Équations aux dérivées partielles linéaires et intégrales premières.

Exercice 1 (passer de l'edp à l'équation caractéristique et vice-versa)

a) Donner les EDP linéaires homogènes du premier ordre associées aux systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases} , \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \end{cases} .$$

b) Donner l'équation caractéristique associée à l'EDP suivante :

$$\cos x \cos y \frac{\partial u}{\partial x} - \sin x \sin y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin x \cos y \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Exercice 2 (recherche d'intégrales premières)

Rechercher des intégrales premières pour les systèmes différentiels de l'exercice précédent. On en déduira l'allure des trajectoires pour les deux premiers.

Exercice 3 (indépendance linéaire)

Montrer que les deux intégrales premières obtenues dans l'exercice 2 pour le système différentiel de l'exercice 1 b) sont indépendantes sur un ouvert que l'on précisera.

Exercice 4 (Résolution d'EDP linéaires homogènes du premier ordre.)

Le principe général est le suivant : étant donnée une EDP linéaire homogène du premier ordre, on lui associe son équation caractéristique (cf. exo 1), dont on cherche $n-1$ intégrales premières $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ linéairement indépendantes, où n est la taille du système (cf. exo 2). Les solutions de l'EDP sont alors les fonctions de la forme

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

où Φ est une fonction de classe C^1.
a) Donner les solutions des EDP rencontrées jusqu'à présent.
b) Résoudre l'EDP suivante :

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Exercice 5 (le cas des EDP non homogènes)

On commence par transformer l'équation en une EDP homogène, puis on applique la méthode vue précédemment à l'EDP obtenue. Résoudre ainsi les EDP suivantes :
a) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.
b) $-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 3zf$.
c) $yz\frac{\partial u}{\partial x} + zx\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} + xyz = 0$.
d) $x(cz-by)\frac{\partial z}{\partial x} + y(ax-cz)\frac{\partial z}{\partial y} = z(by-ax)$.
e) $a(a^2+xy)(x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}) + (x^2+y^2)z^2 = 0$.

Exercice 6 (a,b,c, et d sont extraits du partiel de mars 2004)

Résoudre les équations suivantes :

a)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + 2 - 4y,$$

avec les conditions aux limites $u = 1+y^2+e^y$ sur la droite $x = 1$, autrement dit $u(1, y) = 1+y^2+e^y$.

b)

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \text{avec} \lim_{x\to+\infty} u(x, y) = e^y.$$

c)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2, \qquad \text{avec } u = 1/\ln x \text{ sur la courbe } x^2y = 1.$$

d)

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x},$$

avec les conditions aux limites $u = y^2$ sur la droite $x = 2$. Y a-t-il unicité ? Expliquez pourquoi.

e)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \qquad \text{avec } u = 2 \text{ sur la courbe } y = x^2.$$

f)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-u}, \qquad \text{avec } u = 0 \text{ sur la courbe } y = x^2.$$

Exercice 7

Montrer que l'équation

$$xy\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + (y^2 - x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - x\frac{\partial\phi}{\partial y} + y\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

peut se réécrire sous la forme $L_1L_2\phi = 0$, avec

$$L_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

En posant $\psi = L_2\phi$, résoudre l'équation initiale soumise aux conditions $\phi = \frac{1}{4}y^2, \partial\phi/\partial x = \frac{3}{2}$ sur la droite $x = 1$.

Exercice 8

En posant $\phi = \psi + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$, résoudre l'équation

$$x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi = x^2 + y^2$$

soumise à la condition frontière

$$\phi = e^{-y^2}\cos y + \frac{1}{3}(1 + y^2) \text{ sur la droite } x = 1.$$

Exercice 9

Montrer que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = 0$$

peut se ramener à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

en posant $u = e^{-2x}v$. En déduire la forme générale des solutions de l'équation en u.