le bord de Poisson de F au bord géométrique de son graphe de Cayley sans condition de moment depuis le travail de Chawla-Forghani-Frisch-Tiozzo [Cha+22], qui utilise notamment les temps pivots introduits par Gouëzel [Gou22]. Il est très vraisemblable que ce résultat puisse s'appliquer aussi dans le cas des fibrés de Poisson.

Pour traiter le cas de $SL(d, \mathbb{R})$, on considère Q et Q' deux sous-groupes paraboliques (triangulaires supérieurs) où Q' est obtenu à partir de Q en remplaçant un bloc diagonal de taille deux par les matrices triangulaires supérieures 2×2 . On a alors une application $p : Q \rightarrow SL(2\mathbb{R})$ qui consiste à ne garder que ce bloc de taille 2. On utilise le fait que $SL(2, \mathbb{R})$ contient un sous-groupe libre F comme réseau. Notons Ω_0 un domaine fondamental. On considère l'espace (G, μ) stationnaire

$$X = G/Q \times_\beta (\Omega_0 \times_\sigma \text{Sub}(F)) \quad \text{muni de la mesure} \quad \eta_p := \nu_Q \times m_{\Omega_0} \times \rho,$$

où ρ est un IRS de F . On a donc, si $x = (gQ, rF, L) \in X$ que $L_x = gp^{-1}(rLr^{-1})g^{-1}$. C'est un sous-groupe aléatoire stationnaire. On est bien dans le contexte des fibrés de Poisson standards avec $(Y, \nu) = (G/Q, \nu_Q)$.

Pour obtenir toutes les valeurs d'entropie entre $h_\mu(G/Q)$ et $h_\mu(G/Q')$, on utilise les IRS de Bowen $\rho = \rho_p$ pour $p \in [0, 1]$. À nouveau c'est le théorème des valeurs intermédiaires. La continuité se partage entre semi-continuité inférieure due à la formule générale du théorème 4.5 et semi-continuité supérieure par identification de Z_ρ avec le fibré des bords des arbres Schreier

$$Z_\rho \simeq G/Q \times_\beta \left(\Omega_0 \times_\sigma \bigcup_{\text{SubTree}(F)} \{L\} \times \partial(L \setminus F) \right)$$

et la formule (4.1).

4.3 Questions et perspectives

Ce travail sur les entropies de Furstenberg mène à plusieurs question, et avec Tianyi Zheng nous avons établi un programme d'étude.

Tout d'abord comme observé ci-dessus, le point clé pour obtenir réalisation complète pour $SL(2, \mathbb{R})$ réside dans l'existence d'un sous-groupe libre comme réseau. Ceci permet (travail en cours) d'obtenir réalisation complète pour les groupes agissant proprement sur des arbres. Le cas du groupe discret affine d'un arbre, étudié dans [BTZ21], présente une structure intéressante, puisqu'on obtient réalisation complète mais avec des constructions assez différentes sur des intervalles distincts.

Cette observation montre aussi que les résultats de réalisation pour $SL(d, \mathbb{R})$ sont aussi vrais pour $SL(d, \mathbb{Q}_p)$. On espère pouvoir étendre les résultats d'obstructions à n'importe quel corps, par exemple en adaptant les résultats de Bader-Boutonnet-Houdayer [BBH23]. Se poserait alors la question de réalisation pour $SL(d, \mathbb{C})$. Dans ce cas, il n'y a pas de sous-groupe libre comme réseau mais toutefois des groupes d'Artin à angles droits. Un projet est donc d'étendre les constructions d'IRS de Bowen aux groupes d'Artin à angles droits ou même plus généralement à des groupes agissant sur des complexes cubiques $CAT(0)$. Suite à des discussions avec Anthony Genevois, nous prévoyons d'encadrer ensemble un étudiant en thèse sur ce sujet.

Par delà la question du corps, on aimerait bien sûr décrire le spectre entropique pour d'autres groupes de Lie semi-simples. Les morphismes de paraboliques vers $SL(2, \mathbb{R})$ fournissent des intervalles de réalisation. Et les arguments de rang supérieurs à la Nevo-Zimmer fournissent des obstructions. Il reste toutefois des zones d'ombres importantes, notamment pour les groupes de rang 1 ayant la propriété (T), tel $Sp(n, 1)$.

La question des valeurs de l'entropie de Furstenberg des actions stationnaires admet un renforcement. Plutôt qu'un espace stationnaire quelconque, on peut déjà souhaiter avoir des μ -bord, c'est à dire des quotients du bord de Poisson, voir définition 2.4. Pour G semi-simple, ce sont les G/Q , et l'ensemble des valeurs est fini. Le cas des groupes de Baumslag-Solitar et de leurs produits a été étudié par Björklund-Hartman-Oppelmayer [BHO23], qui ont produit des exemples de groupes où ce spectre est un intervalle pour certaines mesures, un Cantor pour d'autres.

Il serait intéressant d'obtenir un tel renforcement pour les groupes libres. En fait dans

ce cas, on s'attend même à obtenir toutes les valeurs possibles d'entropie en considérant des quotients.

