Fonctions holomorphes.

Exercice 1

À l'aide de la définition ou d'un développement en série entière, dire quelles fonctions sont holomorphes parmi les suivantes :
a) $f(z) = z^n$, où $n \in \mathbb{N}$.
b) $f(z) = \overline{z}$.
c) $f(z) = |z|$.
d) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
e) $f(z) = e^z$.

A) Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application, que l'on regarde aussi en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que f, vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, est différentiable en un point $a \in \mathbb{C}$. Sa différentielle Df_a est par définition une application $\mathbb{R}$-linéaire. Les conditions de Cauchy-Riemann traduisent simplement le fait que f est dérivable au sens complexe ssi Df_a est $\mathbb{C}$-linéaire. Or les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont les applications de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire les similitudes. Finalement f est holomorphe au point a si et seulement si la matrice de Df_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une matrice de similitude, autrement dit une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Ces conditions fournissent parfois un critère d'holomorphie commode, par exemple :

Exercice 2

Montrer que la fonction qui à $z = x + iy$ associe $\operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Elles ont surtout des conséquences théoriques importantes...

Exercice 3

Montrer que les fonctions holomorphes sont harmoniques (c'est-à-dire de Laplacien nul).

...et montrent que les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont intimement liées, comme l'illustre de façon éloquente l'exercice ci-dessous.

Exercice 4

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que si f est holomorphe les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est constante ;
(ii) $\operatorname{Re} f$ est constante ;
(iii) $\operatorname{Im} f$ est constante ;
(iv) $|f|$ est constante.
En déduire que la fonction $g(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Cependant...

Exercice 5

Soient f une fonction holomorphe d'un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telles que :

$$\forall z \in U \qquad \mathrm{Re}\,(f(z)) = F(\mathrm{Im}\,(f(z))).$$

Montrer que f est constante.

B) Calculs d'intégrales sur des chemins.

1. Définition et premiers exemples.

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, et γ un chemin dans U, c'est-à-dire une application de classe C^1 par morceaux d'un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans U. Par définition, l'intégrale de f le long de γ est :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

On montre que cette quantité ne dépend pas du paramétrage choisi pour le chemin (une fois l'orientation de celui-ci fixée), et il suffit donc de préciser le support du chemin (i.e. l'image γ^* de l'application γ dans $\mathbb{C}$) et son sens de parcours, pour déterminer sans ambiguité $\int_\gamma f$. Remarquons tout de suite que si le chemin γ est fermé, et si f admet une primitive F sur U, alors $\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0$ donc

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{1}$$

Commençons par un peu de pratique...

Exercice 6

1) Calculer $\int_\gamma e^z \mathrm{d}z$, où $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$.
2) Calculer $\int_\gamma (z-a)^n \mathrm{d}z$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où γ est le cercle de centre a, de rayon 1, orienté positivement.
3) Soit $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z \right| \leq \pi e.$$

4) Soit $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que

$$\left| \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

5) Calculer $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z$ où γ est le segment $[0, 1+i]$.

2. Notion d'indice d'un point par rapport à un chemin fermé.

Soient γ un chemin fermé, et Ω le complémentaire de $\gamma^* = \mathrm{Im}\,\gamma$ dans le plan complexe ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$). On définit sur Ω la fonction suivante :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}.$$

Alors on peut montrer (nous ne le ferons pas ici) que la fonction Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω, et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω. (Intuitivement, les composantes connexes sont les "morceaux" du plan complexe obtenus après découpage le long du chemin γ.) $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$ est appelé l'indice de z par rapport à γ, ou encore l'indice de z pour γ. C'est une fonction extrêmement commode, car il se trouve que $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$ est exactement le nombre de tours que fait le chemin γ autour du point z, comptés dans le sens direct (les tours en sens inverse sont comptés négativement).

