Feuille de TD n°2b : Séries génératrices ordinaires

Exercice 1. – Chemins de Dyck.

Les chemins de Dyck sont les mots u sur $\{h, b\}$ possédant autant de h que de b et tels que tout préfixe de u contient au moins autant de h que de b. On définit la taille d'un chemin de Dyck comme le nombre de h qu'il contient (c'est-à-dire la moitié de la longueur du mot).

a) Donner une interprétation graphique de la définition.
b) Calculer la série génératrice des chemins de Dyck.
c) Combien y a-t-il de chemins de Dyck de longueur n ?

Exercice 2. – Une méthode bijective pour dénombrer les chemins de Dyck.

On tourne le dessin de l'exercice précédent de 45 degrés vers la gauche : les chemins de Dyck de longueur n correspondent aux chemins partant de $(0, 0)$ et arrivant à (n, n) avec des pas de la forme $(x, y) \to (x + 1, y)$ et $(x, y) \to (x, y + 1)$, et ne passant pas (strictement) sous la diagonale.

a) Combien y a-t-il de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) en tout (ie ces chemins peuvent ou non passer sous la diagonale) ?
b) On veut maintenant compter les chemins de longueur n qui passent sous la diagonale. Expliciter une bijection entre ces chemins et les chemins (sans restriction, mais toujours sur les deux mêmes pas élémentaires) qui vont de $(0, 0)$ à $(n+1, n-1)$. En déduire le nombre de chemins de longueur n qui passent sous la diagonale.
c) En déduire le nombre de chemins de longueur qui ne passent pas sous la diagonale, ie le nombre de chemins de Dyck de longueur n.

Exercice 3. – Chemins de Motzkin.

Un chemin de Motkin de longueur n est un chemin de $(0, 0)$ à $(0, n)$ constitué des pas élémentaires $(x, y) \to (x + 1, y)$, $(x, y) \to (x + 1, y + 1)$ et $(x, y) \to (x + 1, y - 1)$, et ne passant pas sous la droite d'équation $y = 0$.

a) Calculer la série génératrice des chemins de Motzkin.
b) Calculer le nombre de chemins de Motzkin de longueur n.
c) Retrouver ce résultat par une méthode bijective (en supposant connu le nombre de chemins de Dyck d'une longueur donnée).

Exercice 4. – Arbres enracinés planaires.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des arbres finis avec un sommet marqué (appelé racine), et en chaque sommet un ordre sur les voisins qui ne mènent pas à la racine. On définit la taille d'un tel arbre comme étant son nombre de sommets.

a) Décrire $\mathcal{A}$ à partir des constructions de bases.
b) En déduire la série génératrice ordinaire énumérant $\mathcal{A}$.
c) Combien y a-t-il d'arbres de taille n ?
d) La classe $\mathcal{A}$ est donc isomorphe à une autre classe vue en cours. Laquelle ? Expliciter un isomorphisme (naturel) entre ces deux classes.

Exercice 5. – Triangulation de polygones convexes.

De combien de façons peut-on couper un polygone convexe (dont les sommets sont numérotés[1] de 1 à n) selon des cordes de sorte à n'avoir plus que des triangles ? L'ordre de découpe ne compte pas, on ne s'intéresse qu'au nombre de découpages différents obtenus.

Exercice 6. – Partitions d'un intervalle en segments de différentes longueurs.

De combien de façons peut-on partitionner $[0, n[$ en segments $[x_i x_{i+1}[$ de longueurs 1, 2 et 3 ?

Exercice 7. – Mots avec un facteur interdit.

Combien y a-t-il de mots de longueur n sur $\{a, b\}$ ne possédant pas abb comme facteur ?

Exercice 8. – Partitions d'un entier.

Une partition λ de $n \in \mathbb{N}$ est une séquence d'entiers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ $(p \in \mathbb{N})$ telle que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_p > 0$ et $\sum_i \lambda_i = n$. Les λ_i sont appelées les parts de la partition λ. Dans la suite de cet exercice, on s'intéresse à la taille $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$.

a) Écrire (sous la forme d'un produit infini) la série génératrice des partitions d'entiers en parts de tailles impaires.
b) Écrire la série génératrice des partitions d'entiers en parts distinctes.
c) En déduire que pour tout n, le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires.

[1] Penser à un gâteau avec un fruit différent en chaque sommet.