Conjecture 4.8. *Tout nombre réel positif est entropie asymptotique d'une marche aléatoire simple sur un groupe de type fini.*

BIBLIOGRAPHY

- [AAV13] G. Amir, O. Angel, and B. Virág. “Amenability of linear-activity automaton groups”. In: *J. Eur. Math. Soc.* 15.3 (2013), pp. 705–730.
- [AB22] G. Amir and G. Blachar. “A law of iterated logarithm on lamplighter diagonal products”. arXiv:2205.05553. 2022.
- [ADS09] G. Arzhantseva, C. Druţu, and M. Sapir. “Compression functions of uniform embeddings of groups into Hilbert and Banach spaces”. In: *J. Reine Angew. Math.* 633 (2009), pp. 213–235.
- [Ale72] S. V. Aleshin. “Finite automata and Burnside problem on periodic groups”. In: *Math. Notes* 11 (1972), pp. 319–328.
- [Ami17] G. Amir. “On the joint behaviour of speed and entropy of random walks on groups”. In: *Groups Geom. Dyn.* 11 (2017), pp. 455–467.
- [Aus11] T. Austin. “Amenable groups with very poor compression into Lebesgue spaces”. In: *Duke Math. J.* 159.2 (2011), pp. 187–222.
- [Aus16] T. Austin. “Integrable measure equivalence for groups of polynomial growth”. In: *Groups Geom. Dyn.* 10 (2016), pp. 117–154.
- [AV17] G. Amir and B. Virág. “Speed exponents of random walks on groups”. In: *Internat. Math. Res. Notices* 2017.9 (2017), pp. 2567–2598.
- [Bar01] L. Bartholdi. “Lower Bounds on The Growth of a Group Acting on the Binary Rooted Tree”. In: *Internat. J. Algebra Comput.* 11.1 (2001), pp. 73–88.
- [Bar03] L. Bartholdi. “A Wilson group of non-uniformly exponential growth”. In: *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 336.7 (2003), pp. 549–554.
- [Bar98] L. Bartholdi. “The growth of Grigorchuk’s torsion group”. In: *Internat. Math. Res. Notices* 20 (1998), pp. 1349–1356.
- [BB23a] T. Bénard and E. Breuillard. “Local limit theorems for random walks on nilpotent Lie groups”. arXiv:2304.14551. 2023.
- [BB23b] I. Benjamini and J. Brioussell. “Noise sensitivity of random walks on groups”. In: *ALEA, Lat. J. Probab. Math. Stat.* 20 (2023), pp. 1139–1164.
- [BBH23] U. Bader, R. Boutonnet, and C. Houdayer. “Charmenability of higher rank arithmetic groups”. In: *Annales Henri Lebesgue* 6 (2023), pp. 297–330.
- [BE12] L. Bartholdi and A. Erschler. “Growth of permutational extensions”. In: *Invent. Math.* 189.2 (2012), pp. 431–455.
- [BE14] L. Bartholdi and A. Erschler. “Groups of given intermediate word growth”. In: *Ann. Inst. Fourier* 64.5 (2014), pp. 2003–2036.
- [BE15] L. Bartholdi and A. Erschler. “Ordering the space of finitely generated groups”. In: *Ann. Inst. Fourier* 65.5 (2015), pp. 2091–2144.

- [Ben+15] A. Bendikov et al. “Brownian motion on treebolic space : escape to infinity”. In: *Revista Matemática Iberoamericana* 31.3 (2015), pp. 935–976.
- [Ben+17] I. Benjamini et al. “Minimal growth harmonic functions on lamplighter groups”. In: *New York J. Math.* 23 (2017), pp. 833–858.
- [BF14] U. Bader and A. Furman. “Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents”. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 71–96.
- [BFS13] U. Bader, A. Furman, and R. Sauer. “Integrable measure equivalence and rigidity of hyperbolic lattices”. In: *Invent. Math.* 194 (2013), pp. 313–379.
- [BG18] J. Brieussel and A. Gournay. “Connectedness of spheres in Cayley graphs”. In: *Algebra and Discrete Mathematics* 26 (2018), pp. 190–246.
- [BGK09] M. Barlow, A. Grigor’yan, and T. Kumagai. “Heat kernel upper bounds for jump processes and the first exit time”. In: *J. Reine Angew. Math.* 629 (2009), pp. 135–157.
- [BGM22] J. Brieussel, T. Godin, and B. Mohammadi. “Numerical upper bounds on growth of automata groups”. In: *International Journal of Algebra and Computation* 32.1 (2022), pp. 159–191.
- [BGT12] E. Breuillard, B. Green, and T. Tao. “The structure of approximate groups”. In: *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 116 (2012), pp. 115–221.
- [BHO23] M. Björklund, Y. Hartman, and H. Oppelmayr. “Random walks on dense subgroups of locally compact groups”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 376 (2023), pp. 7054–7085.
- [BKN10] L. Bartholdi, V. Kaimanovich, and V. Nekrashevych. “On amenability of automata groups”. In: *Duke Math. J.* 154.3 (2010), pp. 575–598.
- [BL94] W. Ballmann and F. Ledrappier. “The Poisson boundary for rank one manifolds and their cocompact lattices”. In: *Forum Math.* 6 (1994), pp. 301–313.
- [BNZ22] L. Bartholdi, V. Nekrashevych, and T. Zheng. “Growth of groups with linear Schreier graphs”. arXiv:2205.01792. 2022.
- [Bou12] J. Bourgain. “Finitely supported measures on $SL(2, R)$ that are absolutely continuous at infinity”. In: *Springer Lecture Notes* 2050 (2012), pp. 133–141.
- [Bou97] M. Bourdon. “Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow”. In: *Geom. Funct. Anal.* 7.2 (1997), pp. 245–263.
- [Bow14] L. Bowen. “Random walks on coset spaces with applications to Furstenberg entropy”. In: *Invent. Math.* 196.2 (2014), pp. 485–510.
- [BPS12] B. Barany, M. Pollicott, and K. Simon. “Stationary measures for projective transformations”. In: *Jour. Stat. Physics* 148 (2012), pp. 393–421.
- [BQ18] Y. Benoist and J.-F. Quint. “On the regularity of stationary measures”. In: *Israel J. Math.* 226 (2018), pp. 1–14.

