Outils mathématiques pour la chimie

(GLMA307 – Année universitaire 2012–2013)

Feuille de TD 1 : Nombres complexes

Exercice 1

Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants et de leurs conjugués.

a) e^z où $z = 3 + 4i$

b) $(1 - i)^{27}$

c) i^{30}

Exercice 2

Calculer par deux méthodes différentes la partie réelle de $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+i}$ et en déduire que

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $x^2 + \sqrt{2}x - \frac{i}{2} = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^2 + ix + 1 = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

e) $ix^2 + 27x = 0$

Exercice 4

On note $f(x) = x^4 + 1$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) En déduire que f est le produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 5

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Montrer que

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.$$

Indication : on pourra remarquer que l'ensemble des points du plan représentés par les cinq termes de la somme est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et de centre 0.

Exercice 6

Si $z \in \mathbb{C}$, on note M le point du plan $\mathbb{R}^2$ correspondant. Déterminer l'ensemble :

a) des points M du plan tels que $z^2 + 2z - 3$ soit réel.

b) des points M du plan tels que $\frac{z+i}{z-1}$ soit imaginaire pur.

c) des points M du plan tels que $\frac{z+i}{z-1}$ soit de module 1.

Exercice 7

1) Soit f la transformation du plan complexe qui à z associe $f(z)$ donné par $f(z) = iz+3$. Montrer que f admet un point fixe C dont on calculera l'affixe z_C. Montrer ensuite que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a la relation

$$f(z) - z_C = i(z - z_C)$$

et en déduire que f est une rotation.

2) Soit g la la transformation du plan complexe donnée par $g(z) = \overline{z}e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 8

Ecrire sous la forme $z \mapsto az + b$ la rotation de centre $1 + 2i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, puis la rotation de centre $-2i$ et d'angle $\frac{\pi}{12}$, puis la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 9

Identifier géométriquement (*i.e.* comprendre si c'est une rotation, une translation, une similitude et identifier vecteur, ou angle, centre, *etc.*) les composées des transformations précédentes.

Exercice 10

Identifier géométriquement la transformation $z \mapsto (3 + i)z - (1 + i)$ puis celle donnée par $z \mapsto 4i\bar{z} - 2 + i$.

Exercice 11

Soit $z \mapsto az + b$ une transformation géométrique du plan complexe. Pour quelles valeurs de (a, b) est-elle une translation ? Une rotation ? Dans ce dernier cas, quel est son centre ? Son angle ?

Exercice 12

Soit M une molécule planaire constituée d'un atome central A_0 et de trois atomes A_1, A_2 et A_3 situés à distance 1 de A_0 et faisant entre eux des angles de 120 degrés. On place l'origine du plan en l'atome central, en quels points du plan complexe se situent alors les 3 atomes périphériques ? (Il peut y avoir plusieurs réponses) Trouver toutes les transformations de la forme $z \mapsto az + b$ qui déplacent A_1 en la position précédemment occupée par A_2, A_2 en la position précédemment occupée par A_3 et A_3 en la position précédemment occupée par A_1 ? Et celles de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$?

Exercice 13

Mêmes questions avec une molécule à un atome central et deux atomes périphériques situés à distance 2 de l'atome central et faisant entre eux un angle α.

Exercice 14

1) Retrouver les formules de trigonométrie donnant $\cos(x + y)$ et $\sin(x + y)$.
2) Calculer $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3) Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
4) Donner ou calculer les valeurs (sans calculatrice) de $\cos 0$, $\cos \pi$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$. Même question en remplaçant cos par sin.