Feuille de TD : intégrales multiples
Licence de Mécanique
Novembre 2004 - Université de Rennes 1

Exercice 1

Soient u et v deux fonctions du plan $\mathbf{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues. Soit S une région du plan sans trou de frontière notée ∂S. Montrer que

$$\int_{\partial S}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]=2\iint_S\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)dxdy.$$

Exercice 2

1. Le moment d'inertie d'une feuille métallique plane de densité de masse uniforme (masse par unité de surface) σ par rapport à l'axe Ox est donné par
$$I_x=\sigma\iint_S y^2dxdy.$$
Montrer que
$$I_x=\sigma\int_{\partial S}xy^2dy$$
où l'on suppose que ∂S est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est:
$$I_y=\sigma\iint_S x^2dxdy.$$
Trouver deux formes différentielles distinctes ω, τ telles que
$$I_y=\sigma\int_{\partial S}\omega=\sigma\int_{\partial S}\tau.$$

3. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est:
$$I_z=\sigma\iint_S(x^2+y^2)dxdy=I_x+I_y.$$

Déterminer une forme différentielle $\Omega = \Omega(x, y)$ telle que

$$I_z = \sigma \int_{\partial S} \Omega.$$

Exprimer Ω en coordonnées polaires (r, θ).