- [Bri08] J. Brioussell. “Croissance et moyennabilité de certains groupes d’automorphismes d’arbres enracinés”. PhD thesis. Université Diderot Paris, 2008.
- [Bri09] J. Brioussell. “Amenability and non-uniform growth of some directed automorphism groups of a rooted tree”. In: *Mathematische Zeitschrift* 263.2 (2009), pp. 265–293.
- [Bri13] J. Brioussell. “Behaviors of entropy on finitely generated groups”. In: *Ann. Probab.* 41.6 (2013), pp. 4116–4161.
- [Bri14a] J. Brioussell. “Folner sets of alternate directed groups”. In: *Annales Institut Fourier* 64.3 (2014), pp. 1109–1130.
- [Bri14b] J. Brioussell. “Growth behaviors in the range e^{r^α} ”. In: *Afr. Mat.* 25.4 (2014), pp. 1143–1163.
- [Bri15] J. Brioussell. “About the speed of random walks on solvable groups”. arXiv:1505.03294. 2015.
- [Bri18] J. Brioussell. “An automata group of intermediate growth and exponential activity”. In: *Journal of Group Theory* 21.4 (2018), pp. 573–578.
- [BS01] L. Bartholdi and Z. Sunik. “On the Word and Period Growth of some Groups of Tree Automorphisms”. In: *Comm. Algebra* 29.11 (2001), pp. 4923–4964.
- [BS06] U. Bader and Y. Shalom. “Factor and normal subgroup theorems for lattices in products of groups”. In: *Inventiones mathematicae* 163.2 (2006), pp. 415–454.
- [BST12] I. Benjamini, O. Schramm, and A. Timar. “On the separation profile of infinite graphs”. In: *Groups Geom. Dyn.* 6.4 (2012), pp. 639–658.
- [BT15] J. Brioussell and R. Tanaka. “Discrete random walks on the group Sol”. In: *Israel J. Math.* 208.1 (2015), pp. 291–321.
- [BTZ21] J. Brioussell, R. Tanaka, and T. Zheng. “Random walks on the discrete affine group”. In: *Groups Geom. Dyn.* 15.3 (2021), pp. 935–963.
- [BW05] L. Bartholdi and W. Woess. “Spectral computations on lamplighter groups and Diestel-Leader graphs”. In: *J. Funct. Anal. Appl.* 11 (2005), pp. 175–202.
- [BZ19] J. Brioussell and T. Zheng. “Shalom’s property H_{FD} and extensions by \mathbb{Z} of locally finite groups”. In: *Israel J. Math.* 230.1 (2019), pp. 45–70.
- [BZ21] J. Brioussell and T. Zheng. “Speed of random walks, isoperimetry and compression of finitely generated groups”. In: *Ann. of Math. (2)* 193.1 (2021). arXiv:1510.08040, pp. 1–105.
- [BZ23] J. Brioussell and T. Zheng. “Furstenberg entropy spectra of stationary actions of semisimple Lie groups”. arxiv.org/abs/2307.01495. 2023.
- [CG97] Thierry Coulhon and Alexander Grigor’yan. “On-diagonal lower bounds for heat kernels and Markov chains”. In: *Duke Math. J.* 89.1 (1997), pp. 133–199.

