Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Combinatoire : Examen terminal

Le 10 janvier 2008, durée 2 heures.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1
Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 600 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?

Exercice 2
Dans le groupe $\mathfrak{S}_6$, quel est le nombre de solutions de l'équation $g^4 = e$?

Exercice 3 (question de cours)
Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Démontrer la formule de Burnside :

$$|X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

où pour tout $g \in G$, X^g désigne l'ensemble des éléments de X invariants sous g.

Exercice 4
Dix balles de différentes couleurs sont placées dans un tableau triangulaire de quatre lignes, la première ligne comportant une seule balle, la seconde, deux, la troisième trois et la quatrième quatre (comme au billard, *cf.* figure 1). On veut compter le nombre de manières d'arranger les balles, aux rotations du triangle près. On peut encore reformuler le problème ainsi : on cherche à compter le nombre de coloriages des sommets de la figure 2 modulo les rotations du triangle équilatéral.

figure 1 figure 2

On notera G le groupe des isométries directes du triangle équilatéral (constitué de trois rotations). On numérote les sommets de la manière suivante.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

On notera E l'ensemble des sommets et on l'identifiera, *via* cette numérotation, à l'ensemble $\{1, \ldots, 10\}$.

1) On note $\alpha : G \longrightarrow \mathfrak{S}(E) = \mathfrak{S}_{10}$ le morphisme correspondant à l'action de groupe de G sur E. Pour chaque rotation g du triangle, donner la permutation $\alpha(g)$ de E associée, et la décomposer en produit de cycles disjoints.
2) En déduire le nombre de coloriages des éléments de E avec deux couleurs, modulo les rotations du triangle.
3) Quel est le nombre de façons de placer quatre balles rouges et six balles blanches dans un triangle (comme dans la figure 1), aux rotations du triangle près.
4) Même question avec cinq balles rouges et cinq balles blanches.

Exercice 5

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins dans $\mathbb{N}^2$ partant de $(0,0)$ et composés d'un nombre fini de pas élémentaires vers le haut $(x,y) \to (x,y+1)$ et vers la droite $(x,y) \to (x+1,y)$. La taille d'un chemin de $\mathcal{C}$ est défini comme le nombre de pas de ce chemin. On remarque que $\mathcal{C}$ contient un chemin de longueur nulle, partant de $(0,0)$ et arrivant au même point. On note $\{\circ\}$ le singleton composé de l'unique chemin de longueur nulle de $\mathcal{C}$. De même, on note $\{\rightarrow\}$ le singleton composé du chemin consistant en un pas vers la droite, et $\{\uparrow\}$ le singleton composé du chemin consistant en un pas vers le haut.

1a) Combien $\mathcal{C}$ contient-il de chemins de longueur n ?
1b) Combien de chemins de $\mathcal{C}$ de longueur n terminent sur la droite d'équation $y = x$?
1c) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Combien de chemins de $\mathcal{C}$ de longueur n terminent sur la droite d'équation $y = x + p$?

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{C}_k$ comme l'ensemble des chemins de $\mathcal{C}$ qui restent à l'intérieur de la bande $\{(x,y) \mid x \leq y \leq x+k\}$ et qui terminent sur la droite d'équation $y = x$.

2a) Calculer la série génératrice de $\mathcal{C}_0$.
2b) Pour $k > 0$, montrer que

$$\mathcal{C}_k \cong \{\circ\} + \{\uparrow\} \times \mathcal{C}_{k-1} \times \{\rightarrow\} \times \mathcal{C}_k.$$

2c) Traduire cet isomorphisme combinatoire en termes de séries génératrices. En déduire une expression de la série génératrice de $\mathcal{C}_k$ en fonction de la série génératrice de $\mathcal{C}_{k-1}$.
2d) Montrer que pour tout k, la série génératrice de $\mathcal{C}_k$ est une fraction rationnelle.
2e) Pour k fixé, quel type de relation de récurrence vérifie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_k$?

3a) Montrer que la série génératrice de $\mathcal{C}_2$ est égale à $\frac{1-z^2}{1-2z^2}$.
3b) Calculer le développement en série formelle de $\frac{1-u}{1-2u}$.
3c) Quel est le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_2$? Retrouver ce résultat par une méthode directe.
3d) Quel est le nombre de chemins de longueur n de $\mathcal{C}_2$ qui touchent (au moins une fois) la droite d'équation $y = x + 2$?

On définit $\mathcal{C}^+$ comme l'union croissante $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ – attention, ce n'est pas une union disjointe.

4a) Décrire en une phrase les chemins de $\mathcal{C}^+$.
4b) Calculer la série génératrice de $\mathcal{C}^+$.
4c) En déduire le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}^+$.