Feuille de TD n°1b : Séries formelles

Exercice 1. – Composition.

a) Soient $S, T \in k[[X]]$ avec $\mathrm{ord}(S) = a$, et $\mathrm{ord}(T) = b \geqslant 1$. Quel est l'ordre de $S \circ T$?
b) Soient $S, T, U \in k[[X]]$ avec $\mathrm{ord}(T) \geqslant 1$ et $\mathrm{ord}(U) \geqslant 1$. Montrer que $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$.

Exercice 2. – Dérivée d'une série formelle.

Soient $S, T \in k[[X]]$.
a) Montrer que $(ST)' = S'T + ST'$.
b) Si $\mathrm{ord}(S) = 0$, montrer que $(S^{-1})' = -S'(S^{-1})^2$.

Exercice 3. – Développement en séries entières de fractions rationnelles.

a) Développer en séries formelles les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(1-X)(1-2X)}; \; \frac{1}{1-X^5}.$$

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, le développement en série formelle de la fraction $\frac{1}{(1-X)^{p+1}}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1-X)^{p+1}} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{p+n}{n} X^n.$$

(Cf exercice 15 de la feuille de TD n°1 : Les bases du dénombrement.)
c) Développer en série formelle $\frac{1}{1+X+X^2....+X^{p-1}}$.
d) Développer en série formelle $\frac{1}{(1+X)^2}$ selon trois méthodes.

Exercice 4. – Développements de fractions rationnelles et suites récurrentes linéaires.

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in k[[X]]$ est le développement en série formelle d'une fraction rationnelle sans pôle en 0 si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in k$, $\alpha_p \neq 0$, tels que pour tout $n \geqslant N$:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_p a_{n-p}.$$

Exercice 5. – Séries de Taylor.

a) Calculer les séries formelles $S = \sin X$ et $C = \cos X$.
b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculer la série de Taylor (en 0) de $x \mapsto P(x)$.
c) Que vaut $S^2 + C^2$?
d) Calculer la série formelle $\sqrt{1-X}$.

Exercice 6. – Propriétés arithmétiques de $k[[X]]$.

a) Montrer que tout idéal non nul de $k[[X]]$ est de la forme (X^n).
b) En déduire que $k[[X]]$ est principal (et donc factoriel). Déterminer ses éléments irréductibles.
c) Montrer que $k[[X]]$ est euclidien.

Exercice 7. – Corps des fractions de $k[[X]]$.

Montrer que le corps des fractions de $k[[X]]$ est isomorphe à l'ensemble des séries de la forme $\sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n$ où $n_0 \in \mathbb{Z}$ dépend de la série, muni des opérations qui étendent naturellement celles définies sur $k[[X]]$. Ce corps est appelé séries de Laurent et noté $k((X))$.

Exercice 8. – Séries formelles de plusieurs variables.

Si A est un anneau commutatif, on définit l'algèbre $A[[X]]$ de la même façon que sur un corps.
a) Montrer que si A est commutatif et intègre, il en est de même de $A[[X]]$.
b) Quels sont les éléments inversibles de $A[[X]]$?

Note. Ceci permet de parler de $k[[X]][[Y]]$, qui est isomorphe à $k[[X,Y]]$ défini comme le k-espace vectoriel des applications de $\mathbb{N}^2$ dans k (dont les éléments seront encore une fois notés $\sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j$) muni du produit $(\sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j)(\sum_{i,j} b_{i,j} X^i Y^j) = \sum_{i,j} c_{i,j} X^i Y^j$ où $c_{i,j} = \sum_{(i_1,j_1)+(i_2,j_2)=(i,j)} a_{i_1,j_1} b_{i_2,j_2}$. Dans le cadre des séries génératrices, il est utile de considérer des séries à deux variables pour étudier un paramètre sur les objets énumérés (par exemple la hauteur d'un arbre).

Exercice 9. – Complément : théorème de Borel.

a) Montrer que la fonction θ définie par $\theta(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $\theta(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$, est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) À l'aide de θ, construire une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est strictement positive sur $]0, 1[$ et nulle en dehors.
c) En déduire qu'il existe une fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 pour $x \leqslant 0$ et 1 pour $x \geqslant 1$.
d) En déduire qu'il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geqslant 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1/2$.
e) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. Pour une suite réelle $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à choisir ultérieurement, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x).$$

Montrer que si λ_n tend vers l'infini, la série définissant f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
f) Choisir $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.
g) Pour un tel choix de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer $f^{(n)}(0)$.
h) En déduire le théorème de Borel : pour toute suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.