Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – 3ème année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160 : Combinatoire

Feuille de TD n°2 : Le groupe symétrique.

Exercice 1

Soit G un groupe et soient a et b deux éléments de G d'ordres m et n premiers entre eux. On suppose de plus que a et b commutent, c'est-à-dire que $ab = ba$. Montrer que le produit ab est d'ordre fini égal à mn.

Exercice 2

Décomposer en produit de cycles disjoints les permutations suivantes :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer les ordres et les signatures de ces permutations. Calculer a^{201}, b^{198} et c^{1000}.

Exercice 3

On considère les trois permutations suivantes, éléments de $\mathfrak{S}_9$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les signatures de a, b et c. Décomposer la permutation $\sigma = ab^2c$ en produit de cycles disjoints et calculer σ^{25}.

Exercice 4

Soit s une permutation de $\mathfrak{S}_{10}$ d'ordre 14.
1) Donner un exemple d'une telle permutation.
2) Prouver que s est nécessairement impaire.
3) Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 14 de $\mathfrak{S}_{10}$.

Exercice 5

Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 8 du groupe $\mathfrak{S}_{42}$. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 20 dans le groupe $\mathfrak{S}_{15}$?

Exercice 6

Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On dit qu'un élément x de $\{1, \ldots, n\}$ est un point fixe pour σ si $\sigma(x) = x$.
1) Déterminer le nombre de permutations qui fixent l'entier 3.
2) Déterminer le nombre de permutations qui ont au moins un point fixe.
3) Pour tout $k \leq n$, déterminer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont au moins k points fixes.

4) Pour tout $k \leq n$, déterminer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement k points fixes.

Exercice 7

On rappelle que le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres.
1) Déterminer les centres de $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$.
2) Soit s un élément de $\mathfrak{S}_n$ distinct de l'identité. Construire pour $n \geq 3$ une transposition qui ne commute pas avec s. En déduire le centre de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 3$.
3) Soit p la permutation circulaire $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ et s une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_n$. Calculer sps^{-1} (on cherchera l'image de $s(i)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$). Quelles sont les permutations qui commutent avec p ?
4) Plus généralement, déterminer quelles sont les permutations qui commutent avec un cycle de longueur p et de support $\{a_1, \dots, a_p\}$. Combien y en a-t-il ?

Exercice 8

Étudier l'ordre du produit de deux transpositions.

Exercice 9

1) Montrer que les transpositions $(k, k+1)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
2) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n-1$ transpositions $(1, 2), \dots, (1, n)$.
3) On pose $t = (1, 2)$ et $p = (1, 2, \dots, n)$. Montrer que $\{t, p\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10

Soit $n \geq 4$. Montrer que le groupe $\mathfrak{A}_n$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n-2$ cycles $(1, 2, 3), \dots, (1, 2, n)$ (on pourra étudier les produits $(1, 2)(i, j)$ et $(i, j)(1, 2)$).

Exercice 11

Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 12 (simplicité de $\mathfrak{A}_5$)

On rappelle qu'un groupe G est dit simple *si les seuls sous-groupes distingués de G sont $\{1\}$ et G. Le résultat de la question 8) ci-dessous (dû à Évariste Galois) est historiquement très important. Il permet en fait de montrer qu'il est impossible de résoudre « par radicaux » l'équation polynomiale générale de degré n lorsque n est supérieur ou égal à 5.*
1) Calculer les groupes $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{A}_3$ et montrer qu'ils sont simples.
2) Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $\mathfrak{A}_4$? Montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple.

Le but des questions qui suivent est de montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple. Soit H un sous-groupe distingué non trivial de $\mathfrak{A}_5$. Nous allons montrer que H est égal au groupe $\mathfrak{A}_5$ tout entier.
3) Combien le groupe $\mathfrak{A}_5$ a-t-il d'éléments au total ? Combien a-t-il d'éléments de chaque ordre ?
4) Montrer que tous les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$ et en déduire que si H contient un élément d'ordre 2, il les contient tous.
5) Montrer de même que si H contient un élément d'ordre 3, il les contient tous.
6) Montrer que si a et b sont deux éléments d'ordre 5 de $\mathfrak{A}_5$, alors b est un conjugué (dans $\mathfrak{A}_5$ toujours) de a ou de a^2. En déduire que si H contient un élément d'ordre 5, il les contient tous.
7) Montrer que H contient au moins deux des trois types d'éléments précédents (ordre 2, ordre 3 et ordre 5).

8) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Exercice 13 (automorphismes de $\mathfrak{S}_n$)

On dit qu'un automorphisme $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ est *intérieur* s'il existe un élément g de $\mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$ on ait :

$$\varphi(s) = gsg^{-1}.$$

1) Si s est un élément du groupe $\mathfrak{S}_n$, on note $c(s)$ son centralisateur, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec s. Montrer que $c(s)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
2) Si s est un élément de $\mathfrak{S}_n$ et φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$, alors $c(\varphi(s)) = \varphi(c(s))$.
3) Quels sont les éléments de $\mathfrak{S}_{10}$ qui commutent avec la permutation $(1, 2, 3) \circ (4, 5, 6, 7)$? Quel est le nombre de ces éléments ?
4) Plus généralement, soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On suppose que $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ où les k_i sont des entiers de $\{0 \ldots n\}$ et que σ est produit de k_1 cycles d'ordre 1, k_2 cycles d'ordre 2, ..., k_n cycles d'ordre n, tous ces cycles étant disjoints. Montrer que le cardinal de $c(\sigma)$ est

$$|c(\sigma)| = \prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}.$$

5) En utilisant les questions précédentes, montrer que si n est différent de 6, un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ transforme les transpositions en transpositions.
6) On suppose maintenant $n \neq 6$. Soit φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$. Pour tout $i \geq 2$ on note τ_i la transposition $(1, i)$. Montrer qu'il existe des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \{1, \ldots, n\}$ tels que pour tout $i \geq 2$ on ait $\varphi(\tau_i) = (\alpha_1, \alpha_i)$.
7) En déduire que tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur. (On rappelle que les τ_i engendrent $\mathfrak{S}_n$.)