Université de Rennes 1 - U.F.R. de mathématiques
Licence de mécanique
Année universitaire 2004-2005
Module MMM1

Contrôle continu : calcul différentiel

Exercice 1

Afin de choisir un point de départ optimal pour une course de ski alpin, les organisateurs cherchent un endroit où la pente de la piste est maximale. Le but de cet exercice est de les aider dans leur tâche. On suppose que le relief est donné par le graphe d'une fonction de classe C^1 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) \end{cases} .$$

1. Nous appellerons ici pente de la piste au point (x,y) le nombre

$$p(x,y) = 1 - |n(x,y).u|$$

où $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et où $n(x,y)$ est un vecteur unitaire normal à la surface. Montrer que chercher un point où la pente de la piste est maximale revient à chercher un point où $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ est maximal.

2. Donner le(s) point(s) de départ possible(s) lorsque

$$f : \begin{cases}]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \cos x + \sin y \end{cases} .$$

Donner une équation du plan tangent en chacun de ces éventuels points.

3. Un point de départ $a \in \mathbb{R}^2$ ayant été choisi, on cherche la "direction de plus forte pente" (afin de déterminer la direction de départ de la course), i.e. on cherche un vecteur unitaire v tel que la dérivée de f selon le vecteur v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

soit minimale.

a) Montrer que si une fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, elle est dérivable selon tout vecteur (i.e. la limite précédente existe) et qu'on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial v}(a) = \mathrm{d}g_a(v).$$

b) En déduire que si $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) \neq 0$, le vecteur $-\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\|}$ répond au problème posé. Que se passe-t-il si $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = 0$?

4. En considérant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(x,y) = 0$ si $x = 0$, montrer que la réciproque à la question 3 a) est fausse. (On montrera que cette fonction est dérivable selon tout vecteur en (0,0), mais qu'elle n'est même pas continue en (0,0).)

Exercice 2

Déterminer les extrema de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2.$$