**Université de Versailles – Saint-Quentin**
Licence – 3$^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160 : Combinatoire

# Feuille de TD n°1 : Les bases du dénombrement.

*On note $E$ l'ensemble : $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, que l'on appelera ci-dessous "l'alphabet $E$".*

## Exercice 1

*On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de 8 lettres prises chacune dans l'alphabet $E$, comme par exemple* "'aaaaaaaa", "ebecbfdc" *ou* "aebcfdea". *Dans les questions suivantes, on demande à chaque fois de déterminer combien il existe de mots dans $\mathcal{M}$ qui vérifient une certaine propriété.*

1) Quel est le nombre total de mots de $\mathcal{M}$ ?

2) Quel est le nombre de ceux qui commencent par un $a$ ?

3) Quel est le nombre de ceux qui commencent et finissent par un $a$ ?

4) Quel est le nombre de mots qui contiennent au moins une fois la lettre $a$ ?

5) Nombre de mots qui contiennent exactement une fois la lettre $a$.

6) Nombre de mots qui s'écrivent avec au plus 2 lettres différentes.

7) Nombre de mots tels que deux lettres consécutives sont toujours différentes.

8) Nombre de mots tels que chaque lettre diffère des deux suivantes.

9) Nombre de mots tels que toutes les lettres sont différentes.

10) Nombre de mots tels que, si la lettre $a$ apparaît, elle est toujours suivie d'un $b$.

11) Nombre de mots dans lesquels chaque lettre qui apparaît est utilisée exactement deux fois.

12) Nombre de mots tels que chaque lettre qui apparaît est utilisée au moins deux fois.

## Exercice 2 (Permutations)

*On considère à présent l'ensemble $\mathcal{P}$ des mots de 6 lettres que l'on peut écrire avec l'alphabet $E$ et qui sont tels que chaque lettre de $E$ apparaisse exactement une fois.*

*On note $m_0$ le mot particulier* "abcdef". *On dira qu'un élément de $\mathcal{P}$ représente une "permutation de l'ensemble $E$", ou plus rarement une "permutation du mot $m_0$".*

1) Combien existe-t-il de mots dans $\mathcal{P}$ ?

2) Quel est le nombre de mots de $\mathcal{P}$ qui commencent et finissent par une voyelle ?

3) Quel est le nombre de mots de $\mathcal{P}$ qui ne commencent ni ne finissent par la lettre "*a*" ?

4) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les voyelles apparaissent consécutivement.

5) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les voyelles sont séparées par exactement une consonne.

6) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les lettres "*bcd*" apparaissent consécutivement et dans cet ordre.

7) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les lettres $b, c, d$ apparaissent consécutivement (mais pas forcément dans cet ordre).

8) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les lettres $b, c, d$ apparaissent dans cet ordre (mais pas forcément consécutivement).

9) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels que les lettres "$b, c, d$" n'apparaissent jamais l'une à côté de l'autre.

10) Nombre de mots de $\mathcal{P}$ tels qu'exactement deux lettres sont à une place différente que dans $m_0$.

**Exercice 3**

Un étudiant a onze semaines pour préparer un examen. Il décide de faire au moins un exercice par jour. Pour ne pas s'épuiser, il décide aussi de ne pas faire plus de douze exercices par semaine. Montrer qu'il existe une suite de jours consécutifs au cours de laquelle il aura fait exactement vingt-et-un exercices. Même question en remplaçant 21 par un entier quelconque entre 1 et 21. Peut-on remplacer 21 par 22 ?

**Exercice 4**

Dix personnes de moins de 60 ans sont dans une pièce (l'âge d'une personne est un nombre entier). Montrer que l'on peut constituer deux groupes de personnes qui n'ont aucun membre en commun, tels que la somme des âges des personnes d'un groupe soit égale à la somme des âges des personnes de l'autre groupe. *(Remarque : Tout le monde n'est pas obligé d'appartenir à un groupe.)*

**Exercice 5**

Une « main » au poker est constituée de cinq cartes choisies dans un jeu de cinquante-deux. Combien y a-t-il de mains ? Combien de mains contiennent exactement une paire ? Combien de mains contiennent au moins une paire ?

