

Éléments de correction
du partiel du 23 novembre 2011.

Exercice 1 voir cours.

Exercice 2

$$\det A = \frac{1}{8}(-2-2-2-2) = -1 \rightarrow \text{isométrie impropre.}$$

$$\chi_A(1) = \det(A - \text{Id}) = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rotation impropre.}$$

Axe? $E_{-1} = \text{Ker}(A + \text{Id})$

$$A + \text{Id} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y - \sqrt{2}z = 0 \\ x + y + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Donc l'axe est dirigé par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Angle? $\text{tr} A = -1 = -1 + 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

$$\text{sgn}(\theta) = \text{sgn} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right) \cdot u \right) = \text{sgn} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ donc } \boxed{\theta = -\frac{\pi}{2}}.$$

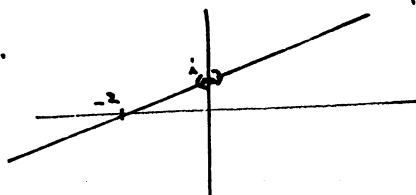
Conclusion: A est donc la rotation impropre d'axe dirigé par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

$z \neq i$ est une condition nécessaire.

$$\begin{aligned} \text{Si } z \neq i, \quad \frac{z+2}{z-i} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (z+2)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (a+2+ib)(a-i(b-1)) \in \mathbb{R} \text{ avec } z = a+ib \\ &\Leftrightarrow (a+2)(1-b) + ab = 0 \\ &\Leftrightarrow a - 2b + 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble cherché est la droite d'équation $b = \frac{a}{2} + 1$, privée du point $z = i$.



Exercice 4

$$\textcircled{1} \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - b\lambda - a$$

$$\Delta = b^2 + 4a$$

Donc A admet deux valeurs propres distinctes si $b^2 + 4a \neq 0$.

$$\textcircled{2} \quad A v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ a+b\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha v_1$$

$$\text{et } A v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ a+b\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta v_2$$

donc v_1 et v_2 sont des vecteurs propres, de valeurs propres α et β respectivement.

(Rem : On a $\chi_A(\lambda) = 0 = \lambda^2 - b\lambda - a$ d'où l'égalité $a + b\alpha = \alpha^2$.
De même $a + b\beta = \beta^2$.)

$\textcircled{3}$ On note $B = (v_1, v_2)$. Alors la matrice ^{dans B} de l'application linéaire représentée par A est $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} A v_1 = \alpha v_1 \\ A v_2 = \beta v_2 \end{cases}$.

Les formules de changement de base donnent $D = P^{-1} A P$ où P est la matrice de passage de la base canonique à B .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}. \quad \text{Un calcul rapide donne } P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{4} \quad A = P D P^{-1}, \quad A^m = P D^m P^{-1}.$$

$$\textcircled{5} \quad A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix} \times \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \alpha^m \beta + \alpha \beta^m & \beta^m - \alpha^m \\ \alpha^{m+1} \beta + \alpha \beta^{m+1} & \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{6} \quad V_{m+1} = \begin{pmatrix} \mu_{m+1} \\ \mu_{m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{m+1} \\ a\mu_m + b\mu_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_m \\ \mu_{m+1} \end{pmatrix} = A V_m$$

Une récurrence immédiate donne alors $V_m = A^m V_0$.

$$\textcircled{7} \quad V_m = \begin{pmatrix} \mu_m \\ \mu_{m+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \alpha^m \beta + \alpha \beta^m & \beta^m - \alpha^m \\ \alpha^{m+1} \beta + \alpha \beta^{m+1} & \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta^m - \alpha^m \\ \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \boxed{\mu_m = \frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha}}.$$