Université de Montpellier
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Champs de Picard et critères de platitude

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Sylvain Brochard

soutenance le 16 juin 2023 devant le jury composé de :

M. Michele Bolognesi	Examinateur
M. Cédric Bonnafé	Examinateur
M. Damien Calaque	Examinateur
M. Qing Liu	Examinateur
M. Matthieu Romagny	Rapporteur
M. Bertrand Toën	Rapporteur

Champs de Picard et critères de platitude

Sylvain BROCHARD

Charte d'intégrité scientifique

Je déclare avoir respecté, dans la conception et la rédaction de ce mémoire d'HDR, les valeurs et principes d'intégrité scientifique destinés à garantir le caractère honnête et scientifiquement rigoureux de tout travail de recherche, visés à l'article L.211-2 du Code de la recherche et énoncés par la Charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et la Charte d'intégrité scientifique de l'Université de Montpellier. Je m'engage à les promouvoir dans le cadre de mes activités futures d'encadrement de recherche.

Sylvain Brochard

Adresse : IMAG, UMR 5149, Université de Montpellier, CC 051, Place Eugène Bataillon, 34090 Montpellier, France
Email : sylvain.brochard@umontpellier.fr
Page internet : imag.umontpellier.fr/brochard

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement Matthew Emerton, Matthieu Romagny, Bertrand Toën et Angelo Vistoli pour le plaisir et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et pour le soin avec lequel ils ont écrit leurs rapports. Matthieu et Bertrand ont de plus réussi à se libérer pour participer au jury. Je leur en suis extrêmement reconnaissant : leur présence, réelle ou virtuelle, compte beaucoup pour moi. Je remercie également chaleureusement Michele Bolognesi, Cédric Bonnafé, Damien Calaque et Qing Liu d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

Je voudrais renouveler mes remerciements à Laurent Moret-Bailly, non seulement pour le très beau sujet qu'il m'a proposé, mais aussi pour l'élan initial qu'il a su me donner en accompagnant mon travail de thèse. Je souhaite également remercier tous les chercheurs qui, de près ou de loin, ont influencé ma trajectoire par la suite. Je pense notamment, bien sûr, aux collaborateurs avec lesquels j'ai écrit des articles – Ariane Mézard, dont l'enthousiasme pour la conjecture de de Smit m'a contaminé, Cristiana Bertolin, qui m'a fait découvrir le monde merveilleux des 1-motifs, Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare, auprès de qui j'ai appris énormément de choses, en algèbre commutative et en théorie des nombres respectivement. Je pense aussi à tous les collaborateurs avec lesquels je n'ai *pas* écrit d'article : toutes les conversations et correspondances mathématiques que j'ai pu avoir avec eux m'ont immensément appris. J'ai enfin une pensée émue pour Bas Edixhoven – qui a eu la gentillesse de m'accueillir en post-doctorat à Leiden il y a bien longtemps, dont la disparition prématurée a laissé un vide immense dans la communauté de la géométrie arithmétique.

Merci à tous mes collègues de l'Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, pour leur présence amicale et stimulante. Grâce à eux, c'est un plaisir d'arriver au bureau le matin. Merci en particulier à tous les fidèles du repas de 12h (voire 11h30 !) pour ces moments partagés à une table du restaurant administratif, ainsi qu'à Étienne Mann, Hoel Queffelec et Marine Demangeot pour la bonne humeur qui a toujours régné dans le bureau que j'ai eu la chance de partager avec chacun d'eux. Je n'oublie pas l'ensemble de l'équipe administrative, dont l'efficacité n'a d'égale que la qualité de l'accueil qui m'est réservé à chaque fois que j'ai besoin de frapper à l'une de leurs portes.

Toute cette histoire n'aurait jamais commencé sans mes parents, que je ne remercierai jamais assez pour tout ce qu'ils m'ont transmis, et pour leur soutien constant et inconditionnel. Je souhaite enfin remercier ceux qui embellissent ma vie et font de chaque jour une fête, mon épouse Fanny, mes trois poupounes, Anna, Élise et Irène, et mon Grand Pierre, pour la joie qu'ils m'apportent au quotidien et leur incroyable aptitude à me ramener aux choses essentielles de l'existence : jouer, rêver, s'émerveiller.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter les résultats que j'ai obtenus depuis la soutenance de ma thèse de doctorat. La première partie est consacrée à des travaux sur les champs de Picard. Les travaux présentés dans la section 1.1, qui s'inscrivent dans le prolongement direct de ma thèse, portent sur des résultats de finitude pour le foncteur de Picard d'un champ algébrique, dans l'esprit de ceux donnés dans SGA 6, exp. XII et XIII. Je donne en particulier une version champêtre du théorème de représentabilité relative de Raynaud. Ce résultat permet d'obtenir un théorème d'existence pour la composante de torsion du foncteur de Picard, et un théorème de finitude des groupes de Néron-Severi. La section 1.2 donne des résultats plus techniques sur la cohomologie des champs algébriques, que j'ai dû démontrer pour obtenir les théorèmes de finitude évoqués ci-dessus. Ces résultats cohomologiques montrent que, même si un champ peut être de dimension cohomologique infinie, sa cohomologie se comporte malgré tout de manière raisonnable par changement de base.

