Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Corrigé du contrôle continu numéro 1.

Exercice 1

On a d'une part

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\cdot\frac{p!}{k!\,(p-k)!}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!\,k!\,(p-k)!}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-k-(p-k))!}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!\,k!\,(p-k)!}\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée.

Exercice 2

a) On va compter de deux manières le nombre de façons de choisir n boules parmi un ensemble de $2n$ boules dont n sont noires et n sont blanches. La première manière de compter est évidente : on oublie les couleurs, il y a $\binom{2n}{n}$ façons de choisir les boules. On peut aussi compter de la manière suivante : parmi les n boules choisies, il y en aura k noires et $n-k$ blanches, où k est un entier compris entre 0 et n. Or pour tout k, il y a $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ façons de choisir k boules noires et $n-k$ boules blanches. On en déduit :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

b) Cette relation peut s'interpréter ainsi : dans le triangle de Pascal, la somme des carrés des termes de la ligne numéro n est égale au terme central de la ligne numéro $2n$.

Exercice 3

Pour tout i, on note $\overline{a_i}$ la classe de a_i dans le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient n éléments, d'après le principe des tiroirs il existe deux indices i et j distincts dans $\{1,\ldots,n+1\}$ tels que $\overline{a_i} = \overline{a_j}$. On a alors $\overline{a_j - a_i} = \overline{0}$, autrement dit n divise $a_j - a_i$.

Exercice 4

Soit σ un élément d'ordre 6 dans le groupe $\mathfrak{S}_7$. On décompose σ en produit de cycles à supports disjoints. Comme 6 est le ppcm des longueurs des cycles qui interviennent dans cette décomposition, on voit que les seules longueurs possibles sont 1, 2, 3 et 6. S'il y a un cycle de longueur 6, le dernier point est nécessairement un point fixe pour σ. Il y a $7 \times 5!$ permutations de ce type (7 points fixes possibles, et pour chacun des choix, $5\,!$ façons d'ordonner le cycle d'ordre 6). Supposons maintenant qu'il n'y a pas de 6-cycle. Alors il doit y avoir au moins un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 3. Les deux éléments restants sont soit deux points fixes, soit le support d'un autre 2-cycle. Il y a $\binom{7}{3} \times 2 \times \binom{4}{2}$ permutations comportant exactement un 3-cycle et un 2-cycle. Enfin il y a $\binom{7}{3} \times 2 \times \frac{1}{2}\binom{4}{2}$ permutations comportant exactement un 3-cycle et deux 2-cycles. Le nombre d'éléments d'ordre 6 dans le groupe $\mathfrak{S}_7$ est donc

$$7 \times 5! + \binom{7}{3} \times 2 \times \binom{4}{2} + \binom{7}{3} \times 2 \times \frac{1}{2}\binom{4}{2} = 1470.$$

Exercice 5

Soit τ une transposition fixée. Si σ est une permutation paire, alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \\ &= 1 \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

donc $\sigma\tau$ est une permutation impaire. On a donc une application

$$T\colon \begin{cases} \mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \\ \sigma \longmapsto \sigma\tau \end{cases}.$$

Cette application est bijective (par exemple parce qu'elle a un inverse, donné par $\sigma' \mapsto \sigma'\tau$). Donc $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ ont même cardinal. De plus, ils forment une partition de $\mathfrak{S}_n$, si bien que

$$|\mathfrak{S}_n| = |\mathfrak{A}_n| + |\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n| = 2|\mathfrak{A}_n|.$$

Comme le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ est $n!$, on en déduit le résultat demandé.

Exercice 6

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que σ n'admet aucun point fixe. Les longueurs des cycles qui interviennent dans la décomposition de σ en produit de cycles ne peuvent être que 5 ou 7 (1 est exclu car il n'y a pas de point fixe, et 35 est exclu car strictement supérieur à 28). Notons a le nombre de 5-cycles et b le nombre de 7-cycles. Comme σ est d'ordre 35, il doit y avoir au moins un 5-cycle et un 7-cycle. De plus a et b vérifient l'équation

$$5a + 7b = 28.$$

On en déduit que 7 divise a. Or a est supérieur ou égal à 1, donc il est supérieur ou égal à 7, ce qui fournit une contradiction puisque $5a + 7b$ est alors supérieur à 35, et égal à 28.