Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Indications de correction pour l'examen de combinatoire

Exercice 1

On compte le nombre d'entiers divisibles par chacun des entiers suivants : 2, 3, 5, 6, 15, 10, 30. Puis on applique le principe d'inclusion-exclusion. Autre méthode : on remarque (à justifier) qu'il suffit de compter combien il y en a entre 1 et 30 puis de multiplier par 20. Réponse : 160.

Exercice 2

Il ne peut y avoir que des 4-cycles et des 2-cycles. S'il n'y a pas de 4-cycle, il peut y avoir 0 cycle d'ordre 2 (1), 1 cycle d'ordre 2 ($\binom{6}{2}$), 2 cycles d'ordre 2 ($\frac{1}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$), ou 3 cycles d'ordre 2 ($\frac{1}{3!}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$). S'il y a un 4-cycle, les deux éléments restants forment soit une transposition ($\binom{6}{4} \times 3!$) soit deux points fixes ($\binom{6}{4} \times 3!$). Total : 256.

Exercice 3 (question de cours)

cf. exercice 4 du TD3.

Exercice 4

1) On note ρ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens trigonométrique. Les trois éléments de G sont id, ρ et ρ^2. On a

$$\begin{aligned} \alpha(\mathrm{id}) &= \mathrm{id} \\ \alpha(\rho) &= (1,7,10)(2,8,6)(3,4,9) \\ \alpha(\rho^2) &= (1,10,7)(2,6,8)(3,9,4) \end{aligned}$$

2) On utilise la formule de Burnside. Réponse : $\frac{1}{3}(2^{10} + 2 \times 2^4) = 352$. Remarque : avec k couleurs on obtiendrait $\frac{1}{3}(k^{10} + 2 \times k^4)$.
3) On applique encore la formule de Burnside. Pour qu'un coloriage soit invariant sous un élément de G, il faut que les orbites associées à cet élément soient monochromes. Pour l'identité c'est clair : il y a $\binom{10}{4}$ coloriages invariants. Pour ρ ou ρ^2, comme il y a une orbite de cardinal 1 et trois orbites de cardinal 3, le point fixe doit être rouge et parmi les trois orbites de cardinal 3, il doit y en avoir une rouge et deux blanches. Donc il y a trois coloriages invariants (on choisit la rouge parmi 3). Total : $\frac{1}{3}(\binom{10}{4} + 3 + 3) = 72$.
4) On procède de la même manière. On voit qu'il ne peut pas y avoir de coloriages invariants sous ρ ou ρ^2. Réponse : $\frac{1}{3}\binom{10}{5} = 84$.

Exercice 5 (Énumération de chemins.)

1a) $\mathcal{C}$ contient 2^n chemins de longueur n.
1b) Un chemin de $\mathcal{C}$ termine sur la doite d'équation $y = x$ si et seulement si il contient autant de pas vers le droite que vers le haut. On obtient donc $\binom{n}{n/2}$ pour n pair (nombre de façons de choisir les emplacements des pas vers le haut), et 0 si n est impair.
1c) Un chemin termine sur la doite d'équation $y = x + p$ ssi il possède un excédent de p pas vers le haut, donc si il a $(n + p)/2$ pas vers le haut et $(n - p)/2$ pas vers la droite. Ce n'est donc possible que si ces deux nombres sont des entiers naturels, i.e. $n + p$ pair et $|p| \leq n$, et

dans ce cas on a $\binom{n}{(n+p)/2}$ chemins de $\mathcal{C}$ de longueur n qui terminent sur la droite d'équation $y = x + p$ (nombre de choix des emplacements des pas vers le haut).

Dans la suite, on note $S_k(z)$ la série génératrice de $\mathcal{C}_k$.

2a) $\mathcal{C}_0$ ne contient qu'un seul chemin, le chemin de longueur nulle. Donc $S_0(z) = 1$.
2b) Soit $a_1 \dots a_n \in \{\rightarrow, \uparrow\}^n$ un chemin de longueur $n > 0$ de $\mathcal{C}_k$ (avec $k > 0$). Ce chemin commence nécessairement par un pas vers le haut (sinon il sort de la bande $x \leq y \leq x+k$). Soit m le plus petit entier strictement positif tel que $a_1 \dots a_m$ termine sur la droite d'équation $y = x$ – il existe car le chemin complet termine sur $y = x$. Alors il est clair que $a_2 \dots a_{m-1} \in \mathcal{C}_{k-1}$ et $a_{m+1} \dots a_n \in \mathcal{C}_k$. Réciproquement, étant donné $u \in \mathcal{C}_{k-1}$ et $v \in \mathcal{C}_k$, $\uparrow u \rightarrow v \in \mathcal{C}_k \setminus \{\circ\}$. On en déduit l'isomorphisme demandé.
2c) Pour $k > 0$, on obtient $S_k(z) = 1 + zS_{k-1}(z)zS_k(z)$ et donc $S_k(z) = 1/(1 - z^2 S_{k-1}(z))$.
2d) S_k est une fraction rationnelle par récurrence sur k (question 2a pour $k = 0$ et question 2c pour l'étape de récurrence).
2e) D'après la question précédente, la suite (u_n) vérifie à partir d'un certain rang une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (voir l'exercice 4 de la feuille de TD 1b).

3a) Calcul à l'aide de la relation de récurrence de la question 2c.
3b) Par exemple $\frac{1-u}{1-2u} = \frac{1-2u+u}{1-2u} = 1 + u\frac{1}{1-2u} = 1 + u\sum_i (2u)^i$ et donc $[u^n]\frac{1-u}{1-2u}$ est égal à 1 pour $n = 0$ et 2^{n-1} sinon.
3c) Le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_2$ est égal à $[z^n]\frac{1-z^2}{1-2z^2}$. Ce qui est égal à $[u^{n/2}]\frac{1-u}{1-2u}$ pour n pair et 0 pour n impair. En conclusion, le nombre de chemins de longueur n de $\mathcal{C}_2$ est 0 pour n impair, 1 pour $n = 0$ et $2^{n/2-1}$ sinon.
Méthode directe : grouper les pas par paquets de deux à partir du deuxième pas – noter que le premier pas est vers le haut. Ces paquets sont de la forme haut-droite ou droite-haut (sinon le chemin sort de la bande). Le dernier pas est nécessairement vers la droite. On obtient bien $2^{\frac{n-2}{2}}$ chemins.
3d) Remarquer que les chemins de $\mathcal{C}_2$ qui ne touchent pas la droite d'équation $y = x + 2$ sont exactement les chemins de $\mathcal{C}_1$.

4a) Ce sont les chemins de $\mathcal{C}$ qui restent au-dessus de la diagonale (au sens large) et terminent dessus.
4b et c) Similaire aux chemins de Dyck – attention tout de même à la définition de la taille d'un chemin dans cet exercice. La série génératrice de $\mathcal{C}^+$ est égale à $\frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z^2}$. Le nombre de chemins de longueur n de $\mathcal{C}^+$ est nul pour n impair et $\frac{1}{n/2+1}\binom{n}{n/2}$ pour n pair.