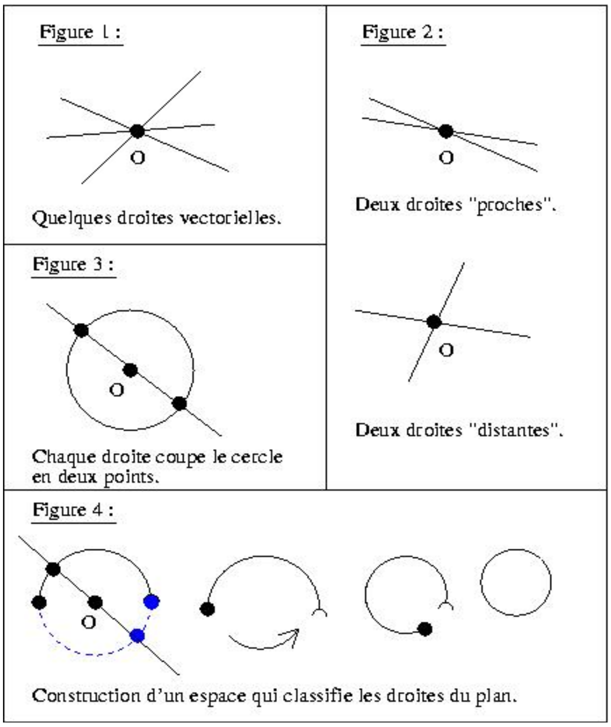
# Les champs : le *nec plus ultra* de la classification.

Apparus à la fin des années 1960, les champs algébriques ont d'abord répondu à des questions purement géométriques. Il s'agissait d'offrir l'outil approprié au mathématicien désireux d'étudier le comportement de certains objets géométriques «en famille». Ils rencontrent depuis une dizaine d'années un nouvel engouement suite à leur utilisation spectaculaire en théorie des cordes.

En étudiant des objets géométriques, le mathématicien est souvent amené à rechercher un espace qui «classifie» ces objets, c'est-à-dire un espace qui contient exactement un point pour chacun des objets considérés. Essayons par exemple de classifier les droites vectorielles[1] du plan. Est-il possible de voir chacune de ces droites comme un point d'un nouvel espace ? Autrement dit, existe-t-il un objet géométrique «naturel» qui contient exactement un point pour chaque droite du plan ? On aimerait de plus que deux points de cet espace soient «proches» si et seulement si les deux droites correspondantes sont «proches» (*cf.* figure 2). Le cercle unité fournit presque la réponse : il contient exactement deux points (au lieu d'un seul) pour chaque droite (*cf.* figure 3). Il suffit maintenant de considérer l'espace obtenu à partir du cercle en fondant ensemble deux points dès qu'ils sont diamétralement opposés. Cet espace, par construction, ne contient plus qu'un point pour chaque droite, mais à quoi ressemble-t-il ? On peut le visualiser (*cf.* figure 4) en effaçant le demi-cercle inférieur (chacun de ses points coïncide avec un point du demi-cercle supérieur) de manière à ne garder qu'un point par droite, puis en déformant le demi-cercle restant pour en recoller les deux extrémités. L'espace ainsi obtenu est encore isomorphe[2] à un cercle ! De plus, on pourrait montrer qu'il existe au-dessus de cet espace une famille «universelle» de droites, c'est-à-dire une famille qui permet de paramétrer parfaitement les familles de droites[3].




On peut maintenant décliner la question précédente à l'infini, en remplaçant l'objet d'étude de base, une droite du plan, par n'importe quel objet géométrique : des courbes, des surfaces, des fibrés vectoriels... Hélas, la situation n'est pas toujours aussi rose que dans l'exemple précédent. Il arrive en effet que, parmi les objets que l'on cherche à classifier, certains présentent plus de «symétries» que d'autres, et ceci même avec des objets très simples, par exemple... des triangles ! Tout le monde sait bien qu'un triangle équilatéral possède plus de symétries qu'un triangle «quelconque». A cause de ces symétries, un espace classifiant «naïf» comme celui construit ci-dessus a souvent de mauvaises propriétés : d'une part il risque de présenter des singularités aux

1 Une droite vectorielle est simplement une droite qui passe par l'origine du plan (*cf.* figure 1).

2 Etymologiquement, «qui a la même forme» (du grec *isos,* égal, et *morphê,* forme). Précisément, ceci signifie qu'il existe un isomorphisme entre notre espace et un cercle, ce qui revient *grosso modo* à dire qu'il se comporte comme un cercle du point de vue de la géométrie.

