Quelques corrigés d'exercices.

Exercice 3 sur les courbes paramétrées.
a) Puisque T fait un angle θ_0 avec u_0 et que ces deux vecteurs sont unitaires, on a $(T, u_0) = \cos\theta_0$.
b) En dérivant la relation précédente on obtient

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}, u_0\right) = 0$$

d'où en utilisant les formules de Frenet $\rho(N, u_0) = 0$ et finalement puisque ρ est supposée strictement positive $(N, u_0) = 0$. On en déduit que u_0 est dans le plan (T, B), donc on peut écrire $u_0 = \lambda T + \mu B$. En prenant le produit scalaire avec T on voit que $\lambda = \cos\theta_0$, et comme u_0 est unitaire, on doit avoir $\mu = \pm\sin\theta_0$. Il reste donc à déterminer le signe de μ pour pouvoir trancher entre $\sin\theta_0$ et $-\sin\theta_0$. On dérive pour cela la relation $(N, u_0) = 0$ et on obtient ainsi :

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}, u_0\right) = 0 = -\rho(T, u_0) + \tau(B, u_0)$$

ou encore

$$-\rho\cos\theta_0 + \tau\mu = 0, \tag{1}$$

ce qui montre que $\mu = \frac{\rho}{\tau}\cos\theta_0 > 0$ donc $\mu = +\sin\theta_0$, et finalement

$$u_0 = \cos\theta_0 T + \sin\theta_0 B.$$

c) L'équation 1 est exactement l'égalité demandée. On en déduit de plus que le rapport

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

est constant.
d) L'application tangente réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\frac{\rho}{\tau} = \tan\alpha.$$

On pose alors $u = (\cos\alpha)T + (\sin\alpha)B$. Alors $(T, u) = \cos\alpha$ est une constante. De plus, le vecteur u est constant comme le montre le calcul de sa dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= (\cos\alpha)\rho N + (\sin\alpha)(-\tau N)\\ &= (\rho\cos\alpha - \tau\sin\alpha)N\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc Γ est une hélice.

Exercice de calcul différentiel.
Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ solution de cette équation. On fait le changement de variables (on vérifie que c'est bien un C^1-difféomorphisme global de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x &= u \\ y &= uv \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} u &= x \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

(Par abus, on notera encore f la nouvelle fonction ainsi définie, en espérant que le lecteur ne s'y perdra pas.) Nous allons réécrire l'équation en variables (u, v).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

On remplace ces dérivées partielles dans l'équation ci-dessus, qui devient alors, après quelques simplifications (légitimes car $u > 0$) :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{1+v^2}.$$

On intègre cette équation à v fixé : pour chaque $v \in \mathbb{R}$, il existe une constante, que l'on note $\psi(v)$, telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \;\; f(u,v) = \sqrt{1+v^2}u + \psi(v).$$

Ceci définit une fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et la relation ci-dessus, à u fixé cette fois-ci, disons par exemple pour $u = 1$, donne

$$\forall v \in \mathbb{R} \; \psi(v) = f(1,v) - \sqrt{1+v^2}$$

et montre que ψ est de classe C^1. Enfin, en repassant en variables (x, y), on voit que f est de la forme :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi(y/x).$$

Réciproquement, si f est de cette forme, avec ψ de classe C^1, on vérifie par un simple calcul (laissé au lecteur) qu'elle est bien solution de l'équation aux dérivées partielles de départ.