Université de Versailles – Saint-Quentin
Licence – $3^{\text{ème}}$ année
Année universitaire 2007–2008
Module MI 160 : Combinatoire

Feuille de TD n°3 : Actions de groupes.

Exercice 1 (espace projectif)

Le groupe multplicatif $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de la manière suivante :

$$\mu\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) & \longmapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{cases} .$$

Décrire l'ensemble quotient lorsque n vaut 1, 2 ou 3.

Exercice 2

1) Soit X un ensemble et G un groupe fini agissant sur X. On suppose que $|X/G|$ est fini. Montrer que X est fini.
2) Donner un exemple où X est infini et $|X/G|$ fini de cardinal n.
3) Trouver un groupe G agissant sur $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R}/G$ soit de cardinal 2.
4) Soit X un ensemble de cardinal 30, et soit G un groupe de cardinal 20 agissant sur X. Quelles sont les valeurs possibles pour le cardinal d'une orbite de X ? Pour le cardinal du stabilisateur d'un élément de X ? Vérifier que les valeurs proposées sont effectivement possibles en donnant des exemples.

Exercice 3

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Vrai ou faux ? (Répondre en donnant une démonstration ou un contre-exemple, ou en citant un théorème du cours...)
1) On a toujours $|X/G| = |X|/|G|$.
2) Si toutes les orbites ont même cardinal, alors $|X/G| = |X|/|G|$.
3) Si $|X/G| = |X|/|G|$, alors toutes les orbites ont même cardinal.
4) Soit g un élément de G. Alors $|X^g|$ divise $|G|$.
5) Soit g un élément de G. Alors $|X^g|$ divise $|X|$.
6) Soit x un élément de X. Alors $|O(x)|$ divise $|G|$.
7) Soit x un élément de X. Alors $|\mathrm{Stab}\,(x)|$ divise $|G|$.
8) Soit x un élément de X. Alors $|O(x)|$ divise $|X|$.
9) Soit x un élément de X. Alors $|\mathrm{Stab}\,(x)|$ divise $|X|$.

Exercice 4

Démontrer la formule de Burnside. *(Indication : on dénombrera de deux manières l'ensemble des couples (g, x) tels que $g.x = x$.)*

Exercice 5

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Soit $n \geq 1$ un entier. Alors G induit une action naturelle sur X^n que l'on explicitera. On note $[X^n]$ le sous-ensemble de X^n formé des n-uplets d'éléments deux à deux distincts (on suppose maintenant que $n \leq |X|$).
1) Montrer que G agit de manière naturelle sur $[X^n]$.
2) On suppose l'action de G sur $[X^n]$ est transitive (on dit alors que l'action de G sur X est n-transitive). Montrer que le nombre d'orbites de X^n sous G est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bell B_n.

(Indication : pour $n = 3$, les cinq orbites sont formées de triplets (x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (y, x, x), (x, y, z) où x, y et z sont deux à deux distincts.)

Exercice 6

On rappelle que le centre d'un groupe G est l'ensemble $Z(G)$ des éléments qui commutent avec tous les autres.

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G\, xy = yx\}$$

1) On fait agir G sur lui-même par conjugaison. Montrer qu'un élément x de G est dans le centre de G si et seulement s'il est seul dans son orbite.
2) Soit p un nombre premier, et soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe dont l'ordre est une puissance de p. En utilisant la formule des classes, montrer que le centre de G n'est pas trivial, *i.e.* n'est pas réduit à l'élément neutre (sauf si G est trivial).

Exercice 7

1) Montrer que le nombre de manières de placer n objets différents sur un cercle est $(n-1)!$. Vérifier que la formule de Burnside donne le même résultat.
2) Combien peut-on faire de colliers différents avec n perles différentes $(n \geq 3)$?

Exercice 8

1) En utilisant la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les sommets d'un pentagone régulier avec les couleurs rouge et vert (à isométrie près). Vérifier le résultat « à la main ».
2) Et avec trois couleurs ? Avec k couleurs ?

Exercice 9

Décrire le groupe G des isométries du cube (on admettra qu'il est d'ordre 24). On note S l'ensemble des sommets, et F l'ensemble des faces. On note $\alpha : G \longrightarrow \mathfrak{S}(S)$ et $\beta : G \longrightarrow \mathfrak{S}(F)$ les actions naturelles de G sur S et F. Pour tout g appartenant à G, expliciter les permutations $\alpha(g)$ et $\beta(g)$ (on numérotera les sommets et les faces).

Exercice 10

En utilisant l'exercice précédent et la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les sommets d'un cube avec trois couleurs.

Exercice 11

Combien peut-on faire de colliers de $2n$ perles différents avec n perles bleues et n perles rouges ?

Exercice 12

Combien existe-t-il de dodécaèdres réguliers avec six faces blanches et six faces noires (on admettra que le groupe des isométries du dodécaèdre est d'ordre 60) ?