Les sections 1.3 et 1.4 sont consacrées à des travaux sur les « champs en groupes (strictement) commutatifs ». Ce sont les champs munis d'une structure de groupe commutatif appelés « champs de Picard » dans SGA 4. (La différence principale avec la définition d'un schéma en groupes est que tout doit être défini « à 2-isomorphisme près ».) Je présente dans la section 1.3 des résultats concernant une opération naturelle de dualité pour un champ en groupes commutatifs. Je commence par donner des conditions suffisantes pour qu'un tel champ en groupes soit dualisable, ou pour que son dual soit un champ algébrique. L'application la plus frappante est sans doute la construction générale, pour un champ algébrique X qui satisfait certaines hypothèses assez faibles, d'un « morphisme d'Albanese » $a : X \to A^1(X)$ qui généralise le classique torseur d'Albanese. Ce torseur d'Albanese vérifie les propriétés universelles que l'on attend de lui. Je présente ensuite deux applications de ce nouveau morphisme d'Albanese : d'une part je donne une description géométrique de l'obstruction élémentaire et des torseurs universels introduits par Colliot-Thélène et Sansuc, d'autre part je donne des exemples de champs algébriques qui vérifient la conjecture des sections de Grothendieck.

La section 1.4 est consacrée à des résultats sur le groupe de Picard des 1-motifs de Deligne. On peut voir les 1-motifs comme des champs en groupes commutatifs très particuliers, et ce point de vue s'avère très fructueux. En collaboration avec Cristiana Bertolin, nous calculons un dévissage du groupe de Picard d'un 1-motif M (sur une base *normale* S). Ce dévissage permet d'associer à chaque fibré en droites L sur M un morphisme $\varphi_L : M \to M^*$, ce qui fournit un morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Pic}\,(M) \to \mathrm{Hom}(M, M^*)$ qui généralise le morphisme bien connu pour les variétés abéliennes.

Nous démontrons par ailleurs le Théorème du Cube pour les 1-motifs, et ce résultat permet d'obtenir une autre construction du morphisme Φ. Nous démontrons que les deux constructions coïncident.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à des résultats d'algèbre commutative au service de la théorie des nombres. La démonstration du théorème de modularité de Taylor et Wiles [65, 69] repose sur plusieurs ingrédients d'algèbre commutative. L'une des étapes principales est de montrer que certaines algèbres de Hecke sont des intersections complètes. Grâce à une simplification due à Diamond, qui court-circuite le résultat de « multiplicité un » (voir [27]), et à des critères caractérisant les intersections complètes, il suffit pour cela de montrer qu'un certain module sur un anneau local est libre. Deux sortes de critères de liberté pour un module sur un anneau local entrent alors en scène. En premier lieu, un critère de liberté qui repose sur une méthode de « patching » (méthode présentée rapidement en section 2.1.1) permet de traiter le cas « minimal ». Dans un second temps, le cas général se déduit du cas minimal grâce à un critère « numérique » de liberté. La liberté du module est traduite dans ce dernier critère en termes d'une inégalité entre certains invariants numériques associés au module. La fin de la preuve revient alors à montrer que la validité de cette inégalité dans le cas « minimal » entraîne la validité de l'inégalité dans tous les cas. Les travaux que je souhaite présenter ici concernent des améliorations de chacun de ces deux critères de liberté.

Pour ce qui concerne le premier critère, je présente dans la section 2.2 une conjecture formulée par Bart de Smit en 1997 et démontrée en 2017 dans [Bro3]. Nous verrons que ce nouveau résultat permet de simplifier la partie d'algèbre commutative dans la preuve du théorème de Fermat, en éliminant tout simplement le recours à la méthode de « patching ». Je présente en section 2.3 un résultat obtenu en collaboration avec Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare qui généralise l'énoncé de de Smit. La conclusion est la même – un certain module sur un anneau local est libre – mais l'affaiblissement des hypothèses ouvre potentiellement la voie à des applications à d'autres problèmes de relèvement modulaire, où le « défaut » est strictement positif. En améliorant encore ce critère, on pourrait envisager d'éliminer les méthodes de patching dans d'autres situations, comme celle de l'article [17] de Calegari et Geraghty. C'est dans cette ligne de recherche que s'inscrivent les travaux sur les suites indépendantes présentés en section 2.4. On y améliore, modulo une hypothèse d'intersection complète, le critère de liberté de Calegari et Geraghty sur les modules équilibrés (« balanced »). Les résultats généraux sur les suites indépendantes obtenus à cette occasion ont leur intérêt propre. Ils pourraient avoir des applications dans le contexte d'une conjecture de Lech sur les multiplicités dans les couples plats d'anneaux locaux noethériens. Ils permettent aussi de donner une nouvelle preuve de la conjecture de de Smit.

