Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Combinatoire : Devoir maison numéro 1

À rendre pour le 9 octobre 2007

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un alphabet de 4 lettres et soit n un entier vérifiant $n \geq 4$. Combien y a-t-il de mots de longueur n qui contiennent (au moins une fois) chacune des lettres de E ?

Exercice 2

a) Soit E un ensemble fini et soit A, B et C trois sous-ensembles de E (pas nécessairement disjoints). Démontrer la relation :

$$|A \cup B \cup C| = \Big(|A| + |B| + |C|\Big) - \Big(|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|\Big) + |A \cap B \cap C|\,.$$

b) Démontrer la relation :

$$|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - \Big(|A \cup B| + |B \cup C| + |C \cup A|\Big) + \Big(|A| + |B| + |C|\Big)\,.$$

Exercice 3

On considère 4 quatre sous-ensembles (A_1, A_2, A_3, A_4) de E. Prouver la relation suivante :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\,.$$

Exercice 4 (Partitions et nombres de Stirling)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E_n un ensemble de cardinal n (par exemple, l'ensemble $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$). Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on appelle *"partition de E_n en p parties"* une répartition des éléments de E_n en p sous-ensembles vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) chacun des p sous-ensembles est non-vide ;
(ii) ils sont deux à deux disjoints ;
(iii) leur réunion forme E_n.

(L'ordre des sous-ensembles n'importe pas : par exemple, $\{1, 4\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3, 5\}$ forme une partition de $[\![1, 5]\!]$ en 3 parties, qui est la même que la partition : $\{2\} \sqcup \{1, 4\} \sqcup \{5, 3\}$.)

On note $S_{p,n}$ le nombre de partitions de E_n en p parties.

Définition : les nombres $S_{p,n}$ s'appellent les "nombres de Stirling de deuxième espèce".

1) Que vaut $S_{p,n}$ pour $p = 1$? $p = n$? $p = 0$? $p \geq n + 1$?

2) Déterminer chacun des nombres $S_{2,2}$, $S_{2,3}$, $S_{2,4}$, $S_{3,4}$, $S_{2,5}$, $S_{3,5}$ et $S_{4,5}$.

3) Démontrer la relation :

$$\forall\, p \geq 2\,,\ \forall\, n \geq 2\,,\quad S_{p,n} = S_{p-1,n-1} + p \times S_{p,n-1}\,.$$

5) De quelle façon pourrait-on décrire l'ensemble des partitions de $[\![1,6]\!]$ en 3 parties ?

6) On pose $u_n = S_{2,n}$ pour $n \geq 2$. Vérifier que l'on a :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \end{cases}.$$

En déduire la valeur de u_n pour tout $n \geq 2$. Peut-on donner un sens ou une valeur à l'entier u_1 ? Déterminer les valeurs numériques de $S_{2,9}$ et $S_{2,10}$.

7) Est-il possible de déterminer la valeur de $S_{2,n}$ par un raisonnement combinatoire direct sans utiliser de récurrence ?

8) a) On pose $v_n = S_{3,n}$ pour $n \geq 3$. Vérifier que l'on a :

$$\begin{cases} v_3 = 1 \\ v_{n+1} = 3\,v_n \, + \, 2^{n-1} - 1 \end{cases}.$$

b) On pose $w_n = v_n - 1/2$ pour $n \geq 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $(w_n)_{n\geq 3}$ et calculer w_3.

c) Déterminer une valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la suite $(t_n)_{n\geq 3}$ définie par : $t_n = w_n + \alpha \cdot 2^n$ soit une suite géométrique de raison 3. Pour cette valeur de α, déterminer t_3 puis déterminer t_n pour $n \geq 3$.

d) En déduire les valeurs de w_n puis de v_n pour $n \geq 3$. Vérifier que l'on retrouve bien les mêmes valeurs pour $S_{3,7}$ et $S_{3,8}$ que celles que l'on avait calculées à la question 4, puis donner la valeur de $S_{3,9}$ et de $S_{3,10}$.

Exercice 5 (Nombres de Bell)

On note B_n, qu'on appelle « n-ième nombre de Bell », le nombre de toutes les partitions de $E_n = \{1, \dots, n\}$ (pour $n \geq 0$).

a) En utilisant ce qui précède, déterminer les nombres B_0, B_1, B_2, $\dots$, B_8 (on fera attention au fait que l'ensemble vide admet une unique partition).

b) Montrer qu'on a la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot B_{n-k}\,.$$

En déduire la valeur de B_9.

Exercice 6 (Nombres de surjections)

Pour p et n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\sigma_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ (c'est-à-dire le nombre d'applications f de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ telles que tout élément de $[\![1,p]\!]$ possède au moins un antécédent par f).

a) Que vaut $\sigma_{n,p}$ pour $p > n$? pour $p = n$?

b) Que vaut $\sigma_{n,1}$ pour $n \geq 1$?

c) Montrer que l'on a la relation :

$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2\,, \quad \sigma_{n,p} \; = p!S_{p,n}\,.$$