FLMA607 Calcul Formel – 2009–2010

Examen 1ère session (4 mai 2010)

Durée : 2h00. Justifiez toutes vos réponses. Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 (4 points)

On considère les deux courbes planes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x,y) = 0$ (resp. $f_2(x,y) = 0$) où

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= x^2 - xy + y^2 - 1 \\ f_2(x,y) &= 2x^2 + y^2 - y - 2 \end{cases}$$

1) Rappeler l'énoncé du théorème d'élimination.
2) On note $R(y)$ le polynôme $\mathrm{Res}_x(f_1, f_2)$. Montrer que si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, alors $R(y_0) = 0$.
3) Calculer $R(y)$.
4) Résoudre l'équation $R(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$.
5) En déduire $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Exercice 2 (5 points)

On souhaite résoudre le problème chinois suivant : trouver l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{F}_{11}[x]$ tels que

$$\begin{cases} P \equiv 1 \mod x^2 + x + 1 \\ P \equiv 4 \mod x^2 - x + 1 \end{cases} . \qquad (*)$$

1) Montrer que les polynômes $f_1 = x^2 + x + 1$ et $f_2 = x^2 - x + 1$ sont premiers entre eux.
2) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{F}_{11}[x]$ de degré inférieur ou égal à 3 solution du système (*) et que l'ensemble des solutions est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $P_0 + (x^4 + x^2 + 1)S$ où S parcourt $\mathbb{F}_{11}[x]$.
3) Trouver des polynômes U et $V \in \mathbb{F}_{11}[x]$ tels que $Uf_1 + Vf_2 = 1$.
4) Donner une suite d'instructions Maple qui aurait permis de calculer U et V.
5) Calculer P_0.

Exercice 3 (8 points)

On cherche à factoriser le polynôme $f = x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x + 12$ dans $\mathbb{Z}[x]$. On admet que les coefficients des facteurs irréductibles de f sont tous majorés par 5 en valeur absolue. On notera $\overline{f} \in \mathbb{F}_{11}[x]$ la réduction de f modulo 11. On pourra utiliser les relations suivantes (les égalités polynomiales ont lieu dans $\mathbb{F}_{11}[x]$) :

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \mathrm{Res}\,(f, f') = 2^5.3.5.17^2 \\ x^{11} &\equiv 10x^3 + 9x^2 + 9x \mod \overline{f} \\ x^{22} &\equiv 10x^3 + 10x^2 + 8x \mod \overline{f} \\ x^{33} &\equiv 4x^3 + 6x^2 + 9x \mod \overline{f} \\ (x^2 - x + 9)^5 &\equiv 9x^3 + 4x^2 + x + 9 \mod \overline{f} \\ \overline{f} &= (5x + 4)(9x^3 + 4x^2 + x + 9) + 6x^2 + 9 \end{aligned}$$

1) Écrire la matrice qui permet de calculer $\Delta(f)$.
2) On pose $p = 11$ et on décide de commencer par factoriser l'image $\overline{f}$ de f dans $\mathbb{F}_p[x]$. Expliquer ce choix de p. Parmi les entiers de 1 à 20, lesquels aurait-on pu choisir ?
3) Calculer la matrice de l'application linéaire

$$L \colon \begin{cases} \mathbb{F}_p[x]/(f) \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]/(f) \\ \quad G \quad \longmapsto G^p - G \end{cases}$$

dans la base $1, x, x^2, x^3$.
4) Donner une base de la sous-algèbre de Berlekamp $\mathcal{B} \subset \mathbb{F}_p[x]/(f)$. Combien $\overline{f}$ a-t-il de facteurs irréductibles ?
5) En utilisant l'algorithme de Berlekamp, factoriser complètement $\overline{f}$ dans $\mathbb{F}_p[x]$. (On pensera à utiliser les relations données ci-dessus pour alléger les calculs.)
6) En déduire la factorisation de f dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 4 (3 points)

Écrire une procédure Maple `Estula` qui prend en entrée un entier $x \geq 0$, un entier $c \geq 0$, un entier $b \geq 2$ et qui retourne `true` si le nombre c apparaît dans la liste des coefficients du développement de x en base b, `false` sinon.