- [Cha+22] K. Chawla et al. “The Poisson boundary for hyperbolic groups without moment conditions”. arXiv:2209.02114. 2022.
- [CKW94] D. I. Cartwright, V. A. Kaimanovich, and W. Woess. “Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees”. In: *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 44.4 (1994), pp. 1243–1288.
- [CM97] T. Colding and W. Minicozzi. “Harmonic functions on manifolds”. In: *Ann. of Math. (2)* 146.3 (1997), pp. 725–747.
- [Cor14] Y. Cornulier. “Groupes pleins-topologiques (d’après Matui, Juschenko, Monod...)”. In: *Astérisque* 361 (2014).
- [Cou96] T. Coulhon. “Ultracontractivity and Nash type inequalities”. In: *J. Funct. Anal.* 141.2 (1996), pp. 510–539.
- [CT05] S. Cleary and J. Taback. “Dead end words in lamplighter groups and other wreath products”. In: *Q. J. Math.* 56.2 (2005), pp. 165–178.
- [CT13] Yves Cornulier and Romain Tessera. “Dehn function and asymptotic cones of Abels’ group”. In: *J. Topology* 6.4 (2013), pp. 982–1008.
- [CTV08] Y. Cornulier, R. Tessera, and A. Valette. “Isometric group actions on Hilbert spaces: structure of orbits”. In: *Canad. J. Math.* 60.5 (2008), pp. 1001–1009.
- [Del+22] T. Delabie et al. “Quantitative measure equivalence between amenable groups”. In: *Annales Henri Lebesgue* 5 (2022), pp. 1417–1487.
- [Der80] Y. Derriennic. “Quelques applications du théorème ergodique sous-additif”. In: *Astérisque* 74 (1980), pp. 183–201.
- [Der85] Y. Derriennic. *Entropie, théorèmes limite et marches aléatoires*. Publications de l’Institut de Recherche Mathématique de Rennes. [Publications of the Rennes Institute of Mathematical Research]. Université de Rennes I, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Rennes, 1985, pp. i+44.
- [EFW07] A. Eskin, D. Fisher, and K. Whyte. “Quasi-isometries and rigidity of solvable groups”. In: *Pure and Applied Mathematics Quaterly* 3.4 (2007), pp. 927–947.
- [EFW12] A. Eskin, D. Fisher, and K. Whyte. “Coarse differentiation of quasi-isometries I : spaces not quasi-isometric to Cayley graphs”. In: *Ann. of Math. (2)* 176 (2012), pp. 221–260.
- [EFW13] A. Eskin, D. Fisher, and K. Whyte. “Coarse differentiation of quasi-isometries II : rigidity for lattices in Sol and lamplighter groups”. In: *Ann. of Math. (2)* 177 (2013), pp. 869–910.
- [EK13] A. Erschler and V. Kaimanovich. “Continuity of asymptotic characteristics for random walks on hyperbolic groups”. In: *Funktsional. Anal. i Prilozhen* 47 (2013), pp. 84–89.

- [EO18] A. Erschler and N. Ozawa. “Finite-dimensional representations constructed from random walks”. In: *Comment. Math. Helv.* 93.3 (2018). arXiv:1609.08585, pp. 555–586.
- [Erd39] P. Erdős. “On a family of symmetric Bernoulli convolutions”. In: *Amer. J. Math.* 61 (1939), pp. 974–976.
- [Ers01] A. (Dyubina) Erschler. “Characteristics of random walks on wreath products of groups”. In: *Journal of Mathematical Sciences* 107.5 (2001), pp. 4166–4171.
- [Ers03a] A. Erschler. “On drift and entropy growth for random walks on groups”. In: *Ann. Probab.* 31.3 (2003), pp. 1193–1204.
- [Ers03b] Anna Erschler. “On isoperimetric profiles of finitely generated groups”. In: *Geom. Dedicata* 100 (2003), pp. 157–171.
- [Ers04a] A. Erschler. “Boundary behavior for groups of subexponential growth”. In: *Annals of Mathematics* 160 (2004), pp. 1183–1210.
- [Ers04b] A. (Dyubina) Erschler. “On the asymptotics of drift”. In: *Journal of Mathematical Sciences* 121.3 (2004), pp. 2437–2440.
- [Ers06a] A. Erschler. “Isoperimetry for wreath products of Markov chains and multiplicity of selfintersections of random walks”. In: *Probab. Theory Relat. Fields* 136 (2006), pp. 560–586.
- [Ers06b] A. Erschler. “Piecewise automatic groups”. In: *Duke Math. J.* 134.3 (2006), pp. 591–613.
- [Ers11] A. Erschler. “Poisson-Furstenberg boundary of random walks on wreath products and free metabelian groups”. In: *Comment. Math. Helv.* 86 (2011), pp. 113–143.
- [Esc22] A. Escalier. “Sofic approximations and quantitative measure couplings”. arXiv:2205.12137. 2022.
- [Esc24] A. Escalier. “Building prescribed quantitative orbit equivalence with the integers”. In: *Groups Geom. Dyn.* DOI 10.4171/GGD/766 (2024).
- [EZ20a] A. Erschler and T. Zheng. “Growth of periodic Grigorchuk groups”. In: *Invent. Math.* 219 (2020), pp. 1069–1155.
- [EZ20b] A. Erschler and T. Zheng. “Isoperimetric inequalities, shapes of Folner sets and groups with Shalom’s property H_{FD} ”. In: *Ann. Inst. Fourier* 70.4 (2020), pp. 1363–1402.
- [Fer17] T. Fernós. “The Furstenberg-Poisson boundary and $CAT(0)$ cubre complexes”. In: *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2017), pp. 1–44.
- [Fer20] T. Ferragut. “Geodesics and Visual boundary of Horospherical Products”. arXiv:2009.04698. 2020.
- [Fer22] T. Ferragut. “Geometric rigidity of quasi-isometries in horospherical products”. arXiv:2211.04093. 2022.

