FLMA607 Calcul Formel – 2010–2011

Contrôle continu numéro 2 (30 mars 2011)

Durée : 1h30. Justifiez toutes vos réponses. Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Si A et B sont deux

Exercice 1 (4 points)

1) On considère l'anneau $A = \mathbb{F}_7[x]/(x^3+x+1)$. La classe du polynôme $x+3$ est-elle inversible dans A ? Si oui, calculer son inverse.
2) Résoudre dans $\mathbb{F}_7[x]$ le système de congruences :

$$\begin{cases} P \equiv x^2+1 \bmod x^3+x+1 \\ \\ P \equiv 3 \bmod x+3. \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points)

On considère les deux courbes planes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x,y)=0$ (resp. $f_2(x,y)=0$) où

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= x^2-y^2 \\ f_2(x,y) &= x^3-3y^2(y+3) \end{cases}$$

1) Rappeler l'énoncé du théorème d'élimination.
2) On note $R(y)$ le polynôme $\mathrm{Res}_x(f_1,f_2)$. Montrer que si $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, alors $R(y_0)=0$.
3) Calculer $R(y)$.
4) Résoudre l'équation $R(y)=0$, $y \in \mathbb{R}$.
5) En déduire $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Exercice 3 (4 points)

Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme non nul à coefficients dans K. On note n son degré, a son coefficient dominant et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines (éventuellement, les racines ne sont pas dans K mais dans un corps plus grand). On peut donc écrire

$$P = a\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i).$$

On notera qu'il peut y avoir des répétitions dans les α_i.
1) Pour un indice i fixé, calculer $P'(\alpha_i)$.
2) En déduire la formule

$$\mathrm{Res}\,(P,P') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{2n-1} \prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\,.$$

3) Retrouver avec cette formule le fait que le discriminant d'un polynôme P est nul si et seulement si P a une racine multiple.

Exercice 4 (7 points)

Soit K un corps. et Q un polynôme à coefficients dans K.

1) Pour $P \in K[X]$ non nul, montrer que la K-algèbre $A_P := K[X]/(P)$ est de dimension finie sur K. Préciser la dimension et expliciter une base.
2) Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients dans K. Montrer que la multiplication par Q définit une application K-linéaire de A_P dans A_P. On notera μ_Q cette application.
Définition : *Si P et Q sont deux polynômes non nuls à coefficients dans K, de degrés respectifs α et β, et de coefficients dominants p_α et q_β, on pose*

$$T(P,Q) = p_\alpha^\beta \det(\mu_Q).$$

Les questions ci-dessous sont indépendantes les unes des autres.
3) Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, montrer que $T(P,Q) = 0$.
4) Si P et Q sont premiers entre eux, montrer que $T(P,Q)$ est non nul. (On pourra utiliser une relation de Bezout, et montrer que μ_Q est inversible.)
5) Si $Q = Q_1P + R$ est la division euclidienne de Q par P, montrer que $T(P,Q) = p_\alpha^{\beta - \deg R} T(P,R)$.
6) Le but de cette question est de montrer que le résultant de P et Q est égal à $T(P,Q)$. On considère les applications linéaires suivantes :

$$\varphi\colon \begin{cases} K_{\beta-1}[X] \times K_{\alpha-1}[X] \longrightarrow K_{\alpha+\beta-1}[X] \\ \qquad (U,V) \qquad\quad \longmapsto PU + VQ \end{cases}$$

$$Div\colon \begin{cases} K_{\alpha+\beta-1}[X] \longrightarrow K_{\beta-1}[X] \times K_{\alpha-1}[X] \\ \qquad F \qquad \longmapsto (A,B) \end{cases}$$

où $F = AP + B$ est la division euclidienne de F par P.

a) Montrer que $Div \circ \varphi(U,0) = (U,0)$ pour tout $U \in K_{\beta-1}[X]$.

b) Si $V \in K_{\alpha-1}[X]$, que vaut la deuxième composante de $Div \circ \varphi(0,V)$?

c) Pour $K_l[X]$, on choisit la base $(X^l, \dots, X, 1)$ (pour $l \in \{\alpha-1, \beta-1, \alpha+\beta-1\}$). Montrer que dans ces bases, le déterminant de $Div \circ \varphi$ est égal à $\det(\mu_Q)$.

d) Montrer que dans ces bases, le déterminant de Div vaut $p_\alpha^{-\beta}$.

e) Que vaut le déterminant de φ (toujours dans ces bases) ?

f) Conclure.