Intégrales multiples et formule de Stokes.

Exercice 1

Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :
a) $f(x,y)=xy$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0 \text{ et } x+y\leq 1\}$;
b) $f(x,y)=x^2$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\leq y\leq x\}$;
c) $f(x,y)=x\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq y\geq 0 \text{ et } x^2+y^2\leq\pi\}$;

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss bien connue $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
1) Montrer que cette intégrale est convergente.
2) Montrer que $I^2=\iint_{[0,+\infty]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
3) En passant en coordonnées polaires, montrer que

$$I^2=\iint_{[0,+\infty]\times[0,\pi/2]} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

puis calculer cette dernière intégrale et en déduire la valeur de I.

Exercice 3

On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $x^2+y^2+z^2=1$.
1) Au voisinage de quels points de S cette équation permet-elle de définir implicitement z comme fonction de x et y ?
2) Donner explicitement un paramétrage de la demi-sphère $\{(x,y,z)\in S \mid z>0\}$, puis calculer sa surface à l'aide de ce paramétrage.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on désire calculer le flux du champ de vecteurs

$$V\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-z\\ z-x\\ x-y\end{pmatrix}$$

à travers la nappe S de surface sphérique d'équation $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ orientée vers l'extérieur et située dans le domaine

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 2bx, z\geq 0\},$$

où a,b sont deux constantes réelles telles que $0<b<a$.
1) Dessiner la nappe de surface en question (préciser quelques éléments géométriques, comme le centre de la sphère et l'axe du cylindre qui entrent en jeu). Donner un paramétrage de la courbe notée ∂S qui délimite le bord de la surface S.
2) Vérifier que $\mathrm{div}V=0$. On en déduit qu'il existe un champ de vecteurs W tel que $V=\mathrm{rot}W$. Rechercher un tel champ W sous la forme

$$W\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ 0\end{pmatrix}$$

et donner une solution explicite.
3) A l'aide de la formule de Stokes, montrer alors que le flux recherché vaut

$$\Phi=\int_{\partial S}\left(\frac{y^2+z^2}{2}-zx\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x^2+z^2}{2}-zy\right)\mathrm{d}y,$$

puis, en tenant compte du fait que ∂S est sur la sphère et le cylindre, que

$$\Phi = \int_{\partial S} (ax\mathrm{d}y - bz\mathrm{d}x).$$

(On pourra montrer au préalable que $\int_{\partial S} zx\mathrm{d}x + \int_{\partial S} zy\mathrm{d}y = \int_{\partial S} bz\mathrm{d}x$. On utilisera aussi le fait que l'intégrale d'une différentielle exacte sur une courbe fermée est nulle.)
4) En utilisant le paramétrage obtenu à la question 1), calculer finalement le flux Φ.