Université de Rennes 1 - U.F.R. de mathématiques
Licence de mécanique
Année universitaire 2003-2004
Module MMM1

Problème numéro 1

Exercice 1 (laplacien en coordonnées polaires)
On considère φ: $\begin{cases}]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad (r,\theta) \quad \longmapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{cases}$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $G = g\circ\varphi$, de sorte que $G(r,\theta) = g(x,y)$. Calculer $\frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial\theta}$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de g. En déduire une expression de $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de G pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 2
Dans $\mathbb{R}^3$, on désire calculer le flux du champ de vecteurs

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$$

à travers la nappe S de surface sphérique d'équation $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ orientée vers l'extérieur et située dans le domaine

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 2bx, z\geq 0\},$$

où a, b sont deux constantes réelles telles que $0<b<a$.
1) Dessiner la nappe de surface en question (préciser quelques éléments géométriques, comme le centre de la sphère et l'axe du cylindre qui entrent en jeu). Donner un paramétrage de la courbe notée ∂S qui délimite le bord de la surface S.
2) Vérifier que $\mathrm{div}V = 0$. On en déduit qu'il existe un champ de vecteurs W tel que $V = \mathrm{rot}W$.
Rechercher un tel champ W sous la forme

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donner une solution explicite.
3) A l'aide de la formule de Stokes, montrer alors que le flux recherché vaut

$$\Phi = \int_{\partial S}\left(\frac{y^2+z^2}{2} - zx\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2+z^2}{2} - zy\right)\mathrm{d}y,$$

puis, en tenant compte du fait que ∂S est sur la sphère et le cylindre, que

$$\Phi = \int_{\partial S} (ax\mathrm{d}y - bz\mathrm{d}x).$$

(On pourra montrer au préalable que $\int_{\partial S} zx\mathrm{d}x + \int_{\partial S} zy\mathrm{d}y = \int_{\partial S} bz\mathrm{d}x$. On utilisera aussi le fait que l'intégrale d'une différentielle exacte sur une courbe fermée est nulle.)
4) En utilisant le paramétrage obtenu à la question 1), calculer finalement le flux Φ.

Exercice 3
Soit $\alpha(s)$ une courbe paramétrée unitaire dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\rho(s) > 0$ et $\tau(s) \neq 0$.
1) Si $\alpha(s)$ est sur la sphère de centre C et de rayon r, montrer que

$$\alpha(s) - C = -\frac{1}{\rho}N - \left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{1}{\tau}B.$$

En déduire que $r^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{1}{\tau}\right]^2$.
2) Réciproquement, si $\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{1}{\tau}\right]^2$ est une constante (que l'on note alors r^2), montrer que $\alpha(s)$ est sur une sphère de rayon r.