Enfin, les travaux présentés en section 2.5 portent sur le critère *numérique* de liberté. En collaboration avec Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare, nous obtenons un raffinement du critère numérique de Wiles et Diamond, qui s'applique dans des situations un peu plus générales.

Chapitre 1

Champs de Picard

1.1 Théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard d'un champ algébrique

Soient S un schéma et X un champ algébrique propre, plat et de présentation finie sur S. Le *foncteur de Picard* relatif de X sur S, noté $\mathrm{Pic}_{X/S}$, est le faisceau *fppf* associé au préfaisceau qui à T associe $\mathrm{Pic}\,(X \times_S T)$. Ma thèse de doctorat, dont les résultats ont été publiés dans l'article [14], était consacrée à l'étude de ce foncteur de Picard : j'y ai démontré un certain nombre de propriétés bien connues dans le cadre des schémas. J'ai étudié entre autres la représentabilité du foncteur de Picard, ses propriétés de séparation, de finitude relative, ainsi que la représentabilité et la propreté de sa composante neutre.

À mon arrivée à Montpellier comme maître de conférences, j'ai poursuivi l'étude du foncteur de Picard d'un champ algébrique en m'attaquant à des questions de finitude plus profondes et plus difficiles. Si S est le spectre d'un corps, la composante connexe de l'identité $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est un sous-schéma ouvert et fermé de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ qui a le bon goût d'être *de type fini* sur S. Sur une base générale S, la situation est plus délicate et il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour assurer l'existence de la composante neutre. Si par exemple $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est lisse le long de la section unité, on sait par [14, 4.2.10] que la composante neutre $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est représentable, que le morphisme d'inclusion naturel de $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est une immersion ouverte, et que $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est *de type fini* sur S. Si de plus les fibres de X sont géométriquement normales et géométriquement intègres, $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est même propre sur S. Mais en général, il se peut très bien que $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ ne soit pas représentable, même par un espace algébrique (et même si $\mathrm{Pic}_{X/S}$ l'est). Dans ce cas, un autre sous-foncteur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ peut rendre des services analogues : la composante de torsion de $\mathrm{Pic}_{X/S}$, notée $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$. Moralement, c'est l'ensemble des points de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ dont une puissance est dans $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$. Dans le cas des schémas, on sait depuis SGA 6 (exp. XIII) que $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$ est représentable par un espace algébrique nettement plus souvent que $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$, et que c'est un ouvert de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ qui est *de type fini* sur S. En fait, c'est bien souvent le plus grand sous-groupe ouvert de type fini de $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

Par ailleurs, même lorsque $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ existe, il présente l'inconvénient de perdre, par construction, toute trace des informations de nature discrète contenues dans le foncteur de Picard (le nombre de composantes connexes par exemple). Pour étudier ces aspects, il est naturel de considérer les groupes de Néron-Severi. Pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S, le groupe de Néron-Severi en $\overline{s}$ est

$$\mathrm{NS}(\overline{s}) = \mathrm{Pic}_{X_{\overline{s}}/\kappa(\overline{s})}(\kappa(\overline{s}))/\mathrm{Pic}^{0}_{X_{\overline{s}}/\kappa(\overline{s})}(\kappa(\overline{s})).$$

Il résulte des définitions que l'on retrouve les parties libre et de torsion du groupe de Néron-Severi en $\overline{s}$ en fonction de la composante de torsion du foncteur de Picard. En notant $P(\overline{s})$ le groupe des $\kappa(\overline{s})$-points du foncteur de Picard de la fibre géométrique en $\overline{s}$, et de manière analogue $P^0(\overline{s})$ (resp. $P^\tau(\overline{s})$) les points de sa composante neutre (resp. de torsion), on a

$$\mathrm{NS}(\overline{s})_{tors} = P^\tau(\overline{s})/P^0(\overline{s}) \quad \text{et} \quad \mathrm{NS}(\overline{s})/\mathrm{NS}(\overline{s})_{tors} = P(\overline{s})/P^\tau(\overline{s})$$

Raynaud et Kleiman ont prouvé que les groupes de Néron-Severi sont de type fini dès que X est un schéma propre sur S. De plus, si S est noethérien, le rang de $\mathrm{NS}(\overline{s})$ et l'ordre de son sous-groupe de torsion sont bornés uniformément sur S (voir SGA 6, exp. XIII 5.1).