- [FG10] Harry Furstenberg and Eli Glasner. “Stationary dynamical systems”. In: *Dynamical numbers – interplay between dynamical systems and number theory*. Ed. by RI Amer. Math. Soc. Providence. Contemp. Math., 2010, pp. 1–28.
- [FG91] J. Fabrykowski and N. Gupta. “On groups with sub-exponential growth functions II”. In: *J. Indian Math. Soc. (N.S)* 56 (1991), pp. 217–228.
- [FM99] B. Farb and L. Mosher. “Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups II”. In: *Invent. Math.* 137.3 (1999), pp. 613–649.
- [Fur02] A. Furman. “Random walks on groups and random transformations”. In: *Handbook of dynamical systems, Vol. 1a chap.12 Hasselblatt and Katok*. Ed. by North-Holland. 2002, pp. 931–1014.
- [Fur63a] H. Furstenberg. “A Poisson formula for semi-simple Lie groups”. In: *Ann. of Math. (2)* 77 (1963), pp. 335–386.
- [Fur63b] H. Furstenberg. “Noncommuting random products”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), pp. 377–428.
- [Fur67] H. Furstenberg. “Poisson boundaries and envelopes of discrete groups”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 73.3 (1967), pp. 350–356.
- [Fur71] H. Furstenberg. “Random walks and discrete subgroups of Lie groups”. In: *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*. Dekker, New York, 1971, pp. 1–63.
- [Gab11] D. Gaboriau. “Orbit equivalence and measured group theory”. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010)*. 2011, pp. 1501–1527.
- [Gap] GAP – *Groups, Algorithms, and Programming*. Version 4.7.7. <http://www.gap-system.org>. The GAP Group. 2015.
- [Gar62] A. Garsia. “Arithmetic properties of Bernoulli convolutions”. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 102 (1962), pp. 409–432.
- [GK04] E. Guentner and J. Kaminker. “Exactness and uniform embeddability of discrete groups”. In: *J. London Math. Soc. (2)* 70.3 (2004), pp. 703–718.
- [GL13] L. Gilch and F. Ledrappier. “Regularity of the drift and entropy of random walks on groups”. In: *Publ. Mat. Urug.* 14 (2013), pp. 147–158.
- [GLC23] A. Gournay and C. Le Coz. “Separation profile, isoperimetry, growth and compression”. In: *Annales de l’Institut Fourier* 73.4 (2023), pp. 1627–1675.
- [Gle51] A. Gleason. “The structure of locally compact groups”. In: *Duke Math. J.* 18 (1951), pp. 85–104.
- [GMM15] S. Gouëzel, F. Mathéus, and F. Maucourant. “Sharp lower bounds for the asymptotic entropy of symmetric random walks”. In: *Groups Geom. Dyn.* 9 (2015), pp. 711–735.

- [GMM18] S. Gouëzel, F. Mathéus, and F. Maucourant. “Entropy and drift in word hyperbolic groups”. In: *Invent. Math.* 211 (2018), pp. 1201–1255.
- [God] T. Godin. “Gap code and Fortran optimization”. <https://www.irif.fr/godin/research.html>.
- [Gou14] A. Gournay. “A remark on the connectedness of spheres in Cayley graphs”. In: *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.7-8 (2014), pp. 573–576.
- [Gou16] A. Gournay. “The Liouville property and Hilbertian compression”. In: *Ann. Inst. Fourier* 66.6 (2016), pp. 2435–2454.
- [Gou17] S. Gouëzel. “Analyticity of the entropy and the escape rate of random walks in hyperbolic groups”. In: *Discrete Analysis* (2017).
- [Gou18] A. Gournay. “Mixing, malnormal subgroups and cohomology in degree one”. In: *Groups Geom. Dyn.* 12.4 (2018), pp. 1371–1416.
- [Gou22] S. Gouëzel. “Exponential bounds for random walks on hyperbolic spaces without moment conditions”. In: *Tunisian Journal of Mathematics* 4.4 (2022), pp. 635–671.
- [GPS10] C. Garban, G. Pete, and O. Schramm. “The Fourier spectrum of critical percolation”. In: *Acta Math.* 205.1 (2010), pp. 19–104.
- [GR85] Y. Guivarc’h and A. Raugi. “Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence”. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 69.2 (1985), pp. 187–242.
- [Gra11] Robert M. Gray. *Entropy and information theory*. Springer, New York, 2011.
- [Gri14a] R. Grigorchuk. “Milnor’s problem on growth of groups and its consequences”. In: *Frontiers in complex dynamics*. Vol. 51. Princeton Math. Ser. Princeton Univ. Press, 2014, pp. 705–773.
- [Gri14b] R. Grigorchuk. “On the gap conjecture concerning group growth”. In: *Bull. Math. Sci.* 4 (2014), pp. 113–128.
- [Gri+22] R. Grigorchuk et al. “Subshifts with leading sequences, uniformity of cocycles and spectra of Schreier graphs”. In: *Advances in Mathematics* 407 (2022), p. 108550.
- [Gri80] R. Grigorchuk. “On Burnside’s problem on periodic groups”. In: *Funktsional. Anal. i Prilozhen* 14.1 (1980), pp. 53–54.
- [Gri83] R. I. Grigorchuk. “On the Milnor problem of group growth”. In: *Soviet Math. Dokl.* 28.1 (1983), pp. 23–26.
- [Gri85] R. I. Grigorchuk. “Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means”. In: *Math. USSR Izvestiya* 25.2 (1985), pp. 259–300.
- [Gri86] R. I. Grigorchuk. “On the growth degrees of p-groups and torsion-free groups”. In: *Math. USSR Sbornik* 54.1 (1986), pp. 185–205.

