Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM2)
(Méthodes Numériques)
15 mars 2005

Contrôle Continu

Durée: 2 heures

Exercice 1

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de partie réelle $3x^2y - y^3$. Déterminer la partie imaginaire de $f(z)$.

2. Peut-on trouver une fonction holomorphe de partie réelle xy^2? Justifier.

Exercice 2

Déterminer à l'aide de la formule de Cauchy la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^z \mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$$

dans les cas suivants.
a) C est un cercle de centre -1 et de rayon R, avec $0 < R < 1$.
b) C est un cercle de centre -1 et de rayon R, avec $1 < R < 2$.
c) C est un cercle de centre 1 et de rayon R, avec $0 < R < 1$.
d) C est un cercle de centre -1 et de rayon R, avec $R > 2$. (Indication : faire un dessin... on pourra introduire un chemin constitué d'un segment vertical situé sur la droite $x = \frac{1}{2}$.)

Exercice 3

On se propose d'étudier la couche limite d'un fluide parfait au voisinage d'une paroi représentée par le plan $x = 0$ dans le système de coordonnées cartésiennes $(0, x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$. Si la couche limite est mince, on peut faire les approximations suivantes.

- La diffusion suivant la direction x est négligeable par rapport à la diffusion suivant la direction y.

- Le champ de pression est donné par la théorie des écoulements irrotationnels, de sorte qu'on le considérera comme une donnée du problème. Dans le cas qui nous intéresse, la couche limite sera supposée suffisamment mince pour que ce champ de pression ne dépende pas de y.

- On dispose d'une estimation a priori du coefficient de frottement superficiel le long de la paroi, soit

$$C_f(x) \equiv \frac{2\tau(x)}{\rho U(x)^2}, \quad U(x) \equiv \lim_{y\to+\infty} u(x,y), \quad \tau(x) \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$$

  où $\rho > 0$ et $\mu > 0$ sont des constantes physiques caractéristiques de l'écoulement.

Pour évaluer l'épaisseur de la couche limite, on introduit les quantités suivantes:

- l'épaisseur de déplacement

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy,$$

- l'épaisseur de moment cinétique:

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy.$$

On note $\delta(x)$ la distance à la paroi d'un point situé hors de la couche limite: dans la suite, on cherchera à évaluer $\delta(x)$ en fonction de x pour que les intégrales ci-dessus puissent être remplacées avec une bonne approximation par des intégrales sur l'intervalle $[0, \delta(x)]$. Dans tout le problème, on suppose que $u(x,y)$ vérifie les conditions au bord:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,\delta) = U,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\delta) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = 0.$$

1. Soit $\delta > 0$ et soit $f(y)$ une fonction de classe C^4 sur $[0, \delta]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f(y)$ de degré au plus 3 vérifiant:
$$P_f(0) = f(0), \quad P_f(\delta) = f(\delta),$$
$$P_f'(\delta) = f'(\delta), \quad P_f''(0) = f''(0).$$

2. On admet que pour tout $y \in [0, \delta]$, il existe $\xi_y \in]0, \delta[$ tel que:
$$f(y) - P_f(y) = \frac{y^2(\delta - y)^2}{4!} f^{(4)}(\xi_y).$$
En déduire une majoration de $|f(y) - P_f(y)|$ en fonction de δ et de
$$M_4 = \sup_{y \in [0,\delta]} |f^{(4)}(y)|.$$

3. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(\delta) = f''(0) = 0$. Montrer que
$$P_f(y) = f(\delta) \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right)$$

4. En déduire que pour tout x l'application $y \mapsto \dfrac{u(x,y)}{U(x)}$ peut être approchée par un polynôme $P_x(y)$ avec une erreur que l'on exprimera en fonction de $\delta(x)$, $U(x)$ et de la dérivée partielle
$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}.$$

5. Exprimer en fonction de $U(x)$ et $\delta(x)$ les quantités:
$$\delta_1^*(x) = \int_0^{\delta(x)} (1 - P_x(y)) dy,$$
$$\delta_2^*(x) = \int_0^{\delta(x)} P_x(y)(1 - P_x(y)) dy.$$

6. On se place désormais dans le cas d'une plaque plane (couche limite de Blasius) pour laquelle U est une constante indépendante de x. La théorie montre alors que:

$$\frac{u(x,y)}{U} = g(\eta(x)), \quad \eta \equiv \frac{y}{\delta(x)}.$$

avec

$$|g(\eta) - 1| \leq \frac{C}{\eta} e^{-\eta^2/4}, \quad \forall \eta > 0.$$

Montrer qu'il existe des constantes $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ telles que:

$$|\delta_1(x) - \delta_1^*(x)| \leq C_0 \delta(x), \quad |\delta_2(x) - \delta_2^*(x)| \leq C_1 \delta(x).$$

7. On rappelle que le coefficient de friction est donné par:

$$C_f(x) = \frac{2\tau(x)}{\rho U^2}, \quad \tau(x) \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0).$$

On vérifie alors que:

$$\frac{\tau(x)}{\rho} \equiv \frac{d}{dx} \int_0^\infty (U - u(x,y)) u(x,y) dy.$$

Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que: $\delta(x) = A\sqrt{x}$.

8. Exprimer $C_f(x)$ en fonction de $\delta_2(x)$ et x.

9. On définit la quantité approchée $C_f^*(x)$ en posant:

$$C_f^*(x) = \frac{2}{U^2} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (U - u(x,y)) u(x,y) dy.$$

Exprimer $C_f^*(x)$ en fonction de $\delta_2^*(x)$ et x. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$|C_f^*(x) - C_f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$$