

## Combinatoire : test de rentrée.

Mardi 18 septembre

*Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.*

1. Rappeler l'identité du triangle de Pascal.
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

3. Exprimer le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  à l'aide de factorielles.
4. Parmi dix personnes, combien y a-t-il de façons de désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire (sans cumul des mandats...) ?
5. La belote se joue avec 32 cartes. Au début du jeu, on donne cinq cartes à chacun des quatre joueurs. Combien y a-t-il de donnes possibles ?
6. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot FACILE ? du mot DIFFICILE ?
7. On choisit  $n+1$  entiers deux à deux distincts dans l'ensemble  $\{1, \dots, 2n\}$ . Montrer qu'il y a forcément deux entiers consécutifs parmi les entiers que l'on a choisis.
8. Jean-Paul a rangé  $n$  paires de chaussettes (donc  $2n$  chaussettes) dans un tiroir, sans prendre garde à préserver les paires. Le matin, il tire des chaussettes au hasard. Combien doit-il tirer de chaussettes au minimum pour être sûr de pouvoir reconstituer une paire ?
9. La fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle injective ? surjective ?
10. Mêmes questions avec la fonction  $g$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $g(n) = 2n$ .
11. Donner la définition d'un groupe.
12. Développer  $(x+y)^n$ .
13. Calculer  $1+2+\dots+n$ .
14. Combien y a-t-il de partitions de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  ? (les énumérer)
15. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  ?
16. Décomposer la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  en produit de cycles disjoints.
17. Quelle est la signature de cette permutation ?
18. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sqrt{1+x}$ .
19. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{1+x}$ .
20. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{\cos x - 1}{\sin x}$ .
21. Donner le rayon de convergence de la série  $\sum_{k=3}^{+\infty} x^k$  et calculer sa somme.
22. Mêmes questions avec la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$ .
23. On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels vérifiant la relation  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Quelle est la dimension de  $E$  ?

*Vrai ou faux ?*

- 24.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. On pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . Alors  $(u_n)$  est croissante si et seulement si  $v_n$  est positive.
- 25.** La composée de deux applications injectives est injective.
- 26.** Si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
- 27.** Si  $g \circ f$  est surjective, alors  $f$  est surjective.
- 28.** Si  $g \circ f$  est bijective, alors  $f$  est bijective.
- 29.** Les entiers 15 et 8 sont premiers entre eux.
- 30.** Si  $(u_n)$  est une suite de nombres réels, et si la série de terme général  $u_n$  converge, alors  $u_n$  tend vers 0.