3 La famille universelle est un ruban de Moebius. L'adjectif *universelle* signifie qu'étant donné une famille de droites quelconque paramétrée par un espace *X*, il existe un unique morphisme de *X* dans le cercle qui induit cette famille de droites.

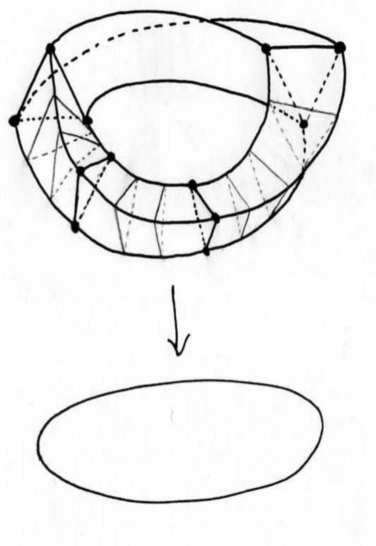


Figure 5 : une famille non triviale de triangles équilatéraux.

points correspondant aux objets munis de trop d'automorphismes[4], et d'autre part il ne paramètre qu'imparfaitement les familles d'objets considérés[5].

Il existe en réalité un bien meilleur espace classifiant : un objet que les mathématiciens appellent un *champ*. Initialement introduits par Giraud sous l'impulsion de Grothendieck[6], les champs sont vite devenus des objets géométriques à part entière grâce à l'invention, quelques années plus tard, des champs *algébriques*[7] par Deligne et Mumford[8], puis Artin[9]. Les champs algébriques ont été considérablement étudiés ces dernières années. Alors qu'ils ne servaient au départ qu'à «classifier» d'autres objets géométriques, le degré de généralité qu'ils permettent de recouvrir fait qu'ils deviennent parfois l'objet d'étude de base du géomètre algébriste (à la place des *schémas*, qui eux-mêmes avaient supplanté les variétés algébriques des siècles précédents)[10].

**Champs algébriques et théorie des cordes ?**

Si les champs algébriques n'ont été introduits initialement qu'à des fins purement théoriques, dans un esprit de fondement des mathématiques, ils suscitent aujourd'hui un nouvel enthousiasme de par leur utilisation récente en physique. En effet, la théorie des cordes est une «théorie de champs». Une théorie de champs est la donnée d'un *espace source* $\Sigma$, d'un *espace but M,* d'une *fonctionnelle* $\mu$ de $\Sigma$ dans *M,* et d'une *action S*. Par exemple en mécanique classique du point, $\Sigma$ est l'axe temporel, *M* est l'espace à trois dimensions, $\mu$ est la position du point dans l'espace, et l'action est l'intégrale d'un Lagrangien. En théorie des cordes, $\Sigma$ est une «surface de Riemann», et *M* est une variété complexe de dimension trois (qui, pour des raisons de supersymétrie en physique, doit être *de Calabi-Yau*). La fonctionnelle $\mu$ représente l'évolution d'une corde. L'un des problèmes de la théorie des cordes est d'étudier l'ensemble des applications de $\Sigma$ dans *M*. Les champs algébriques (*orbifolds* en physique) jouent un rôle clé dans cette étude.

4 En gros, un automorphisme, c'est une symétrie.

5 Dans le premier chapitre de *Introduction to Stacks* (disponible sur internet à l'adresse http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/), les auteurs expliquent ce phénomène en s'appuyant sur l'exemple élémentaire des triangles. Ils montrent comment l'existence d'une famille non triviale de triangles équilatéraux (*cf.* figure 5) est un obstacle à l'existence d'une famille universelle de triangles.

6 Alexander Grothendieck (Berlin, 1928) est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son temps. Entre autres, il révolutionna la géométrie algébrique dans les années 1960 en inventant la notion de schéma.

7 La définition d'un champ algébrique dépasserait, hélas, le cadre de cet article. Le lecteur téméraire pourra se reporter à *Champs algébriques* de G. Laumon et L. Moret-Bailly, ou aux articles cités dans les notes suivantes.

8 *cf.* Pierre Deligne et David Mumford : *The irreducibility of the space of curves of given genus.* I.H.E.S. *Publications Mathématiques, (36):75-109, 1969.*

9 *cf.* Michael Artin : *Versal deformations and algebraic stacks.* Invent. Math., 27:165-189, 1974.

10 si bien que l'on peut s'amuser à classifier... certaines familles de champs algébriques !