Exercice 7

1) Calculer rigoureusement, à partir de la définition, l'indice de l'origine du plan complexe pour le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique.
2) Dans chacun des cas a), b), c), d) ci-dessous, donner l'indice des points représentés sur la figure par rapport au chemin dessiné.

3) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}^*, F'(z) = \frac{1}{z}$. (On pourra utiliser la remarque qui précède l'exercice 6.)

C) Formule de Cauchy.

La formule de Cauchy est fondamentale dans la théorie des fonctions holomorphes. C'est d'elle que découlent à peu près tous les résultats importants, et notamment le fait que les fonctions holomorphes sont analytiques. S'ensuivent le principe des zéros isolés, le principe du maximum, le principe de prolongement analytique, etc ...(cf. partie E)) Rappelons tout de suite son énoncé.

Théorème :

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U simplement connexe (c'est-à-dire, dans un langage plus intuitif, "sans trou"), et γ un chemin fermé dans U. Alors on a pour tout $z \in U \setminus \gamma^*$:

$$f(z)\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

et

$$\int_{\gamma} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Elle permet également d'exprimer les dérivées de f par une intégrale portant sur f elle-même, ce qui a des conséquences agréables. Par exemple on obtient ainsi de puissants théorèmes de régularité pour les fonctions définies par une intégrale à paramètre (sujet passionant que nous n'aurons hélas pas le temps d'aborder ici). Ainsi, par une simple dérivation de la formule de Cauchy (pour dériver le membre de gauche, on rappelle que $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$ est localement constant, et pour le membre de droite, justifier que l'on peut dériver sous le signe $\int$) on obtient :

$$f'(z)\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi$$

Par dérivations successives on peut obtenir de la même manière une expression analogue pour toutes les dérivées de f. Les résultats des exercices 8 et 9 sont à retenir.

Exercice 8 (théorème de Liouville et théorème de d'Alembert)

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D}(0,R)$ de centre 0 et de rayon R et $a, b \in D(0,R)$ (le disque ouvert). Évaluer

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z.$$

1) En déduire le théorème de Liouville : toute fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. (Remarque lexicale : une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est communément appelée une *fonction entière*. Le théorème de Liouville dit donc que les seules fonctions entières bornées sont les constantes.)
2) Déduire du théorème de Liouville le théorème de d'Alembert : le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, autrement dit pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.

Exercice 9 (estimations de Cauchy et applications)

1) Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(a,R)$ de centre a et de rayon R. On note

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

son développement en série entière dans $D(a,R)$. Soit $0 < r < R$, montrer les estimations dites de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}$$

où $M(f,r) = \sup\limits_{z \in C(a,r)} |f(z)|$.
2) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Liouville.
3) Soient f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $R, A, B, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^\alpha$$

pour tout z de module plus grand que R. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 10

Calculer en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$ la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(\frac{t}{2}) \mathrm{d}t.$$

D) Calcul des résidus.

Exercice 11

Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes :

a) 0<|z|<1
b) 1<|z|<2
c) 2<|z|

Exercice 12

Décomposer en série de Laurent dans les diverses couronnes admissibles de centre indiqué les fonctions suivantes, et en déduire leur résidu au point indiqué :

1. $\frac{z-\sin z}{z^3}$ $(z = 0)$,
2. $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ $(z = 1, z = 2)$,
3. $\frac{z}{z^2+1}$ $(z = i)$,
4. $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ $(z = 1)$,
5. $\frac{1}{z+a}$,
6. $\frac{2z}{z^2+2z+1}$.

Exercice 13

Calculer les résidus de

1. $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ $(z = k\pi)$,
1. $\frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ $(z = 0)$.

