Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160

Plan du cours de combinatoire.

1 Les bases du dénombrement (S. Brochard)

a) Définitions. On dit que deux ensembles ont même cardinal s'ils sont en bijection. Lemme : Si $\{1, \ldots, n\}$ est en bijection avec $\{1, \ldots, p\}$ alors $n = p$. Définition : le cardinal d'un ensemble fini est l'unique entier n tel que l'ensemble soit en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$. Exemples simples.
b) Principes de comptage. Principe des bergers (cardinal d'un ensemble fini étant donné une partition de cet ensemble). Principe des tiroirs. Cardinal du produit, de l'ensemble des fonctions de X dans Y, de l'ensemble des parties d'un ensemble fini. Principe « d'inclusion-exclusion »(cardinal de la réunion de deux sous-parties).
c) Arrangements et combinaisons. Définition d'un arrangement, d'une combinaison de p éléments parmi n. Exemples simples. Calcul en termes de factorielles. Triangle de Pascal. Binôme de Newton.

2 Groupes de permutation (S. Brochard)

a) Rappels sur les groupes. Définition. Sous-groupe. Morphisme de groupes. Noyau et image d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Groupes monogènes, groupes cycliques. Ordre d'un élément.
b) Le groupe symétrique. Définition et cardinal du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations d'un ensemble à n éléments. Orbites associées à une permutation σ (ce sont les classes d'équivalence pour la relation $a \sim b$ ssi a est l'image de b par une puissance de σ). Cycle d'ordre p. Transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints. Applications : calcul de l'ordre d'une permutation, les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.
c) Signature. Définition par la formule $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$ où k est le nombre d'orbites associées à σ. Signature d'une transposition, d'un cycle de longueur p. Théorème : la signature est un morphisme de groupes. Corollaire : signature du produit de N transpositions. Permutations paires, impaires, groupe alterné.

3 Actions de groupes et combinatoire (S. Brochard)

Le but de ce chapitre est de donner une méthode pour compter le nombre de façons de « colorier » les éléments d'un ensemble fini X, *modulo l'action d'un groupe de transformations de* X. Exemples : nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec trois couleurs, nombre de colliers différents faits de n perles rouges et bleues, ...
a) Définitions. Action d'un groupe G sur un ensemble X. Orbites. Ensemble quotient. Système de représentants. Stabilisateur d'un élément de X. Ensemble des invariants de X sous un élément de G. Exemples issus de la théorie des groupes (actions d'un sous-groupe sur le groupe, groupe de permutations) et de la géométrie (action des groupes linéaires sur $\mathbb{R}^n$). Morphisme $G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ correspondant à une action. Proposition : si deux éléments sont dans la même orbite, leurs stabilisateurs sont conjugués.
b) Formule des classes, formule de Burnside. On suppose dorénavant X et G finis. Le cardinal d'une orbite est le quotient du cardinal du groupe par celui du stabilisateur. Équation aux classes. Formule de Burnside. Application : résolution des problèmes posés en introduction.

4 Séries génératrices (H. Fournier)

a) Séries formelles. Algèbre $k[[X]]$ des séries formelles à une indéterminée sur un corps k. Éléments inversibles. Composition. Développement en série formelle d'une fraction rationnelle sans pôle en 0.

Pour I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, le développement de Taylor en 0 est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de $C^\infty(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}[[X]]$, surjectif (non démontré), non injectif.

b) Séries génératrices ordinaires. Définition d'une classe combinatoire : ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une application taille $|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{a \in \mathcal{A}, |a| = n\}$ est fini. Série génératrice $\sum_{a \in \mathcal{A}} z^{|a|} \in \mathbb{R}[[z]]$ associée à une classe combinatoire. Union disjointe et produit cartésien de deux classes combinatoires, classe combinatoire des séquences d'une classe combinatoire. Traduction en terme de séries génératrices de ces opérations. Application au dénombrement des arbres de Catalan.

c) Séries génératrices exponentielles. Opérations de base sur les classes combinatoires étiquetées et traduction en termes de séries génératrices exponentielles. Application au dénombrement des arbres de Cayley.