UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

FLMA607 Calcul Formel – 2009–2010

Contrôle continu du 17 mars 2010.

Durée : 1h30. Justifiez vos réponses. Tous les documents, la calculatrice et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

Dans l'anneau $A = \mathbb{F}_{13}[x]/(x^3 + 6x + 7)$, les éléments suivants sont-ils inversibles ? Le cas échéant, calculer leurs inverses.

$$x + 10,\ \ x^2 + 7$$

Exercice 2

On calcule le pgcd de deux polynômes A et B de $\mathbb{Q}[X]$ ainsi qu'une relation de Bezout par l'algorithme d'Euclide vu en cours. On note R_i, U_i et V_i les polynômes obtenus à l'étape i. Calculer $\deg U_i$ et $\deg V_i$ en fonction de $\deg A$, $\deg B$ et $\deg R_{i-1}$. En déduire que les polynômes U et V de la relation de Bezout $\mathrm{pgcd}\,(A, B) = AU + BV$ que fournit cet algorithme vérifient :

$$\begin{aligned} \deg U &< \deg B - \deg(\mathrm{pgcd}\,(A, B)) \\ \deg V &< \deg A - \deg(\mathrm{pgcd}\,(A, B)) \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit x un entier compris entre 0 et $2^{64} - 1$. On travaille avec un processeur 64 bits si bien que l'entier x peut être représenté sur un seul mot-machine. On désire calculer x^n pour de grandes valeurs de n. On suppose dans un premier temps que les multiplications sont effectuées par l'algorithme naïf (celui de l'école primaire).

1) Majorer le nombre de mots-machine nécessaires pour écrire x^k ($k \in \mathbb{N}$).

2) En déduire une majoration du nombre de multiplications élémentaires (c'est-à-dire, de multiplications entre deux mots-machine) effectuées si l'on calcule x^n par l'algorithme d'exponentiation naïf $x^n = x \times x \times x \cdots \times x$.

3) Pour $n = 2^p$, estimer de même le coût du calcul de x^n en nombre de multiplications élémentaires, si l'on calcule x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide. Comparer avec le résultat de la question 2.

4) Reprendre la question 3 en supposant maintenant que les multiplications sont effectuées par l'algorithme de Karatsuba.

5) Dans la situation de la question 2, quel est le gain si l'on utilise l'algorithme de Karatsuba au lieu de la multiplication naïve ?

Exercice 4

Redémontrer le théorème d'interpolation de Lagrange en utilisant le théorème chinois.