- [Gri91] R. Grigorchuk. “On growth in group theory”. In: *Proceedings of International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990*. Ed. by Math. Soc. Japan. 1991, pp. 325–338.
- [Gro03] M. Gromov. “Random walk in random groups”. In: *Geom. Funct. Anal.* 13.73-146 (2003).
- [Gro81] M. Gromov. “Groups of polynomial growth and expanding maps”. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 53 (1981), pp. 53–73.
- [GS14] C. Garban and J. Steiff. *Noise sensitivity of Boolean functions and percolation*. IMS Textbook series. Cambridge Univ. Press, 2014.
- [GT24] A. Genevois and R. Tessera. “Asymptotic geometry of lamplighters over one-ended groups”. In: *Invent. Math.* 238 (2024), pp. 1–67.
- [Gui72] A. Guichardet. “Sur la cohomologie des groupes topologiques. II”. In: *Bull. Sci. Math. (2)* 96 (1972), pp. 305–332. ISSN: 0007-4497.
- [Gui80] Y. Guivarc’h. “Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d’une marche aléatoire”. In: *Astérisque* 74.3 (1980), pp. 47–98.
- [GZ01] R. Grigorchuk and A. Zuk. “The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton”. In: *Geom. Dedic.* 87 (2001), pp. 207–244.
- [Har21] P. de la Harpe. “On the prehistory of growth of groups”. arXiv:2106.02499. 2021.
- [HK01] N. Higson and G. Kasparov. “E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space”. In: *Invent. Math.* 144 (2001), pp. 24–74.
- [HMT20] D. Hume, J. Mackay, and R. Tessera. “Poincaré profiles of groups and spaces”. In: *Rev. Mat. Iberoam.* 36.6 (2020), pp. 185–1886.
- [HMT22] D. Hume, J. Mackay, and R. Tessera. “Poincaré profiles of Lie groups and a coarse geometric dichotomy”. In: *Geom. Funct. Anal.* 32 (2022), pp. 1063–1133.
- [HSC93] W. Hebisch and L. Saloff-Coste. “Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups”. In: *Ann. Probab.* 21.2 (1993), pp. 673–709.
- [Hum17] D. Hume. “A continuum of expanders”. In: *Fund. Math.* 238.2 (2017), pp. 143–152.
- [HY18] Y. Hartman and A. Yadin. “Furstenberg entropy of intersectional invariant random subgroups”. In: *Compos. Math.* 154.10 (2018), pp. 2239–2265.
- [JK20] L. Jacoboni and P. Kropholler. “Soluble groups with no $Z \wr Z$ sections”. In: *Annales Henri Lebesgue* 3 (2020), pp. 981–998.
- [JM13] K. Juschenko and N. Monod. “Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups”. In: *Ann. of Math. (2)* 178.2 (2013), pp. 775–787.
- [JNS16] K. Juschenko, V. Nekrashevych, and M. de la Salle. “Extensions of amenable groups by recurrent groupoids”. In: *Invent. Math.* 206.3 (2016), pp. 837–867.

- [Jus+18] K. Juschenko et al. “Extensive amenability and an application to interval exchanges”. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 38.1 (2018), pp. 195–219.
- [Kai00] V. A. Kaimanovich. “The Poisson formula for groups with hyperbolic properties”. In: *Ann. of Math. (2)* 152.3 (2000), pp. 659–692.
- [Kai92] V. A. Kaimanovich. “Measure-theoretic boundaries of Markov chains, 0-2 laws and entropy”. In: *Harmonic analysis and discrete potential theory (Frascati, 1991)*. Plenum, New York, 1992, pp. 145–180.
- [Kai98] V. Kaimanovich. “Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees”. In: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 18.3 (1998), pp. 631–660.
- [Kal18] G. Kalai. “Three puzzles on mathematics, computation, and games”. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*. arXiv:1801.02602. 2018, pp. 551–606.
- [Kes59] H. Kesten. “Symmetric random walks on groups”. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 92.2 (1959), pp. 146–156.
- [Kle10] B. Kleiner. “A new proof of Gromov’s theorem on groups of polynomial growth”. In: *J. Amer. Math. Soc.* 23.3 (2010), pp. 815–829.
- [KLP11] V. Kaimanovich and V. Le Prince. “Matrix random products with singular harmonic measure”. In: *Geom. Dedic.* 150 (2011), pp. 257–279.
- [KP13] M. Kassabov and I. Pak. “Groups of oscillating intermediate growth”. In: *Ann. of Math. (2)* 177 (2013), pp. 1113–1145.
- [KS97] N. Korevaar and R. Schoen. “Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces”. In: *Comm. Anal. Geom.* 5.2 (1997), pp. 333–387.
- [KV15] M. Kotowski and B. Virag. “Non-Liouville groups with return probability exponent at most $1/2$ ”. In: *Electron. Commun. Probab.* 12 (2015).
- [KV83] V. Kaimanovich and A. Vershik. “Random walks on discrete groups: boundary and entropy”. In: *Ann. Probab.* 11.3 (1983), pp. 457–490.
- [KW07] A. Karlsson and W. Woess. “The Poisson boundary of lamplighter random walks on trees”. In: *Geom. Dedicata* 124 (2007), pp. 95–107.
- [LB21] A. Le Boudec. “Simple groups and irreducible lattices in wreath products”. In: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 41.5 (2021), pp. 1464–1501.
- [LBMB24] A. Le Boudec and N. Matte Bon. “Some torsion-free solvable groups with few subquotients”. In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 176.2 (2024), pp. 279–286.
- [LC20] C. Le Coz. “Poincaré profiles of lamplighter diagonal products”. arXiv:2007.04709. 2020.
- [Led01] F. Ledrappier. “Some asymptotic properties of random walks on free groups”. In: *CRM Proc. Lecture Notes*. Ed. by RI Amer. Math. Soc. Providence. Vol. 28. 2001, pp. 117–152.

