Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – 2$^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MA 213 : Théorie des groupes pour la chimie

Feuille de TD n˚1 : Révisions et compléments d'algèbre linéaire.

Exercice 1 (Essayez de le faire sans regarder le cours...)

1) Rappeler les formules de trigonométrie donnant $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$.
2) Calculer $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3) Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
4) Donner les valeurs (sans calculatrice) de $\cos 0$, $\cos \pi$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{6}$. À l'aide de ces valeurs et des formules ci-dessus, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$. Mêmes questions en remplaçant cos par sin.

Exercice 2

Résoudre les équations :
1) $\cos 3x = \sin 2x$
2) $\sin 3x = \cos 2x$.

Exercice 3

1) Calculer la trace des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 13 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & \frac{\pi}{2} \\ 41 & \cos\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 17 & \ln 2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1) Calculer la trace des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 110 & 0 & 4 \\ 4,3 & 1,2 & -18 \\ -3,3 & 9 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi & 0 \\ \sin 3 & 2 & 0 & -2 \\ 12 & -74 & 3 & 4 \\ e^x & e^y & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Calculer le déterminant de ces matrices.

Exercice 6

Que peut-on dire du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 110 & 0 & 4 \\ 4,3 & 1,2 & -18 \end{pmatrix}$?

Exercice 7

Calculer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 13 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
1) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\}$
2) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 1\}$
3) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = |y|\}$
4) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$
5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = x - z = 0\}$
6) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z > 0\}$

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces ?
1) l'ensemble des fonctions paires ;
2) l'ensemble des fonctions positives ;
3) l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et solutions de l'équation $y'' + y' + xy = 0$;
4) l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et solutions de l'équation $y'' + y^2 = 0$.

Exercice 10

1) Peut-on déterminer le scalaire a pour que le vecteur $w = (a, 2, -7)$ de $\mathbb{R}^3$ appartienne au plan engendré par $u = (1, 2, -5)$ et $v = (2, 1, -4)$?
2) Même question pour le vecteur $w = (a, a, -7)$.

Exercice 11

Dans $\mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace engendré par $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, et G le sous-espace engendré par $(0, 1, 1)$ et $(1, 2, 3)$. Donner les équations cartésiennes de F et de G. Déterminer $F \cap G$ et préciser sa nature.

Exercice 12

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Lorsqu'elles sont linéaires et que les espaces vectoriels en jeu sont de dimension finie, donnez leur matrice dans des bases de votre choix.

1) $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$ $\qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x^2 + 3y, y) \end{cases}$

2) $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (\ln x, 2y) \end{cases}$ $\qquad \varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^0([0, 1]) & \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1]) \\ f & \longmapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$

3) $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^1([0, 1]) & \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1]) \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$ $\qquad \psi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$

Exercice 13

1) Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $f(x, y) = ax + by$ où a et b sont deux nombres réels.
2) Quelle est la forme d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 14

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Lorsqu'elles sont linéaires, donnez leur matrice dans des bases de votre choix.

a) $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (4x+7y, x-2y, 2x) \end{cases}$ $\qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x+3y+z, y-z) \end{cases}$

b) $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^1([0,1]) & \longrightarrow \mathcal{C}^0([0,1]) \\ f & \longmapsto \sqrt{f} \end{cases}$ $\qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x+3y+z, 1+y-z) \end{cases}$

c) $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto (4x+7y-3z+2t, x-2y, 2x+t, -3z-4y) \end{cases}$

d) $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto (0, y-z+3t) \end{cases}$

Exercice 15

1) Donner la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie comme étant la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+2y=0$.
2) Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour cette application linéaire.

Exercice 16

1) Donner la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie comme étant la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y=0$.
2) Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour cette application linéaire.

Exercice 17

1) Soit A une matrice réelle de taille $n\times n$ telle que $A^2+I=0$. Démontrer que A n'admet aucune valeur propre réelle.
2) En déduire que si l'entier n est impair, il n'existe pas de matrice réelle A de taille $n\times n$ telle que $A^2+I=0$.

Exercice 18

Pour chacune des matrices suivantes, calculer les valeurs propres, et donner une base des espaces propres associés.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 19

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les deux bases suivantes.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 20

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux bases suivantes.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

1) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3) Soit x le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner le vecteur qui représente x dans la base $\mathcal{B}'$.
4) Vérifier le résultat obtenu par un calcul direct, sans utiliser la formule vue en cours (donner le vecteur qui représente x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
5) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6) Vérifier que la trace et le déterminant sont restés inchangés.

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à la droite $y = x$.
1) Que vaut $f(x, y)$? En déduire la matrice de f dans la base canonique (faire un dessin).
2) Donner (directement, sans calcul), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ formée des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ (dessiner ces vecteurs sur le dessin de la question 1 pour voir directement $f(1, 1)$ et $f(1, -1)$).
3) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, ainsi que son inverse.
4) Vérifier que la formule vue en cours $A' = P^{-1}AP$ donne bien le même résultat que celui obtenu à la question 2.