Pour certains champs algébriques, on peut calculer le groupe de Picard (et le foncteur de Picard) du champ en fonction de celui de son espace de modules grossier, voir par exemple [14, 5.3, 5.4]. On peut dans ces cas-là contrôler la torsion des groupes de Néron-Severi à l'aide de quelques calculs explicites, et des résultats généraux qui s'appliquent à l'espace de modules grossier. Mais pour traiter le cas général, il est nécessaire de disposer, pour le foncteur de Picard d'un champ algébrique, de résultats généraux analogues à ceux évoqués ci-dessus.

Si ma motivation première était de démontrer des résultats de finitude pour les groupes de Néron-Severi et la composante de torsion du foncteur de Picard d'un champ algébrique sur une base S, il s'est avéré nécessaire de démontrer le résultat de représentabilité relative suivant. Les points a) et b) généralisent un résultat de SGA 6, exp. XII, au cas où $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont des champs algébriques, tandis que le point c) donne un résultat de finitude relative pour les *champs* de Picard au lieu des *foncteurs* de Picard, ce qui est nouveau même lorsque $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont des schémas.

Théorème 1.1.1 ([Bro2, 2.3.2]) *Soit S un schéma intègre et soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ des champs algébriques propres et de présentation finie sur S. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme surjectif. Alors il existe un ouvert non vide U de S avec les propriétés suivantes :*

a) Les foncteurs $(\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S})_{|U}$ et $(\mathrm{Pic}_{\mathscr{Y}/S})_{|U}$ sont des unions disjointes de schémas quasi-projectifs de présentation finie.

b) Le morphisme $f^* : (\mathrm{Pic}_{\mathscr{Y}/S})_{|U} \to (\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S})_{|U}$ est quasi-affine et de type fini.

c) Les champs $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)_{|U}$ et $\mathscr{P}ic(\mathscr{Y}/S)_{|U}$ sont algébriques, et le morphisme $f^* : \mathscr{P}ic(\mathscr{Y}/S)_{|U} \to \mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)_{|U}$ est de type fini et de diagonale affine.

Remarque 1.1.2 Si de plus $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont réduits, à fibres géométriquement réduites et géométriquement connexes, alors le morphisme f^* de c) est lui aussi quasi-affine [Bro2, 2.3.1]. Par ailleurs, pour tout point s de S, la fibre $f^*_s : (\mathrm{Pic}_{\mathscr{Y}/S})_s \to (\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S})_s$ du morphisme de b) est en fait affine [Bro2, 2.3.7].

La preuve est assez longue et technique. Le cœur de l'argument repose sur de la descente non plate. La preuve a aussi nécessité des améliorations techniques des résultats de ma thèse concernant la diagonale du champ de Picard $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)$.

Le cas où S est le spectre d'un corps est particulièrement intéressant : il n'a pas d'ouvert non vide non trivial, donc les résultats a), b) et c) sont valables au-dessus de S tout entier.

Le théorème 1.1.1 a de nombreuses conséquences. Par des arguments d'induction noethérienne, on peut déjà en déduire des résultats de finitude généraux au-dessus de S tout entier, dont nous donnons trois exemples ci-dessous. Dans ces énoncés, les foncteurs et les champs de la forme $\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S}$ ou $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)$ ne sont pas nécessairement représentables, mais les notions de finitude usuelles (être de type fini, quasi-compact, quasi-séparé, etc.) ont malgré tout un sens, qui coïncide avec le sens usuel dans le cas représentable : voir [Bro2, §3.1] pour les définitions précises.

Proposition 1.1.3 ([Bro2, 3.2.1]) *Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique propre et de présentation finie sur une base S. Alors le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S}$ et le champ de Picard $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)$ sont quasi-séparés (i.e. leurs diagonales sont quasi-compactes).*

Proposition 1.1.4 ([Bro2, 3.2.2]) *Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ des champs algébriques propres et de présentation finie sur une base S. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme surjectif. Alors les morphismes $f^* : \mathrm{Pic}_{\mathscr{Y}/S} \to \mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S}$ et $f^* : \mathscr{P}ic(\mathscr{Y}/S) \to \mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)$ sont de présentation finie.*

Proposition 1.1.5 ([Bro2, 3.2.3]) *Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique propre et de présentation finie sur un schéma S. Alors pour tout entier $n > 0$, les morphismes d'élévation à la puissance n*

$$\varphi_n \colon \begin{cases} \mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S} \\ \quad \mathscr{L} \quad\ \longmapsto \mathscr{L}^{\otimes n} \end{cases} \quad \textit{et} \quad \lambda_n \colon \begin{cases} \mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S) \longrightarrow \mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S) \\ \qquad \mathscr{L} \qquad \longmapsto \mathscr{L}^{\otimes n} \end{cases}$$

sont de présentation finie.

En combinant le Théorème 1.1.1 avec le lemme de Chow et les résultats de SGA 6 sur les groupes de Néron-Severi et sur la composante de torsion du foncteur de Picard d'un schéma, on obtient une version champêtre desdits résultats.