- [Leo01] Y. G. Leonov. “On a lower bound for the growth of a 3-generator 2-group”. In: *Mat. Sb.* 192 (2001), pp. 77–92.
- [LNW08] F. Lehner, M. Neuhauser, and W. Woess. “On the spectrum of lamplighter groups and percolation clusters”. In: *Math. Ann.* 342 (2008), pp. 69–89.
- [LP07] V. Le Prince. “Dimensional properties of the harmonic measure for a random walk on a hyperbolic group”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 359.6 (2007), pp. 2881–2898.
- [LP08] V. Le Prince. “A relation between dimension of the harmonic measure, entropy and drift for a random walk on a hyperbolic space”. In: *Electron. Commun. Probab.* 13 (2008), pp. 45–53.
- [LP13] J. R. Lee and Y. Peres. “Harmonic maps on amenable groups and a diffusive lower bound for random walks”. In: *Ann. Probab.* 41.5 (2013), pp. 3392–3419.
- [LP21a] R. Lyons and Y. Peres. “Poisson boundaries of lamplighter groups: proof of the Kaimanovich-Vershik conjecture”. In: *J. Eur. Math. Soc.* 23 (2021), pp. 1133–1160.
- [LP21b] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Cambridge Univ. Press, New York, 2021.
- [Man12] A. Mann. *How groups grow*. Vol. 395. London mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge Univ. Press, 2012.
- [Mat06] H. Matui. “Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems”. In: *Internat. J. Math.* 17.2 (2006), pp. 231–251.
- [MB15] N. Matte Bon. “Topological full groups of minimal subshifts with subgroups of intermediate growth”. In: *J. Mod. Dyn.* 9 (2015), pp. 67–80.
- [Mil68a] J. Milnor. In: *Amer. Math. Monthly* 75 (1968), pp. 685–686.
- [Mil68b] J. Milnor. “Growth of finitely generated solvable groups”. In: *J. Differential Geom.* 2 (1968), pp. 447–449.
- [MN08] M. Mendel and A. Naor. “Metric cotype”. In: *Ann. of Math. (2)* 168.1 (2008), pp. 247–298.
- [Mok95] N. Mok. “Harmonic forms with values in locally constant Hilbert bundles”. In: *Proceedings of the conference in Honor of Jean-Pierre Kahane*. Ed. by Special Issue. 1995, pp. 433–453.
- [Mon13] N. Monod. “Groups of piecewise projective homoemorphisms”. In: *Proceedings of National Academy of Sciences of the U.S.A.* 110.12 (2013), pp. 4524–4527.
- [MP01] R. Muchnik and I. Pak. “On growth of Grigorchuk groups”. In: *Int. J. Algebra Comput.* 11 (2001), pp. 1–17.
- [MZ52] D. Montgomery and L. Zippin. “Small subgroups of finite dimensional groups”. In: *Annals of Mathematics* 56 (1952), pp. 213–241.

