Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – 2$^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MA 213 : Théorie des groupes pour la chimie

Feuille de TD n°3 : Groupes.

Exercice 1

Soit G un groupe dans lequel tout élément x vérifie $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif. *Indication :* il faut montrer que deux éléments quelconques x et y commutent. On calculera leurs inverses, et on calculera le carré $(xy)^2$.

Exercice 2

1) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et B^{-1}.
2) Calculer le produit AB puis calculer son inverse. Calculer BA. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est-il commutatif ?
3) Vérifier que $B^{-1}A^{-1}$ est égal à $(AB)^{-1}$. Aurait-on pu le voir sans calculer $(AB)^{-1}$?
4) Plus généralement, dans un groupe G, montrer que l'inverse de ab est $b^{-1}a^{-1}$.

Exercice 3

Montrer qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'un seul groupe d'ordre 2 (on regardera sa table de multiplication). Même question pour les groupes d'ordre 3.

Exercice 4

Donner les tables de multiplication possibles pour un groupe d'ordre 4. Combien en existe-t-il (à isomorphisme près) ?

Exercice 5

Même question avec les groupes d'ordre 5 et 6.

Exercice 6

Le groupe des permutations de trois lettres a, b et c compte $3! = 6$ éléments que l'on peut décrire ainsi : $x_1 = (a, b, c)$, $x_2 = (a, c, b)$, $x_3 = (b, a, c)$, $x_4 = (b, c, a)$, $x_5 = (c, b, a)$, $x_6 = (c, a, b)$. Calculer le produit $x_i x_j$ signifie appliquer d'abord la permutation x_j, puis la permutation x_i (comme pour des fonctions...). Par exemple pour calculer $x_2 x_3$ on applique x_2 à (b, a, c), or appliquer x_2 c'est permuter les deux dernières lettres, donc on obtient $x_2 x_3 = (b, c, a) = x_4$. Donner la table de multiplication complète de ce groupe. À quel groupe est-il isomorphe parmi ceux que l'on a rencontrés dans l'exercice précédent ?

Exercice 7

Constater, dans les tables de multiplication ci-dessus, ou dans celles rencontrées dans d'autres exercices, que chaque élément du groupe apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. Démontrer plus généralement que, si G est un groupe, alors chaque élément de G apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne de la table de multiplication de G. *Indication :* Il suffit de montrer que pour chaque élément x de G, les applications $y \mapsto xy$ et $y \mapsto yx$ sont bijectives.

Exercice 8

Donner tous les « éléments de symétrie » (plan de symétrie, axe de rotation...) de la molécule d'ammoniac NH_3.

Exercice 9

Donner tous les « éléments de symétrie » (plan de symétrie, axe de rotation...) de la molécule de benzène C_6H_6.

Exercice 10

1) Faire la liste des éléments du groupe des isométries de la molécule d'ammoniac (on notera C_3 l'une des rotations, et σ_1, σ_2, σ_3 les symétries).
2) Numéroter les atomes d'hydrogène, puis dessiner l'effet de chaque isométrie sur la molécule.
3) Dessiner les transformations subies par la molécule d'ammoniac lorsqu'on lui applique d'abord la rotation C_3 puis la symétrie σ_1. Quelle est la transformation globale ainsi appliquée.

Exercice 11

1) Dresser la table de multiplication du groupe des isométries de la molécule d'ammoniac NH_3.
2) Reconnaître cette table parmi les tables données à l'exercice 5, puis expliciter un isomorphisme entre le groupe Isom(NH_3) et le groupe des permutations de trois lettres décrit à l'exercice 6.
3) Avec les notations de l'exercice précédent, utiliser la table de multiplication pour calculer les produits $(C_3.\sigma_1).\sigma_2$, $C_3.(\sigma_1.\sigma_2)$, $\sigma_1.\sigma_2.C_3$, $\sigma_1.\sigma_3.C_3$, $C_3.\sigma_1.\sigma_3$.
4) Donner les inverses de E (l'identité), C_3, et σ_1.

Exercice 12

1) Dessiner la structure de l'ion $AuBr_4^-$. Dessiner tous les axes de rotation et tous les plans de réflexion (vous devez trouver cinq axes de rotation et cinq plans de réflexion).
2) Donner le nombre de rotations. En déduire (*a priori*) le nombre total d'éléments du groupe Isom($AuBr_4^-$).
3) Outre les cinq réflexions déjà identifiées, quelles sont les autres isométries indirectes. Décrire géométriquement chacune des isométries ainsi obtenues, en donnant le type de l'isométrie (rotation, inversion, etc...) et les éléments qui permettent de la décrire complètement (l'angle et l'axe si c'est une rotation, le plan si c'est une symétrie, etc...).
4) Remplir au moins 50 cases de la table de multiplication.

Exercice 13 (solution dans [Wal] p.19)

Lesquelles des molécules suivantes : NH_3, cis-1,2-dichloroéthylène, trans-1,2-dichloroéthylène et $CoCl_6^{3-}$ possèdent un centre d'inversion ? Pour les molécules ayant un centre d'inversion, numérotez les atomes et dessinez la molécule avant et après l'opération. Voir d'autres exemples dans l'exercice p.22 de [Wal] si vous n'êtes pas à l'aise.

Exercice 14

Trouver un axe de rotation impropre S_6 dans l'ion $CoCl_6^{3-}$ (complexe octaédrique). *Indication :* Commencer par chercher un axe de rotation d'ordre 3.

Exercice 15

Donner le groupe des isométries d'un triangle équilatéral dans le plan. (Faire la liste des éléments du groupe, les décrire géométriquement, et donner la table de multiplication.)

