Outils mathématiques pour la chimie

(GLMA307 – Année universitaire 2011–2012)

Examen partiel du 23 novembre 2011

Justifiez toutes vos réponses. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tous les documents, la calculatrice et les téléphones portables sont interdits.

Durée : 1h30

Exercice 1 (Questions de cours)

1) Soient G un groupe et x, y des éléments de G. Que signifie la phrase : « x et y sont conjugués dans G » ?
2) Donner la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe.
3) Énoncer le théorème de Lagrange.

Exercice 2

Étudier l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe complexe $z \in \mathbb{C}$ est telle que $\frac{z+2}{z-i}$ soit un nombre réel.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1) À quelle condition sur a et b la matrice A admet-elle deux valeurs propres distinctes (éventuellement complexes) ?

   On suppose que cette condition est satisfaite et on note α, β les valeurs propres.

2) Vérifier que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres pour la matrice A.

   On note $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

3) Trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D$ et calculer P^{-1}.
4) Exprimer A en fonction des matrices P et D, puis A^n en fonction des matrices P et D^n.
5) En déduire une formule pour chacun des coefficients de A^n en fonction de α et β.

   On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}$. On pose

$$V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

6) Exprimer V_{n+1} en fonction des matrices A et V_n, puis V_n en fonction des matrices A^n et V_0.
7) En déduire une formule pour u_n en fonction de α et β.