Séries numériques, séries de Fourier.

Exercice 1

Nature de la série de terme général $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$?

Exercice 2

Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum u_n$ où
a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 3

(Règle de Raab-Duhamel)
Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha/n + O(1/n^2)} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Montrer qu'il existe alors $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^\alpha$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ (on pourra poser $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et étudier la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$).

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \ f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f, et en déduire les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \ \text{et} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 6

On cherche dans cet exercice à illustrer le phénomène de Gibbs.
1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in]0, 2\pi[\ f(\theta) = \pi - \theta.$$

Représenter graphiquement la fonction f, puis la développer en série de Fourier.
On cherche dans la suite à estimer la différence entre f et la $N^{\text{ième}}$ somme partielle de sa série de Fourier. On introduit donc la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par :

$$g_N(\theta) = 2 \sum_1^N \frac{\sin n\theta}{n} - (\pi - \theta).$$

2) Montrer que $g'_N(\theta) = 2\pi D_N(\theta)$, où $D_N(\theta)$ est le noyau de Dirichlet défini par

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}.$$

Montrer que $D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, et montrer à l'aide de cette expression que g_N admet son premier point critique à droite de zéro en $\theta_N = \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$, puis que

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \mathrm{d}\theta - \pi.$$

3) Montrer que

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} g_N(\theta_N) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \mathrm{d}\varphi - \pi.$$