UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

Outils mathématiques pour la chimie

(GLMA307 – Année universitaire 2012–2013)

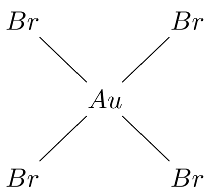
Feuille de TD 3 : Isométries de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1

Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, des isométries suivantes.
1) La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2) La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3) La symétrie par rapport à l'axe des x.
4) La symétrie par rapport à l'axe des y.
5) La rotation d'angle π.
6) La symétrie par rapport à l'axe passant par l'origine et de vecteur directeur $(2, 3)$.
7) La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.
8) La rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$.
9) La symétrie par rapport à l'axe passant par l'origine et perpendiculaire au vecteur (a, b).

Exercice 2

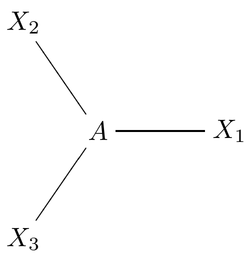
On rappelle que l'ion $AuBr_4^-$ est une molécule plane. On place cette molécule dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante : l'atome Au est situé à l'origine, et les quatre atomes Br sont situés aux quatre points de coordonnées $(\pm 1, \pm 1)$.



1) Faire la liste des isométries du plan $\mathbb{R}^2$ qui laissent la molécule globalement invariante. Combien y a-t-il de rotations ? de symétries ?
2) Pour chacune de ces isométries, donner la matrice qui la représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

On considère une molécule plane de la forme AX_3. Elle est constituée de trois atomes X situés aux sommets d'un triangle équilatéral, au centre duquel se trouve un atome A. On la représente dans le plan $\mathbb{R}^2$ en plaçant l'atome A au point de coordonnées $(0, 0)$ et l'un des atomes X au point de coordonnées $(1, 0)$. Pour les besoins de l'exercice, on a numéroté les atomes X dans la figure ci-dessous, mais ils doivent être considérés comme identiques.



1) Faire la liste des isométries du plan $\mathbb{R}^2$ qui laissent la molécule globalement invariante. Combien sont propres ? Combien sont impropres ?
2) On note σ_1 la symétrie d'axe (AX_1) et σ_2 la symétrie d'axe (AX_2). Décrire les isométries $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. Vérifier le résultat en donnant les matrices S_1 et S_2 de σ_1 et σ_2 dans la base canonique, puis en calculant les produits $S_1 S_2$ et $S_2 S_1$.
3) Comparer l'angle de la droite (AX_1) à la droite (AX_2), et l'angle de la rotation $\sigma_2 \circ \sigma_1$.
4) Plus généralement, si s et s' sont deux symétries, décrire la composée ss'. (On notera θ l'angle entre les axes de symétrie de s et de s'.) Quel est l'inverse de ss' ?

Exercice 4

1) Vérifier que les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par les matrices (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sont des isométries. Préciser si elles sont directes ou indirectes.
2) Pour chacune d'entre elles, déterminer s'il s'agit d'une rotation ou d'une symétrie, et donner l'angle de rotation ou l'axe de symétrie.
3) Pour chacune des symétries, donner les valeurs propres et une base formée de vecteurs propres. Vérifier que les deux vecteurs propres ainsi choisis sont orthogonaux. Donner la matrice de l'isométrie considérée dans cette nouvelle base.
4) Les rotations ci-dessus ont-elles des valeurs propres réelles ? complexes ? Si oui, donner des vecteurs propres associés. (On précisera si l'on travaille dans $\mathbb{C}^2$ ou dans $\mathbb{R}^2$.) Si c'est possible, former une base de vecteurs propres et donner la matrice de l'isométrie considérée dans cette nouvelle base.

Exercice 5

Quelles sont les rotations du plan $\mathbb{R}^2$ qui admettent des valeurs propres réelles ?

Exercice 6

Étudier la composée d'une symétrie et d'une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$.