# Outils mathématiques pour la chimie

(GLMA307 – Année universitaire 2012–2013)

## Feuille de TD 2 : Algèbre linéaire

**Exercice 1**

1) Calculer la trace des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 13 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & \frac{\pi}{2} \\ 41 & \cos\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 17 & \ln 2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 4 \\ 4,3 & 1,2 & -18 \\ -3,3 & 9 & 11 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin 3 & 2 & 0 & -2 \\ 12 & -74 & 3 & 4 \\ e^x & e^y & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer le déterminant des matrices $A$, $B$ et $D$.
3) Calculer la somme $A + B$ et les produits $AB$ et $BA$.

**Exercice 2**

Que peut-on dire du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 110 & 0 & 4 \\ 4,3 & 1,2 & -18 \end{pmatrix}$ ?

**Exercice 3**

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Lorsqu'elles sont linéaires, donnez leur matrice dans les bases canoniques.
a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (4x + 7y, x - 2y, 2x)$
b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x, y, z) = (x^2 + 3y + z, 1 + y - z)$
c) $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f_3(x, y, z, t) = (4x + 7y - 3z + 2t, x - 2y, 2x + t, -3z - 4y)$
d) $f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x, y, z, t) = (0, y - z + 3t)$
e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_5(x, y, z) = (x + 3y + z, y - z)$.

**Exercice 4**

1) On note $F$ l'ensemble des matrices de taille $2 \times 2$ à coefficients réels. Vérifier que $F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (on se contentera de rappeler ce que sont l'addition et la multiplication par un scalaire).
2) Montrer que les quatre matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

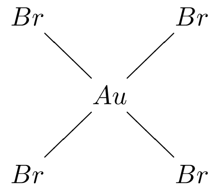
forment une base de $F$. En déduire la dimension de $F$. Dans les questions suivantes, $F$ sera muni de cette base.
3) Vérifier que l'application « trace » de $F$ dans $\mathbb{R}$ (qui à une matrice associe sa trace) est linéaire. Donner la matrice de cette application (on munira $\mathbb{R}$ de sa base canonique $\{1\}$).
4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice fixée. Montrer que les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ de $F$ dans lui-même sont linéaires et donner leurs matrices (dans la base donnée à la question 2).

**Exercice 5**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à la droite $y = x$.
1) Que vaut $f(x, y)$ ? En déduire la matrice de $f$ dans la base canonique (faire un dessin).
2) Donner (directement, sans calcul), la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ formée des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ (dessiner ces vecteurs sur le dessin de la question 1 pour voir directement $f(1, 1)$ et $f(1, -1)$).
3) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, ainsi que son inverse.
4) Vérifier que la formule vue en cours $A' = P^{-1}AP$ donne bien le même résultat que celui obtenu à la question 2.

**Exercice 6**

On rappelle que l'ion $AuBr_4^-$ est une molécule plane. On place cette molécule dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante : l'atome Au est situé à l'origine, et les quatre atomes Br sont situés aux quatre points de coordonnées $(\pm 1, \pm 1)$.




1) On note $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 0$, et $\rho$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $O$. Montrer que chacune de ces applications linéaires laisse la molécule globalement invariante.
2) Donner les matrices de $\sigma$ et $\rho$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3) Calculer les matrices de $\sigma\rho$, puis $\rho\sigma$ et $\sigma\rho\sigma$.
4) Calculer la trace et le déterminant de $\sigma$, de $\rho$ et de $\sigma\rho$.
5) Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour $\sigma$.
6) Quelles sont les valeurs propres de $\rho$ ?

**Exercice 7**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux bases suivantes.

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

1) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3) Soit $x$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner le vecteur qui représente $x$ dans la base $\mathcal{B}'$.
4) Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
5) Vérifier que la trace et le déterminant sont restés inchangés.

**Exercice 8**

1) Soit $\sigma$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie comme étant la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x + 2y = 0$. Trouver (géométriquement) les valeurs propres et une base de vecteurs propres $(v_1, v_2)$ pour cette application linéaire.
2) Donner la matrice de $\sigma$ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.
3) Donner la matrice de passage $P$ de la base canonique à $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse $P^{-1}$.
4) En déduire la matrice de $\sigma$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 9**

1) Soit $A$ une matrice réelle de taille $n \times n$ telle que $A^2 + I = 0$. Démontrer que $A$ n'admet aucune valeur propre réelle.
2) En déduire que si l'entier $n$ est impair, il n'existe pas de matrice réelle $A$ de taille $n \times n$ telle que $A^2 + I = 0$.

**Exercice 10**

Pour chacune des matrices suivantes, calculer les valeurs propres, et donner une base des espaces propres associés.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 11**

1) Donner une base de $\mathbb{C}^2$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Donner une base de $\mathbb{C}^2$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ ?

**Exercice 12**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour un entier $n$ quelconque. [Indication : on commencera par diagonaliser $A$.]