FLMA607 Calcul Formel – 2009–2010

Contrôle continu numéro 1 (23 février 2011)

Durée : 1h30. Justifiez toutes vos réponses. Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 (5 points)

Soit $f(X) = 4X^5 + 2X + 3 \in \mathbb{F}_7[X]$. Combien y a-t-il de polynômes dans $\mathbb{F}_7[X]$ de degré exactement 7 qui définissent la même fonction polynomiale que f sur $\mathbb{F}_7$? Combien y en a-t-il de degré exactement 2011 ? Et de degré exactement 6 ?

Exercice 2 (2 points)

Étant donné les parties imaginaires et réelles a, b, c, d de deux nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ (avec $z_2 \neq 0$) montrer comment calculer les parties imaginaire et réelle du quotient $z_1/z_2 \in \mathbb{C}$ en utilisant au plus sept multiplications et divisions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (9 points)

Cet exercice présente une variante de l'algorithme de Karatsuba. Soit K un corps, et soient F, $G \in K[X]$ deux polynômes. On cherche à multiplier F et G. Pour cela, on va essayer de « couper » les polynômes, non pas en *deux* morceaux comme dans l'algorithme de Karatsuba, mais en *trois* morceaux.

1) On suppose que F et G sont de degrés strictement inférieurs à $3n$. On note $F = \sum_{i=0}^{3n-1} f_i X^i$ et $G = \sum_{i=0}^{3n-1} g_i X^i$. Montrer qu'il existe des polynômes F_0, F_1, F_2 et G_0, G_1, G_2 de degrés strictement inférieurs à n tels que

$$F = F_0 + F_1 X^n + F_2 X^{2n} \quad \text{et} \quad G = G_0 + G_1 X^n + G_2 X^{2n}.$$

2) On a alors $FG = H_0 + H_1 X^n + H_2 X^{2n} + H_3 X^{3n} + H_4 X^{4n}$ avec

$$H_i = \sum_{j=0}^{i} F_j G_{i-j} \ .$$

Trouver une façon de calculer $H_0, \ldots, H_4$ en faisant au plus six multiplications de polynômes de degrés strictements inférieurs à n.

3) Utiliser cette méthode pour construire un algorithme récursif « à la Karatsuba » pour calculer le produit de deux polynômes de degrés $< 3^k$.

4) En utilisant cet algorithme, combien doit-on faire de multiplications dans le corps K pour calculer le produit de deux polynômes de degrés $< 3^k$?

5) En déduire un réel α (que l'on explicitera) tel que le produit de deux polynômes de degré $< n$ se calcule en $O(n^\alpha)$ opérations (on négligera les additions et les soustractions).

6) Comparer avec l'algorithme de Karatsuba. (On donne $\frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,59$ et $\frac{\ln 6}{\ln 3} \simeq 1,63$.)

Exercice 4 (4 points)

Soient $b_1, b_2, \ldots$ des entiers ≥ 2. Pour $n \geq 1$, on pose $B_n = b_1 \ldots b_n$.

1) Démontrer que tout entier naturel x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_0 + x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots$$

avec pour tout i les inégalités $0 \leq x_i < b_{i+1}$.

2) Proposer un algorithme de calcul des entiers x_i (en langage papier).