- [Nek09] V. Nekrashevych. “A groupe of non0-uniform exponential growth locally isomorphic to $\text{IMG}(z^2 + i)$ ”. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 362.1 (2009), pp. 389–398.
- [Nek18] V. Nekrashevych. “Palindromic subshifts and simple periodic groups of intermediate growth”. In: *Ann. of Math. (2)* 187.3 (2018), pp. 667–719.
- [Nev03] A. Nevo. “The spectral theory of amenable actions and invariants of discrete groups”. In: *Geom. Dedic.* 100 (2003), pp. 187–218.
- [Nev99] R. Nevo A.and Zimmer. “Homogenous projective factors for actions of semi-simple Lie groups”. In: *Invent. Math.* 138.2 (1999), pp. 229–252.
- [NS13] A. Nevo and M. Sageev. “The Poisson boundary of $CAT(0)$ cube complex groups”. In: *Groups Geom. Dyn.* 7 (2013), pp. 653–695.
- [NZ00] A. Nevo and R. Zimmer. “Rigidity of Furstenberg entropy for semi-simple Lie group actions”. In: *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* 33.3 (2000), pp. 321–343.
- [NZ02a] A. Nevo and R. Zimmer. “A generalization of the intermediate factors theorem”. In: *Journal d’Analyse Mathématique* 86.1 (2002), pp. 93–104.
- [NZ02b] A. Nevo and R. Zimmer. “A structure theorem for actions of semi-simple Lie groups”. In: *Ann. Math.* 156.2 (2002), pp. 565–594.
- [Ols81] A. Olshanskii. “An infinite group with subgroups of prime orders”. In: *Math. USSR Izv.* 16 (1981), pp. 279–289.
- [OW80] D. S. Ornstein and B. Weiss. “Ergodic theory of amenable group actions I: the Rohlin lemma”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 2 (1980), pp. 161–164.
- [Oza18] T. Ozawa. “A functional analysis proof of Gromov’s polynomial growth theorem”. In: *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 51.4 (2018), pp. 549–556.
- [Pit00] C. Pittet. “The isoperimetric profile of homogeneous riemannian manifolds”. In: *J. Differential Geom.* 54.255-302 (2000).
- [PSC00] C. Pittet and L. Saloff-Coste. “On the stability of the behavior of random walks on groups”. In: *J. Geom. Anal.* 10.4 (2000), pp. 713–737.
- [PSC02] C. Pittet and L. Saloff-Coste. “On random walks on wreath products”. In: *Ann. Probab.* 30.2 (2002), pp. 948–977.
- [RGY21] L. Ron-George and A. Yadin. “Full realization of ergodic IRS entropy in $SL(2, \mathbb{Z})$ and free groups”. arXiv:2106.10172. 2021.
- [Sav10] E. Sava. “A note on the Poisson boundary of lamplighter random walks”. In: *Monatshefte für Mathematik* 159.4 (2010), pp. 379–396.
- [SCZ18] L. Saloff-Coste and T. Zheng. “Isoperimetric profiles and random walks on some permutation wreath products”. In: *Revista Matemática Iberoamericana* 34.2 (2018), pp. 481–540.
- [Sel20] D. Sell. “Combinatorics of one-dimensional simple Toeplitz subshifts”. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 40.6 (2020), pp. 1673–1714.

- [Sha00] Y. Shalom. “Rigidity of commensurators and irreducible lattices”. In: *Invent. Math.* 141 (2000), pp. 1–54.
- [Sha04] Y. Shalom. “Harmonic analysis, cohomology, and the large-scale geometry of amenable groups”. In: *Acta. Math.* 192 (2004), pp. 119–185.
- [Sid00] S. Sidki. “Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity”. In: *J. Math. Sci.* 100.1 (2000), pp. 1925–1943.
- [ST10] Y. Shalom and T. Tao. “A finitary version of Gromov’s polynomial growth theorem 2010”. In: *Geom. Funct. Anal.* 20 (2010), pp. 1502–1547.
- [Sva55] A. Svarc. “A volume invariant of coverings”. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 105 (1955), pp. 32–34.
- [Tan19] R. Tanaka. “Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces”. In: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 39 (2019), pp. 474–499.
- [Tan24] R. Tanaka. “Noise sensitivity and stability on groups”. arXiv:2403.01658. 2024.
- [Tes11] R. Tessera. “Asymptotic isoperimetry on groups and uniform embeddings into Banach spaces”. In: *Comment. Math. Helv.* 86.3 (2011), pp. 499–535.
- [Tro98] M. Troyanov. “L’horizon de SOL”. In: *Exposition. Math.* 16 (1998), pp. 441–479.
- [Var87] N. Varopoulos. “Convolution powers on locally compact groups”. In: *Bull. Sci. Math. (2)* 111.4 (1987), pp. 333–342.
- [Var91] N. Varopoulos. “Groups of superpolynomial growth”. In: *Proceedings of the Kyoto ICM Satellite Conference on Harmonic Analysis*. Ed. by Springer. 1991, pp. 194–200.
- [Ver82] A. Vershik. “Amenability and approximation of infinite groups (Translated from the appendix to the translation of the book of Greenleaf. Countable groups close to finite ones, (1973))”. In: *Selecta Math. Soviet.* 2.4 (1982), pp. 311–330.
- [VSCC92] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [Wil04a] J. Wilson. “Further groups that do not have uniformly exponential growth”. In: *J. Algebra* 279 (2004), pp. 292–301.
- [Wil04b] J. Wilson. “On exponential growth and uniformly exponential growth for groups”. In: *Invent. Math.* 155 (2004), pp. 287–303.
- [Wil05] J. Wilson. “On the growth of residually soluble groups”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 71.1 (2005), pp. 121–132.
- [Wil11] J. Wilson. “The gap in the growth of residually soluble groups”. In: *Bull. Lond. Math. Soc.* 43.3 (2011), pp. 576–582.
- [Woe00] W. Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*. Ed. by Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 138. Cambridge Univ. Press, 2000.

- [Woe13] W. Woess. “What is a horocyclic product, and how is it related to lamplighters ?” In: *Internationale Mathematische Nachrichten* 224 (2013), pp. 1–27.
- [Woe89] W. Woess. “Boundaries of random walks on graphs and groups with infinitely many ends”. In: *Israel J. Math.* 68 (1989), pp. 271–301.
- [Woe93] W. Woess. “Fixed sets and free subgroups of groups acting on metric spaces”. In: *Math. Z.* 214 (1993), pp. 425–439.
- [Yam53] H. Yamabe. “A generalization of a theorem of Gleason”. In: *Annals of Mathematics* 58 (1953), pp. 351–365.
- [Yu00] G. Yu. “The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space”. In: *Invent. Math.* 139 (2000), pp. 201–240.