**Exercice 6**

Démontrer de façon numérique et de façon combinatoire la relation :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \tag{1}$$

**Exercice 7**

a) Démontrer la relation :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \times \binom{n-1}{p-1} \tag{2}$$

b) Interpréter cette relation de façon combinatoire. *(On pourra considérer les couples $(x, A)$ vérifiant $x \in A$, où $A$ est une partie d'un ensemble $E$ bien choisi.)*

**Exercice 8**

a) Prouver la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{3}$$

b) Que signifie cette relation dans le triangle de Pascal ?

c) Démontrer cette égalité de façon purement combinatoire.

**Exercice 9**

a) Démontrer la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \ (-1)^n \ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \ = \ 0\,. \tag{4}$$

b) Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble à $n$ éléments. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ contient toujours autant d'éléments de cardinal pair que d'éléments de cardinal impair. *(On pourra distinguer, parmi les parties de $E$, celles qui contiennent l'élément $e_n$ et celles qui ne le contiennent pas.)*

c) En déduire la valeur des sommes $S_i = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} n \\ 2p+1 \end{pmatrix} + \dots$ et $S_p = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} n \\ 2p \end{pmatrix} + \dots$.

d) En déduire une nouvelle démonstration de la relation (4).

**Exercice 10**

*(Relation de Cauchy-Vandermonde)*

a) Démontrer la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} m+n \\ p \end{pmatrix} \ = \ \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ p-k \end{pmatrix}. \tag{5}$$

b) Qu'obtient-on pour $m = n$ ? Pour $m = n = p$ ?

**Exercice 11**

*(Nombres triangulaires)*

a) En comptant de deux manières différentes le nombre des couples $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$ qui vérifient $i < j$, démontrer la relation :

$$1 + 2 + \cdots + n \ = \ \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{6}$$

b) Connaissez-vous une autre démonstration de cette relation ?

c) En déduire que les nombres $u_n = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ *("nombres triangulaires")* vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

**Exercice 12**

*(Nombres tétraédriques)*

Un(e) marchand(e) d'orange forme sur son étal une pyramide d'oranges de la manière suivante : il (elle) forme à plat sur l'étal un triangle équilatéral d'oranges tel que chaque côté contient exactement $n$ oranges, puis il (elle) dispose une deuxième couche en plaçant une orange dans chaque "trou" de la première couche, et ainsi de suite jusqu'à la dernière couche qui ne contient qu'une seule orange.

Combien la pyramide contient-elle d'oranges en tout ?

**Exercice 13**

Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 300 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?

**Exercice 14**

Parmi les permutations de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ *(que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E)*, combien y en a-t-il qui ne contiennent ni "$ab$" ni "$cd$" ni "$ef$" ?

**Exercice 15**

Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre de $k$-uplets $(u_1, \ldots, u_k)$ d'entiers naturels vérifiant l'égalité :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = n.$$

**Exercice 16**

De combien de façons peut-on distribuer 25 bonbons entre 15 enfants ? Même question avec la condition supplémentaire que chaque enfant doit recevoir au moins un bonbon.

**Exercice 17**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles de cardinaux respectifs $p$ et $n$.
1) Quel est le nombre total d'applications de $E$ dans $F$ ?
2) Déterminer le nombre d'injections de $E$ dans $F$.

**Exercice 18**

Soient $p$ et $n$ deux entiers non nuls.
1) Déterminer le nombre de fonctions strictement croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.
2) Déterminer le nombre de fonctions croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.
3) Déterminer le nombre de fonctions croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ dont l'image contient $a$, où $a$ est un élément fixé de $\{1, \ldots, n\}$.