Théorème 1.1.6 ([Bro2, 3.3.3 et 3.4.1]) *Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique propre et de présentation finie sur un schéma S. Alors :*

(i) Le morphisme $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathscr{X}/S} \to \mathrm{Pic}_{\mathscr{X}/S}$ est (représentable par) une immersion ouverte.

(ii) $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathscr{X}/S}$ est de présentation finie sur S.

(iii) Pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S, le groupe de Néron-Severi

$$\mathrm{NS}(\overline{s}) = \frac{\mathrm{Pic}_{\mathscr{X}_{\overline{s}}/\kappa(\overline{s})}(\kappa(\overline{s}))}{\mathrm{Pic}^{0}_{\mathscr{X}_{\overline{s}}/\kappa(\overline{s})}(\kappa(\overline{s}))}$$

est de type fini. De plus, si S est noethérien, le rang de $\mathrm{NS}(\overline{s})$ et l'ordre de son sous-groupe de torsion sont bornés uniformément sur S.

On obtient aussi des propriétés de finitude pour le *groupe* de Picard d'un champ algébrique.

Théorème 1.1.7 ([Bro2, 3.4.5]) *Soit S le spectre de $\mathbb{Z}$ ou d'un corps k qui est de type fini sur son sous-corps premier. Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique normal qui est de type fini sur S. Alors le groupe* $\mathrm{Pic}\,(\mathscr{X})$ *est de type fini.*

1.2 Cohomologie et changement de base

En théorie des schémas, le point-clé pour obtenir des « théorèmes de changement de base » pour la cohomologie d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur un schéma propre (sur un anneau noethérien A) est l'existence d'un complexe fini de A-modules libres qui calcule « universellement » la cohomologie de $\mathscr{F}$.

Théorème 1.2.1 (Mumford, [54, §5]) *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens avec $Y = \mathrm{Spec}\,A$ affine, et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X, plat sur Y. Alors il existe un complexe*

$$K^\bullet : 0 \to K^0 \to K^1 \to \cdots \to K^n \to 0$$

de A-modules projectifs de type fini tel que, pour toute A-algèbre B, il existe un isomorphisme (fonctoriel en B) :

$$H^p(X \times_Y \mathrm{Spec}\,B, \mathscr{F} \otimes_A B) \simeq H^p(K^\bullet \otimes_A B).$$

Ce théorème a de nombreuses conséquences. Citons-en deux :

(i) La fonction $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$ est semi-continue supérieurement sur Y.

(ii) Elle est constante si et seulement si $R^p f_* \mathscr{F}$ est un fibré vectoriel, de fibres les $H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$.

Une différence fondamentale entre les champs algébriques et les schémas (ou même les espaces algébriques) est que les premiers peuvent être de dimension cohomologique infinie. Pour un tel champ, un complexe comme celui donné par le théorème 1.2.1 ne peut évidemment pas exister. Or, pour démontrer les résultats de finitude du paragraphe précédent, il était nécessaire de disposer des conséquences (i) et (ii) signalées ci-dessus. On peut obtenir un résultat analogue à 1.2.1 si l'on accepte de se limiter aux champs *modérés*. Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique localement de présentation finie sur un schéma S, dont le champ d'inertie $\mathscr{I} = \mathscr{X}_{\mathscr{X} \times_S \mathscr{X}} \mathscr{X}$ est fini sur $\mathscr{X}$. Il existe alors, d'après Keel et Mori [42], un espace de modules $\pi : \mathscr{X} \to X$. Suivant Abramovich, Olsson et Vistoli [2, 3.1], on dit que $\mathscr{X}$ est *modéré* si le foncteur $\pi_* : \mathfrak{Qcoh}\,(\mathscr{X}) \to \mathfrak{Qcoh}\,(X)$ est exact. On démontre alors le résultat suivant.

Théorème 1.2.2 ([Bro2, A.1.4]) *Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique modéré, quasi-compact et séparé (resp. propre) sur $S =$* $\mathrm{Spec}\,A$ *(resp. avec A noethérien). Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur $\mathscr{X}$, plat sur S. Il existe alors un complexe $K^\bullet$ de A-modules projectifs (resp. projectifs de type fini) avec les mêmes propriétés qu'en 1.2.1.*

Ceci permet de généraliser aux champs algébriques modérés tous les résultats classiques de [54, §5]. Mais en caractéristique positive, être modéré est une réelle restriction sur le champ. Une autre voie est possible lorsque la base S est de dimension cohomologique finie. Dans ce cas, on démontre qu'il existe pour tout n un complexe de longueur $n+1$ qui calcule universellement les n premiers groupes de cohomologie. Plus précisément :

