Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Combinatoire : Examen terminal, session 2.

Mercredi 18 Juin, Durée : 2h.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1
On rappelle qu'une partition d'entier est une suite finie décroissante (au sens large) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ d'entiers strictement positifs (autrement dit, les λ_i sont des entiers vérifiant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p > 0$). Les λ_i sont appelés les parts de la partition λ. On note $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p$. Les partitions d'entier vérifiant $|\lambda| = n$ sont appelées les partitions de l'entier n. Il existe une partition composée d'aucune part, notée $()$; c'est l'unique partition de l'entier 0. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les partitions d'entier.

a) Donner toutes les partitions de l'entier 4.
b) Rappeler quelle est la série génératrice $P(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} z^{|\lambda|}$ (vue en cours) des partitions d'entier, exprimée comme un produit infini.
c) Soit $k \geqslant 0$. On note $\mathcal{P}^{\{1,\ldots,k\}}$ les partitions d'entier en parts de taille au plus k (c'est-à-dire les partitions d'entier $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ vérifiant $\lambda_1 \leqslant k$). Calculer la série génératrice $P^{\{1,\ldots,k\}}(z)$ de $\mathcal{P}^{\{1,\ldots,k\}}$.
d) Soit n et k deux entiers. Montrer que le nombre de partitions de l'entier n en au plus k parts est égal au nombre de partitions de l'entier n en parts de tailles au plus k (on pourra faire un petit dessin basé sur les diagrammes de Ferrers vus en cours).
e) En déduire la série génératrice de $\mathcal{P}^{(\leqslant k)}$, les partitions d'entier en au plus k parts.

Étant donné une partition d'entier $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, on définit $d(\lambda)$ le plus grand entier k tel que $\lambda_k \geqslant k$.

f) Donner une partition λ de l'entier 14 vérifiant $d(\lambda) = 3$.
g) Existe-t-il une partition λ de l'entier 14 vérifiant $d(\lambda) = 4$?

Pour une suite d'entiers naturels décroissante (au sens large) $a = (a_1, \ldots, a_p)$, on définit $Z(a) = (a_1, \ldots, a_q)$ où q est le plus grand entier vérifiant $a_q > 0$; autrement dit, Z supprime tous les zéros (finaux) de la séquence. Ainsi $Z((3, 2, 0, 0)) = (3, 2)$ et $Z((0, 0, 0)) = ()$. Pour une partition d'entier $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, on définit

$$\mu(\lambda) = Z(\ (\lambda_1 - d(\lambda), \lambda_2 - d(\lambda), \ldots, \lambda_{d(\lambda)} - d(\lambda))\ ).$$

On définit aussi $\nu(\lambda) = (\lambda_{d(\lambda)+1}, \ldots, \lambda_p)$ – en particulier $\nu(\lambda) = ()$ dans le cas où $p = d(\lambda)$.

h) Pour λ une partition d'entier, montrer que $\mu(\lambda)$ et $\nu(\lambda)$ sont des partitions d'entier.
i) Soit $\mathcal{D}_k = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid d(\lambda) = k\}$. Exhiber une bijection entre $\mathcal{D}_k$ et $\mathcal{P}^{(\leqslant k)} \times \mathcal{P}^{\{1,\ldots,k\}}$.
j) Exprimer $|\lambda|$ en fonction de $|\mu(\lambda)|$, $|\nu(\lambda)|$ et $d(\lambda)$.
k) En déduire que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} \left(P^{\{1,\ldots,k\}}(z)\right)^2.$$

Exercice 2

1) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot FRAMBOISE ?
2) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot PAMPLEMOUSSES ?

Exercice 3

Il faut élire cinq personnes pour constituer le bureau du *Rotary Club*, qui compte vingt-deux membres, dont dix hommes et douze femmes.
1) De combien de façons peut-on former ce bureau ?
2) On souhaite maintenant qu'il y ait au moins deux femmes dans le bureau. Combien reste-t-il de possibilités ?
3) De plus, M. Smith et Mme Smith refusent d'être ensemble dans le bureau. Combien reste-t-il de possibilités (en gardant la condition précédente) ?

Exercice 4

Soit G le groupe de $\mathfrak{S}_8$ engendré par les deux permutations

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On désigne par e la permuation identité et par ba le composé $b \circ a$.
1) Décomposer a et b en produit de cycles disjoints. En déduire les signatures de a et b.
2) Vérifier les relations suivantes : $a^4 = b^4 = e$, $a^2 = b^2$, $aba = b$ et en déduire : $a^3b = ab^3 = ba$, $bab = a$ et $b^3a = ba^3 = ab$.
3) Prouver que G est d'ordre 8 et formé des éléments tous distincts suivants :

$$e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3.$$

Exercice 5

On rappelle la formule de Burnside : si G est un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, on a

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

où pour tout $g \in G$, X^g désigne l'ensemble des éléments de X invariants sous g.

Les neuf cases d'un échiquier de taille 3×3 sont coloriées en rouge et en bleu. L'échiquier est libre de tourner (rotations d'angles 0, $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$) mais on ne peut pas le retourner (pas de symétries).
1) Pour chaque rotation g de l'échiquier, donner la permutation $\alpha(g)$ des cases de l'échiquier associée, et la décomposer en produit de cycles disjoints. (On numérotera les cases de l'échiquier pour décrire les permutations.)
2) En déduire le nombre de coloriages de l'échiquier, aux rotations près.
3) Un vitrail carré est composé de 9 carreaux carrés. Il a la forme d'un échiquier de taille 3×3. Chacun des carreaux est soit rouge, soit bleu. Les carreaux sont transparents et le vitrail peut être regardé d'un côté comme de l'autre, dans tous les sens. Combien y a-t-il de vitraux différents ?