Calcul différentiel.

Exercice 1

Calculer quand elles existent les dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}$, des fonctions :
a) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
b) $f(x,y) = x^3 + \dfrac{x}{y}$;
c) $f(x,y) = x \ln y$;
d) $f(x,y) = e^{xy}$;
e) $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 2

Calculer quand elle existe la différentielle des applications suivantes :

a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2} \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \S_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^t A \end{array}$

d) $\begin{array}{rcl} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^p \end{array}$

Exercice 3

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $(a,b) \neq (0,0)$. Montrer que f vérifie $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(x,y) = c(bx - ay)$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0); \;\; f(0,0) = 0.$$

1) a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\; f(x,y) = (x-y)\left(1 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

b) En utilisant l'inégalité classique $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\; |f(x,y)| \leq \frac{3}{2}|x-y|.$$

En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f admet des dérivées en $(0,0)$ suivant les directions $(0,1)$ et $(1,0)$ que l'on calculera.
3) On note $\Delta(x,y) = f(x,y) - x + y$. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Calculer

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{\Delta(x, tx)}{|x| + |tx|}.$$

En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
1) Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de (x_0,y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{R}$, et une fonction $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 tels que

$$\varphi(x_0,y_0) = z_0 \text{ et } \forall (x,y,z) \in U \times V \quad (f(x,y,z) = 0 \text{ ssi } z = \varphi(x,y)).$$

2) Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ pour $(x,y) \in U$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Sous une condition que l'on explicitera, la relation $y - zx = f(z)$ définit localement z comme fonction implicite de (x,y). Montrer qu'on a alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Exercice 7

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin y + xy^4 + x^2$.
a) Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x,y) = 0$.
b) Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.

Exercice 8

a) Chercher les points réalisant les conditions d'extremum du premier ordre pour les fonctions
(i) $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$;
(ii) $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + y$.
Pour chaque point trouvé, préciser s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un "col".
b) Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = xe^y + ye^x$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Étudier les extrema relatifs puis les extrema absolus de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Exercice 10

Pour chacune des fonctions f de l'exercice 1, déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f en un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ (quand il est bien défini).

Exercice 11

On considère la fonction F_i de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous et la surface Σ_i d'équation $F_i(x,y,z) = 0$. Écrire les équations de la normale à Σ_i au point a_i indiqué. En déduire le plan tangent en ce même point.
a) $F_1(x,y,z) = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \qquad a1 = (0,-1,1)$;
b) $F_2(x,y,z) = 3e^{xyz} + x + y + z - 3 \qquad a2 = (0,0,0)$;
c) $F_3(x,y,z) = \sin xy - \cos yz \qquad a3 = \left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$.