Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $2^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MA 213 : Théorie des groupes pour la chimie

Feuille de TD n°2 : Isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1 (Complément aux révisions d'algèbre linéaire)

1) On note F l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Vérifier que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que les quatre matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de F. En déduire la dimension de F. Dans les questions suivantes, F sera muni de cette base.
3) Vérifier que l'application « trace » de F dans $\mathbb{R}$ (qui à une matrice associe sa trace) est linéaire. Donner la matrice de cette application (on munira $\mathbb{R}$ de sa base canonique $\{1\}$).
4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice fixée. Montrer que les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ de F dans lui-même sont linéaires et donner leurs matrices (dans la base donnée à la question 2).

Exercice 2 (Complément aux révisions d'algèbre linéaire)

Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Donner une base. Montrer que la multiplication par $2j$ est une application linéaire et en donner la matrice dans la base que vous avez choisie.

Exercice 3

1) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^3$ en posant :

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 4x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1.$$

2) Même question en considérant l'espace E des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, et

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4

Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^t B).$$

Exercice 5

Dans un espace euclidien, démontrer le théorème de Pythagore : si x et y sont deux vecteurs orthogonaux alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Illustrer par un dessin.

Exercice 6

Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ, démontrer les identités suivantes :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Exercice 7

Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, des isométries suivantes.
1) La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2) La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3) La symétrie par rapport à l'axe des x.
4) La symétrie par rapport à l'axe des y.
5) La rotation d'angle π.
6) La symétrie par rapport à l'axe passant par l'origine et de vecteur directeur $(2,3)$.
7) La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.
8) La rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$.
9) La symétrie par rapport à l'axe passant par l'origine et perpendiculaire au vecteur (a,b).

Exercice 8

1) Donner la matrice, dans la base de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, de la symétrie d'axe $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, et de la symétrie par rapport à l'axe des x.
2) Pour la rotation, comparer la matrice obtenue à celle obtenue dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comment expliquez-vous ce fait ?

Exercice 9

1) Vérifier que les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par les matrices (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sont des isométries. Préciser si elles sont directes ou indirectes.
2) Pour chacune d'entre elles, déterminer s'il s'agit d'une rotation ou d'une symétrie, et donner l'angle de rotation ou l'axe de symétrie.
3) Pour chacune des symétries, donner les valeurs propres et une base formée de vecteurs propres. Vérifier que les deux vecteurs propres ainsi choisis sont orthogonaux. Donner la matrice de l'isométrie considérée dans cette nouvelle base.
4) Les rotations ci-dessus ont-elles des valeurs propres réelles ? complexes ? Si oui, donner des vecteurs propres associés. (On précisera si l'on travaille dans $\mathbb{C}^2$ ou dans $\mathbb{R}^2$.) Si c'est possible, former une base de vecteurs propres et donner la matrice de l'isométrie considérée dans cette nouvelle base.

Exercice 10

1) On note f la symétrie d'axe (Ox) et g la symétrie dont l'axe est la droite D telle que l'angle de (Ox) à D soit égal à $\frac{\pi}{3}$. Décrire les isométries $f \circ g$ et $g \circ f$. Vérifier le résultat en donnant les matrices A et B de f et g dans la base canonique, puis en calculant les produits AB et BA.
2) Plus généralement, si s et s' sont deux symétries, décrire la composée ss'. (On notera θ l'angle entre les axes de symétrie de s et de s'.) Quel est l'inverse de ss' ?

Exercice 11

Étudier la composée d'une symétrie et d'une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, des isométries suivantes. Calculer la trace des matrices obtenues.
1) La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe (Oz).
2) La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe (Oy).
3) La symétrie par rapport au plan xy.
4) La symétrie par rapport au plan passant par les points de coordonnées

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) La rotation d'angle π et d'axe perpendiculaire au plan décrit à la question précédente.
6) La composée de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe (Ox), suivie de la symétrie de plan perpendiculaire à $(0x)$ (« rotation impropre »). Qu'obtient-on si l'on compose ces isométries dans l'autre sens ?
7) La composée de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'axe (Oy), suivie de la symétrie de plan perpendiculaire au vecteur $(1, 1, 0)$ (« rotation impropre »). Vérifier le résultat en donnant d'abord la matrice A de la rotation, puis la matrice B de la symétrie, et en calculant le produit BA. Comparer la trace de la matrice produit et le produit des traces. Le produit AB est-il égal au produit BA ? Comparer la trace de AB et la trace de BA.

Exercice 13

Donner l'axe et l'angle des deux « rotations impropres » dont on a calculé les matrices (AB et BA) à la dernière question de l'exercice 12. On le fera de deux manières :

a) en recherchant les espaces propres des matrices en question
b) géométriquement, en faisant comme si on ne connaissait pas le calcul matriciel.

On vérifiera que l'on obtient le même résultat par les deux méthodes.

Exercice 14

Parmi les matrices suivantes, lesquelles représentent des isométries ?

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 15

Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormale (i, j, k), étudier les applications linéaires définies par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$