Exercice 16

Donner le groupe des isométries d'un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^3$. (Faire la liste des éléments du groupe, les décrire géométriquement, et donner la table de multiplication.)

Exercice 17

Donner le groupe des isométries d'un pentagone régulier dans le plan. (Même consigne.)

Exercice 18

1) Décrire le groupe des isométries *directes* d'un cube. (Faire la liste de tous les éléments du groupe. On ne donnera pas nécessairement la table de multiplication, un peu volumineuse.) Indice : il n'y a que des rotations.
2) Quelle est la rotation obtenue si l'on effectue d'abord une rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis une rotation d'axe passant par 2 sommets opposés et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (Faire un dessin, numéroter les sommets, et regarder comment les rotations agissent sur les sommets.)
3) Donner la trace de chacune des rotations. (Indice : rappelez-vous que la trace ne dépend pas de la base choisie. En particulier la trace d'une rotation ne dépend que de l'angle de rotation.)

Exercice 19

1) Rappeler le groupe des isométries de la molécule d'eau (faire la liste des éléments).
2) Fixer une base de votre choix. Pour chaque isométrie, donner la matrice correspondante dans cette base.
3) Montrer (par exemple avec les tables de multiplication) que ce groupe est isomorphe au groupe de Klein, noté Kl (on rappelle que le groupe de Klein est l'unique groupe d'ordre 4 non cyclique, *cf.* exercice 4), c'est-à-dire au groupe des couples $(\pm 1, \pm 1)$.
4) En déduire un morphisme de groupes ρ de Kl dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$. Pour chaque élément a de Kl, on écrira la matrice $\rho(a)$ correspondante. (On dit que le morphisme ρ est une *représentation linéaire* du groupe Kl.)

Exercice 20

1) Rappeler le groupe des isométries de la molécule d'ammoniac (faire la liste des éléments).
2) Fixer une base de votre choix. Pour chaque isométrie, donner la matrice correspondante dans cette base.
3) En déduire une « représentation linéaire » du groupe des permutations de trois lettres (*cf.* exercice 6), c'est-à-dire un morphisme ρ de ce groupe dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 21

Montrer que dans un groupe commutatif, les classes de conjugaison sont réduites à un élément. Si n est l'ordre du groupe, combien y a-t-il de classes de conjugaison ?

Exercice 22

Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans le groupe d'isométries de la molécule d'eau ?

Exercice 23

Dans le groupe des permutations de trois lettres (*cf.* exercice 6), montrer que les éléments x_2, x_3 et x_5 sont conjugués. Les éléments x_4 et x_6 sont-ils conjugués ? Montrer que x_3 et x_4 ne sont pas conjugués. Combien y a-t-il de classes de conjugaison ?

Exercice 24

1) Soit G le groupe des isométries de la molécule d'ammoniac. Montrer que les deux rotations non triviales sont conjuguées. Les trois symétries planes sont-elles conjuguées ?
2) Une rotation peut-elle être conjuguée à une symétrie ?
3) En déduire le nombre de classes de conjugaison de ce groupe.
4) Aurait-on pu déduire ce résultat de l'exercice précédent ?

Exercice 25

1) Donner tous les éléments du groupe d'isométrie de la molécule PF_5 (elle a une structure de bipyramide à base triangulaire). En particulier, identifier un axe de rotation impropre. On note S_3 la rotation impropre ainsi identifiée.
2) Numéroter les atomes de fluor, puis dessiner l'effet de la rotation impropre S_3 sur la molécule. Dessiner ensuite l'effet des différentes puissances de S_3, S_3^2, S_3^3, S_3^4, S_3^5. Que vaut S_3^6 ?

Exercice 26

Faire la liste de toutes les isométries de la molécule PCl_5. *Remarque : Pour cet exercice et pour tous les exercices de ce type, on pourra commencer par déterminer toutes les rotations (c'est-à-dire toutes les isométries* directes*) puis utiliser le fait que s'il y a des isométries indirectes, il doit y en avoir autant que d'isométries directes (en comptant l'identité). Cette remarque permet donc de savoir* a priori *combien d'éléments on doit trouver, sous réserve que l'on ne se soit pas trompé pour les rotations.*

Exercice 27

Faire la liste de toutes les isométries de la molécule de (E)-1,2-dibromoéthane.

Exercice 28

Faire la liste de toutes les isométries de la molécule CH_4.Réponse : on doit trouver 24 éléments, à savoir
- e
- 8=4x2 rotations d'ordre 3 autour d'un axe (CH)
- 3 rotations d'ordre 2 autour d'un axe passant par le centre de deux arêtes opposées (droite bissectrice d'un angle H-C-H).
- 6 plans de réflexion HCH
- 6 "rotations impropres" S_4, avec le même axe que les rotations d'ordre 2 (d'ailleurs les carrés de ces rotations impropres sont les rotations d'ordre 2).

Exercice 29

1) La molécule de phosphine PH_3 présente une structure en pyramide, comme l'ammoniac. Dessiner cette molécule et donner son groupe d'isométries (donner la table de multiplication du groupe).
2) Fixer une base de votre choix. Pour chaque isométrie, donner la matrice correspondante dans cette base.

Exercice 30

1) Rappeler le groupe d'isométries de la molécule de phosphine PH_3 (avec la table de multiplication). On appelle G_1 ce groupe.
2) Dessiner l'ion $Co(en)_3^{3+}$. Faire la liste de toutes les isométries qui le préservent, puis donner la table de multiplication de son groupe d'isométries. On appellera G_2 ce groupe.
3) Montrer que les groupes G_1 et G_2 sont isomorphes.