Application des séries de Fourier à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Les séries de Fourier ont initialement été introduites pour résoudre "l'équation de la chaleur". On considère une barre métallique de longueur L, dont on connaît, à l'instant initial, la température en chaque point, mais aussi, à chaque instant, la température aux deux extrémités de la barre. Peut-on déterminer la température de la barre à chaque instant et en tout point ? Si on note $x \in [0, L]$ l'abscisse d'un point de la barre, $u(x,t)$ la température au point x à l'instant t, $h(x)$ la température au point x à l'instant initial ($t = 0$), ce problème se ramène (après un travail de modélisation que nous ne ferons pas ici) à la résolution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ dans }]0, L[\times]0, +\infty[\tag{1}$$

oú k est une constante strictement positive, avec les conditions aux limites

$$\forall t \geq 0 \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{2}$$

et les conditions initiales

$$\forall x \in [0, L] \quad u(x, 0) = h(x) \tag{3}$$

On cherche une fonction u de classe C^∞ sur $]0, L[\times]0, +\infty[$, et continue sur $[0, L] \times [0, +\infty[$. On supposera la fonction h de classe C^1 sur $]0, L[$, continue sur $[0, L]$, et telle que $h(0) = h(L) = 0$.

Partie A

L'idée de départ est de chercher des solutions de (1) à variables séparées, c'est-à-dire sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ où X et T sont des fonctions de classe C^∞. On remplace u par cette expression dans (1), puis on essaie de réarranger les termes de manière à "séparer les variables", c'est-à-dire de manière à ce que le membre de gauche de l'équation ne dépende que de x, et le membre de droite que de t. Mais comme x et t sont des variables indépendantes, une quantité qui ne dépend à la fois que de x, et que de t, est nécessairement constante. On se ramène ainsi à la résolution de deux équations différentielles ordinaires.

1) Montrer qu'une fonction u non identiquement nulle sous cette forme est solution de (1) si et seulement si X et T sont solutions des équations

$$\begin{aligned} T'(t) &= AkT(t) \\ X''(x) &= AX(x), \end{aligned}$$

où A est une constante réelle.

2) Résoudre ces équations.

3) En déduire que les solutions à variables séparées du système d'équations (1), (2), sont, à multiplication par une constante près, les fonctions u_n, $n \geq 1$, définies sur $[0, L] \times [0, +\infty[$ par

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Partie B

On a donc une famille de solutions du système (1),(2). Le problème est que ces solutions n'ont aucune raison de satisfaire les conditions initiales (3). Cependant, comme les équations (1) et (2) sont linéaires, toute combinaison linéaire des solutions u_n ci-dessus est encore solution. Mais en se limitant aux combinaisons linéaires, on ne laisse encore pas assez de flexibilité à la fonction h : pour trouver une solution u vérifiant les conditions initiales (3), il faudrait que h soit un polynôme trigonométrique. L'idée va être de chercher une solution parmi les "combinaisons linéaires infinies" des u_n, c'est-à-dire une solution sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n u_n(x,t). \tag{4}$$

C'est l'objet des questions suivantes...

Pour fixer les idées, nous allons nous placer dans le cas particulier où les conditions initiales sont données par la fonction $h(x) = x(L-x)$.

1) Montrer qu'il existe une suite de coefficients $(b_n)_n$ (et les expliciter) telle que la fonction u définie par la série (4) (sous réserve que cette fonction soit bien définie, i.e. sous réserve que la série converge, mais nous verrons cela dans la question suivante, patience...) vérifie les équations (3). (Développer h en série de Fourier...)

2) Montrer qu'avec ce choix des coefficients b_n, la série (4) converge normalement sur $[0,L] \times [0,+\infty[$; en déduire que u est bien définie, et qu'elle est continue sur $[0,L] \times [0,+\infty[$.

3) Montrer que toutes les séries dérivées convergent normalement sur $[0,L] \times [\varepsilon,+\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$; en déduire que u est de classe C^∞ sur $]0,L[\times]0,+\infty[$, et que ses dérivées sont obtenues en dérivant la série terme à terme.

4) Conclure (montrer que u est solution du problème (1), (2), (3)).