Corollaire 1.2.3 ([Bro2, A.2.4]) *Soient A un anneau noethérien de dimension cohomologique finie et S son spectre. Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique propre sur S, et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module cohérent, plat sur S. Soit n un entier naturel. Alors il existe un complexe fini de A-modules plats et de type fini*

$$0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M^n \longrightarrow M^{n+1},$$

et des isomorphismes fonctoriels

$$H^i(M^\bullet \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathscr{X} \otimes_A B, \mathscr{F} \otimes_A B)\,, \quad 0 \leq i \leq n\,.$$

Ce complexe rend presque les mêmes services que celui de 1.2.1 et permet de montrer que tous les résultats de [54, §5] tiennent encore pour un champ algébrique sur le spectre d'un anneau de dimension cohomologique finie (par exemple un anneau régulier de dimension finie). Dans un cas comme dans l'autre (champs modérés ou base de dimension cohomologique finie), je démontre aussi que, si tous les faisceaux $R^i f_* \mathscr{F}$ sont plats, leur formation commute à tout changement de base.

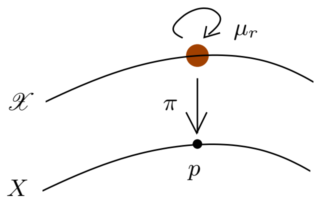
Si l'on travaille avec un champ non modéré sur une base non régulière, il n'existe pas en général de complexe analogue à celui de 1.2.1, comme nous l'avons signalé ci-dessus. Heureusement, les critères valuatifs, ainsi que le fait qu'un anneau intègre et de type fini sur $\mathbb{Z}$ ait toujours un ouvert dense régulier, permettent de ramener l'étude de la semi-continuité de la fonction $s \mapsto H^p(\mathscr{X}_s, \mathscr{F}_s)$ au cas où S est régulier. Ceci permet donc de prouver le théorème de semi-continuité dans le cas général.

Théorème 1.2.4 ([Bro2, A.3.2]) *Soit S un schéma et soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique propre et de présentation finie sur S. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module cohérent sur $\mathscr{X}$ qui est plat sur S. Alors, pour tout $i \geq 0$, la fonction $s \mapsto \dim_{k(s)} H^i(\mathscr{X}_s, \mathscr{F}_s)$ est semi-continue supérieurement sur S.*

1.3 Dualité pour les champs en groupes commutatifs

Motivation. Si X est une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps k, son morphisme d'Abel-Jacobi $a : X \to \operatorname{Pic}^1_{X/k} \subset \operatorname{Pic}_{X/k}$ est le X-point qui correspond au diviseur effectif $\Delta_X \subset X \times_k X$ (c'est-à-dire la diagonale). Concrètement, le morphisme a envoie un point x de X sur la classe du fibré en droites $\mathscr{O}_X(x)$. Le but $\operatorname{Pic}^1_{X/k}$ de ce morphisme est un torseur sous la jacobienne $J = \operatorname{Pic}^0_{X/k}$, qui est une variété abélienne. Si X a un k-point on en déduit un morphisme de X vers la jacobienne J elle-même. Ce morphisme est très utile dans de nombreux contextes. Par exemple, pour la conjecture des sections de Grothendieck (dont nous reparlerons un peu plus loin), il permet de réduire la question de l'injectivité à la question analogue pour une variété abélienne au lieu d'une courbe.

Considérons maintenant la courbe orbifolde suivante $\mathscr{X}$ au-dessus de X.



Le morphisme π est un isomorphisme au-dessus de $X \smallsetminus \{p\}$, et est de la forme

$$\left[\operatorname{Spec}\left(\frac{A[x]}{x^r - s}\right)/\mu_r\right] \to \operatorname{Spec} A$$

dans un voisinage $\operatorname{Spec} A$ de p. Peut-on contruire un morphisme de $\mathscr{X}$ vers $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$ qui soit l'analogue du morphisme d'Abel-Jacobi ? On a bien sûr la composition évidente

$$\mathscr{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{a} \operatorname{Pic}_{X/k} \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$$

mais elle passe complètement à côté de la structure champêtre de $\mathscr{X}$. Si l'on essaie d'imiter la construction du morphisme a pour X en termes du diviseur diagonal Δ_X, on rencontre l'obstacle suivant : le morphisme $\Delta : \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times_k \mathscr{X}$ n'est pas une immersion fermée (ce n'est pas un monomorphisme). En fait, on peut se convaincre assez facilement qu'il ne peut pas exister de morphisme $\mathscr{X} \to \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$ qui puisse jouer de manière satisfaisante le rôle du morphisme d'Abel-Jacobi. En effet, on peut montrer (voir [14, 5.4]) que le foncteur de Picard de $\mathscr{X}$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}_{X/k} \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k} \longrightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

si bien que $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$ est une union disjointe de r copies de $\operatorname{Pic}_{X/k}$, et que π^* induit un isomorphisme $\operatorname{Pic}^0_{X/k} \simeq \operatorname{Pic}^0_{\mathscr{X}/k}$. Mais le champ $\mathscr{X}$ lui-même est connexe, ce qui impose à tout morphisme de $\mathscr{X}$ dans $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$ de se cantonner à une seule composante connexe de $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$. On peut donc dire, en un certain sens, que tout morphisme de $\mathscr{X}$ dans $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/k}$ *est contraint d'ignorer* la structure champêtre de $\mathscr{X}$.

