

Université de Rennes 1 - U.F.R. de mathématiques

Licence de mécanique

Année universitaire 2003-2004

Module MMM2

Problème numéro 2

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes.

a)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy,$$

avec les conditions aux limites $u = 2$ sur la courbe $y = x^2$.

b)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-u},$$

avec les conditions aux limites $u = 0$ sur la courbe $y = x^2$.

Exercice 2

Montrer que l'équation

$$xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - x \frac{\partial \phi}{\partial y} + y \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

peut se réécrire sous la forme $L_1 L_2 \phi = 0$, avec

$$L_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_2 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

En posant $\psi = L_2 \phi$, résoudre l'équation initiale soumise aux conditions $\phi = \frac{1}{4}y^2$, $\partial \phi / \partial x = \frac{3}{2}$ sur la droite $x = 1$.

Exercice 3

En posant $\phi = \psi + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$, résoudre l'équation

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi = x^2 + y^2$$

soumise à la condition frontière

$$\phi = e^{-y^2} \cos y + \frac{1}{3}(1 + y^2) \text{ sur la droite } x = 1.$$

Exercice 4

Montrer que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = 0$$

peut se ramener à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

en posant $u = e^{-2x}v$. En déduire la forme générale des solutions de l'équation en u .