Cherchez l'erreur !

par Sylvain Brochard

Nous proposons dans ce texte une démonstration (fausse, bien entendu !) de l'assertion suivante : les $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont isomorphes. Saurez-vous trouver l'erreur ?

En fait on va montrer que $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ et $\operatorname{Spec}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ sont isomorphes en tant qu'espaces algébriques sur $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$. Commençons par étudier $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$. On a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "id \coprod id"] \arrow[d, "id \coprod \sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

où X_0 est l'union disjointe de deux copies de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ et où σ est l'automorphisme de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ induit par la conjugaison complexe. On note $X_1 = X_0 \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}} X_0$ et p_1, p_2 les projections sur X_0. (X_1 est l'union disjointe de quatre copies de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$.) On note aussi q_1 et q_2 les projections de $X_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens (pour le carré du haut cela signifie que le carré formé avec p_1 et q_1 est cartésien, de même que le carré formé avec p_2 et q_2) :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] & X_0 \arrow[d, shift right, "q_1"'] \arrow[d, shift left, "q_2"] \\ X_0 \arrow[r, "id \coprod id"] \arrow[d, "id \coprod \sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Vu que $X_0 \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est étale et surjectif, $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est le quotient de la relation d'équivalence définie par le couple de flèches (p_1, p_2) (par exemple grâce à la proposition 1.2 de [LMB], ou bien par Knutson II 1.3).

Passons au cas de $\operatorname{Spec}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On a de même un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "p'_1"'] \arrow[d, shift left, "p'_2"] & X_0 \arrow[d, shift right, "q_1"'] \arrow[d, shift left, "q_2"] \\ X_0 \arrow[r, "id \coprod id"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

De même que précédemment, $\operatorname{Spec}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est le quotient de la relation d'équivalence définie par le couple de flèches (p'_1, p'_2). Comme p'_1 et p'_2 sont induits à partir de q_1 et q_2 par le changement de base $id \coprod id : X_0 \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, on a $p'_1 = p_1$ et $p'_2 = p_2$. Les S-espaces algébriques $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ et $\operatorname{Spec}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ sont tous les deux le quotient de la relation d'équivalence définie par (p_1, p_2), donc ils sont isomorphes.