Revenons à X. Il existe un autre morphisme naturel de X vers un torseur sous une variété abélienne : le morphisme d'Albanese. Il se trouve que dans le cas d'une courbe, il coïncide avec le morphisme d'Abel-Jacobi, via l'autodualité de la Jacobienne $J \simeq J^t$. Mais il se comporte mieux à au moins deux titres : d'une part il est fonctoriel, d'autre part il existe pour des variétés de dimension arbitraire. Pour une variété X, la variété d'Albanese associée à X est la variété abélienne duale de $\operatorname{Pic}^0_{X/k}$. Pour un champ algébrique, l'exemple des courbes orbifoldes discuté ci-dessus suggère la possibilité d'obtenir un morphisme qui ait du sens en remplaçant la composante neutre du foncteur de Picard par le foncteur de Picard tout entier, ou au minimum sa composante de torsion. Cette dernière n'est plus une variété abélienne, mais est (dans le cas précis de la courbe orbifolde ci-dessus) une extension d'un groupe fini par une variété abélienne. Ceci soulève la question suivante : quel doit être le dual d'un tel schéma en groupes ? C'est essentiellement le besoin d'un morphisme d'Albanese pour un champ algébrique qui a motivé l'étude générale de la dualité des champs en groupes commutatifs faite dans l'article [Bro4]. Notons cependant que ces champs en groupes et l'opération de dualité sont utiles dans d'autres contextes.

Dualité pour les champs en groupes commutatifs. On peut donner assez facilement une définition d'un objet dual pour un faisceau abélien arbitraire lorsque l'on se place dans le cadre plus large des champs en groupes commutatifs. Moralement, un champ en groupes commutatifs (parfois appelé un « champ de Picard ») est un champ G muni d'un morphisme d'addition $G \times_k G \to G$ qui satisfait un certain nombre de conditions naturelles exprimant le fait qu'il s'agit d'une loi de groupe commutative (la principale différence est qu'au lieu de demander aux diagrammes de commuter, on leur demande seulement de commuter « à isomorphisme près »). Deligne a donné dans SGA 4 une description de la 2-catégorie des champs en groupes commutatifs en termes de complexes de faisceaux abéliens de longueur 1. Par exemple un faisceau F correspond au complexe $[0 \to F]$, le champ classifiant BF correspond à $[F \to 0]$ tandis qu'un 1-motif (au sens de Deligne [26]) est un complexe $[X \to G]$ où X est un réseau tordu et G est une variété semi-abélienne. Le dual d'un champ en groupes G est simplement défini comme étant le champ des morphismes additifs de G vers $B\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

$$D(G) = \mathscr{H}om\,(G, \mathrm{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

Cette construction générale permet d'englober à la fois la dualité des variétés abéliennes, la dualité des 1-motifs [26, 10.2.10] et la dualité de Cartier des groupes finis et plats. Par exemple, si A est une variété abélienne, le dual $D(A)$ est la variété abélienne duale au sens classique, le dual de $\mathbb{Z}$ est $\mathrm{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, le dual de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est $B\mathbb{Z}$. Plus généralement, si F est un schéma en groupes fini et plat, ou diagonalisable, ou constant, alors $D(F) = BF^D$ et $D(BF) = F^D$, où $F^D = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ désigne le dual de Cartier de F. Pour tout champ en groupes commutatifs, on a un morphisme d'évaluation (fonctoriel) de G dans son bidual

$$e_G : G \longrightarrow D(D(G)).$$

Nous dirons que G est *dualisable* lorsque e_G est un isomorphisme. Il résulte facilement des définitions que le 2-foncteur $D(.)$ induit une 2-antiéquivalence de la 2-catégorie des champs en groupes commutatifs dualisables sur elle-même.

Ces définitions soulèvent deux questions naturelles :

(Q1) Si G jouit de bonnes propriétés géométriques, le dual $D(G)$ en bénéficie-t-il aussi ? Par exemple, si G est un champ *algébrique*, le champ $D(G)$ l'est-il aussi ? Plus généralement, à quelles conditions sur G le champ $D(G)$ est-il un champ algébrique ?

(Q2) Trouver des conditions suffisantes naturelles pour qu'un champ en groupes G soit dualisable.

