Éléments de correction du problème 1.

Exercice 1
Nous nous contenterons ici de donner les réponses, sans détailler tous les calculs intermédiaires.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial G}{\partial \theta} &= r\left[-\frac{\partial g}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial y}\cos\theta\right] \\
\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\sin^2\theta \\
\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} &= r^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\cos^2\theta\right] - r\left[\frac{\partial g}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial y}\sin\theta\right]
\end{aligned}
$$

On déduit de ces expressions que :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \Delta g$$

Exercice 2
1) On pose $\gamma(s) = \alpha(s) - C$. On va utiliser la relation

$$\gamma(s) = (T.\gamma(s))T + (N.\gamma(s))N + (B.\gamma(s))B,$$

valable car (T, N, B) est un repère orthonormé. Il faut donc calculer les trois produits scalaires en question. On sait par hypothèse que $\|\gamma(s)\|$ est constant, donc $\|\gamma(s)\|^2 = \gamma(s).\gamma(s)$ aussi, et donc la dérivée de ce produit scalaire est nulle, d'où $2\gamma'(s).\gamma(s) = 0$, ou encore

$$T.\gamma(s) = 0.$$

En dérivant à nouveau cette égalité, on obtient $\rho N.\gamma(s) + \gamma'(s).\gamma'(s) = 0$. Or par hypothèse le vecteur $\gamma'(s) = T$ est unitaire (c'est exactement ce que signifie le mot "unitaire" dans l'expression "courbe paramétrée unitaire"), c'est-à-dire de norme 1, et on a donc

$$N.\gamma(s) = -\frac{1}{\rho}.$$

Dérivons une dernière fois l'égalité $\rho N.\gamma(s) = -1$: nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho N)'.\gamma(s) + \rho N.T \\ &= \rho' N.\gamma(s) + \rho(-\rho T + \tau B).\gamma(s) \text{ (car } N.T = 0) \\ &= \rho'(-\frac{1}{\rho}) + \rho\tau B.\gamma(s) \end{aligned}$$

d'où $B.\gamma(s) = \frac{\rho'}{\rho^2}.\frac{1}{\tau} = -\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{1}{\tau}$. On déduit finalement de tout ceci

$$\gamma(s) = \alpha(s) - C = -\frac{1}{\rho}N - \left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{1}{\tau}B.$$

En particulier, en prenant la norme de ce vecteur, on obtient l'égalité

$$r^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{1}{\tau}\right]^2.$$