Exercice 14

Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\sin t}$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

E) Quelques théorèmes importants

1. Principe des zéros isolés et prolongement analytique

On déduit facilement de l'analycité des fonctions holomorphes le résultat suivant :

Principe des zéros isolés

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U, alors les zéros de f sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ est tel que $f(z_0) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \quad f(z_0) \neq 0.$$

D'où on déduit encore assez facilement le

Principe du prolongement analytique

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert *connexe* U, qui sont égales sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans U, i.e. on suppose qu'il existe un point $a \in U$, et une suite de points $a_n \in U$ distincts de a tels que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = g(a_n).$$

Alors les fonctions f et g sont égales sur U.

Exercice 15

Démontrer le principe du prolongement analytique (on appliquera le principe des zéros isolés à la fonction $f - g$ et au point a).

Le principe du prolongement analytique montre de façon spectaculaire à quel point être holomorphe est une condition forte, bien plus forte qu'être de classe C^∞ au sens de la différentiation usuelle sur $\mathbb{R}^2$. En effet, il montre que les fonctions holomorphes sont extrêmement "rigides", au sens où il est impossible de déformer localement une fonction holomorphe sans la déformer partout, alors que dans le cas C^∞ il existe par exemple des "fonctions plateau". En fait on peut même dire que les fonctions holomorphes sont "presque algébriques" : de même qu'un polynôme qui s'annule sur un ensemble infini est nul, une fonction holomorphe qui s'annule sur un ensemble ayant un point d'accumulation (hypothèse un peu plus forte tout de même) est identiquement nulle.

Exercice 16

Démontrer sans effort les formules suivantes (on les supposera connues sur $\mathbb{R}$) :
a) $\forall a, b \in \mathbb{C}\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
b) $\forall z \in \mathbb{C}\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$
c) $\forall z \in \mathbb{C}\ \mathrm{ch}\, 2z = \mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z$

Exercice 17

Existe-t-il une fonction holomorphe $z \mapsto f(z)$ dans un voisinage de 0 satisfaisant à la condition suivante :
(i) $f(\frac{1}{n}) = \sin \frac{n\pi}{2}$
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{\cos n\pi}{n}$
(iii) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$
(iv) $|f(\frac{1}{n})| < e^{-n}$
(v) $n^{-\frac{7}{3}} < |f(\frac{1}{n})| < 6n^{-\frac{7}{3}}$

2. Principe du maximum

Théorème

Soient U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, K la fermeture de U (le plus petit fermé contenant U ; intuitivement c'est la réunion de U et de sa frontière) et f une fonction continue sur K, qui est holomorphe sur U. Alors pour tout $z \in U$:

$$|f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial K} |f(\xi)|$$

où ∂K désigne la frontière de K.
De plus si l'égalité a lieu en un point $z \in U$, alors la fonction f est constante.

Exercice 18 (lemme de Schwarz)

On note U le disque unité ouvert. Soit f une fonction holomorphe sur U, bornée par 1, et telle que $f(0) = 0$. Alors on a :

$$\forall z \in U \quad |f(z)| \leq |z|, \tag{2}$$
$$|f'(0)| \leq 1. \tag{3}$$

De plus si l'égalité a lieu dans (2) pour un certain $z \in U \setminus \{0\}$, ou si elle a lieu dans (3), alors il existe une constante λ de module 1 telle que $f(z) = \lambda z$ sur U tout entier.

Exercice 19

Soient $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sup_{|arg(z)| < \theta} |z^n e^{-n}|.$$

3. Représentation conforme

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application conforme de U dans V est une fonction f holomorphe bijective, d'inverse holomorphe. Il suffit pour cela que f soit holomorphe bijective (encore une propriété qui n'est pas vraie pour les fonctions C^∞). On dit que U et V sont conformément équivalents s'il existe une application conforme de U dans V.

Théorème (difficile !)
Tout ouvert connexe, simplement connexe, distinct de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité.

Exercice 20

Montrer que $\mathbb{C}$ n'est pas conformément équivalent au disque unité. (Pensez au théorème de Liouville !)

Exercice 21

Montrer que le disque unité ouvert est conformément équivalent au demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ (couramment appelé le demi-plan de Poincaré) via l'application

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$