Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Combinatoire : Contrôle continu numéro 1.

Mardi 13 novembre, durée 1 heure.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1
Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. Démontrer la relation :

$$\binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k}.$$

Qu'obtient-on pour $k = 1$ dans cette formule ?

Exercice 2
a) Démontrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

(On pourra considérer un ensemble de $2n$ objets (par exemple, $2n$ boules...) dont la moitié sont noirs et la moitié sont blancs.)
b) Comment s'interprète cette relation sur le triangle de Pascal ?

Exercice 3
On considère $n+1$ entiers $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Montrer qu'il existe deux indices i et j distincts tels que $a_j - a_i$ soit divisible par n.

Exercice 4
Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 6 dans le groupe $\mathfrak{S}_7$? (Donner la valeur numérique.)

Exercice 5
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que le sous-groupe $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{S}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.
(Indication : On pourra fixer une transposition τ et considérer l'application $\sigma \mapsto \sigma\tau$ de $\mathfrak{A}_n$ dans $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.)

Exercice 6
Soit σ un élément d'ordre 35 du groupe $\mathfrak{S}_{28}$. Montrer que σ a au moins un point fixe.