Bien sûr, les 1-motifs de Deligne sont dualisables. D'autres classes de champs en groupes dualisables et stables par $D(.)$, inspirées des 1-motifs, ont été utilisées récemment (voir par exemple [11], [18] [31], [30], [41], [48] et [62]), par exemple la classe des champs en groupes commutatifs qui sont, localement sur S, des produits finis de copies de $\mathbb{Z}$, $\mathrm{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, ou de schémas abéliens (de tels champs en groupes sont parfois appelés des 1-motifs de Beilison).

Au sujet de la question (Q1), remarquons que l'on peut classer les propriétés géométriques que l'on impose à G en deux grandes familles, suivant la manière dont on se représente G. Une première possibilité est de demander qu'il existe une présentation de G comme champ associé à un complexe de longueur un $[G^{-1} \to G^0]$, où les faisceaux G^{-1} and G^0 seront assujettis à certaines conditions : c'est essentiellement ce que l'on fait pour les 1-motifs et pour les généralisations susmentionnées. Une autre possibilité est d'imposer des conditions géométriques directement au champ G, indépendamment de ses présentations. Cela revient plus ou moins à imposer des conditions aux faisceaux de cohomologie $H^i(G^\bullet)$, pour un complexe $G^\bullet$ de longueur un qui représente G (voir par exemple la description des champs abéliens qui précède le théorème 1.3.3). Cette voie est plus difficile d'accès a priori, mais certainement plus intrinsèque. Dans cet esprit, il serait possible que l'énoncé suivant soit vrai :

Conjecture 1.3.1 ([Bro4, 1.1]) *Soit S un schéma de base tel que $2 \in \mathscr{O}_S^\times$. Soit G un champ en groupes commutatifs propre, plat et de présentation finie sur S, dont le champ d'inertie est fini et plat. Alors :*

(1) Le champ $D(G)$ est algébrique, propre, plat et de présentation finie. Sa diagonale est finie.

(2) G est dualisable.

Nous démontrons dans [Bro4] un certain nombre de résultats qui donnent des réponses partielles à ces questions.

Théorème 1.3.2 ([Bro4, 4.14, 3.14 et 3.17]) *On se place sous les hypothèses de 1.3.1.*

(i) Si (1) est vrai, alors (2) l'est aussi.

(ii) Le champ $D(G)$ est algébrique et de présentation finie et ses fibres sont propres. Sa diagonale est affine et quasi-finie.

(iii) Si G est un espace algébrique (i.e. si $H^{-1}(G) = 0$), alors $D(G)$ est plat.

(iv) Si $H^0(G)$ est cohomologiquement plat (ce qui est automatique lorsque S est le spectre d'un corps), alors toutes les conclusions de 1.3.1 sont valables.

L'hypothèse $2 \in \mathscr{O}_S^\times$ est présente car la preuve repose en partie sur des critères, dus à Breen, d'annulation de certains faisceaux Ext. Bien que cette hypothèse soit réellement nécessaire pour l'annulation des Ext en question, il est possible qu'elle soit superflue pour 1.3.1.

Pour tenter de répondre à la question (Q2), nous identifions plusieurs classes de champs en groupes qui se comportent bien vis-à-vis de la dualité. Soit G un champ en groupes commutatifs. On note comme d'habitude $H^0(G)$ son espace de modules grossier et $H^{-1}(G)$ le groupe d'automorphismes d'un objet neutre. Nous dirons que G est :

— *un champ abélien* si G est propre, plat, de présentation finie, à fibres géométriquement réduites et géométriquement connexes, et si son champ d'inertie I_G est fini, plat et de présentation finie sur G. De manière équivalente [Bro4, 2.14], le champ G est abélien si $H^{-1}(G)$ est fini, plat et de présentation finie, et $H^0(G)$ est un schéma abélien.

— *un groupe duabélien* si G est un espace algébrique propre, plat, cohomologiquement plat et de présentation finie. De manière équivalente, G est duabélien s'il est extension d'un groupe fini, plat et de présentation finie par un schéma abélien. (En particulier, c'est un schéma.)

— *finabélien* si $H^0(G)$ est un groupe duabélien et $H^{-1}(G)$ est fini, plat et de présentation finie.

La classe des champs en groupes finabéliens englobe celles des groupes duabéliens et des champs abéliens. Comme le nom le suggère, la classe des groupes duabéliens est duale de la classe des champs abéliens.

Théorème 1.3.3 ([Bro4, 3.17])

1. *Si G est finabélien, il est dualisable et $D(G)$ est encore finabélien.*
2. *Si G est duabélien, alors $D(G)$ est un champ abélien.*
3. *Si G est un champ abélien, alors $D(G)$ est duabélien.*

Les preuves des théorèmes 1.3.2 et 1.3.3 font usage, entre autres ingrédients, du résultat de dévissage suivant, qui présente je pense un intérêt propre et dont la preuve m'a été suggérée par Raynaud.

Théorème 1.3.4 ([Bro4, 3.11]) *Soit S le spectre d'un anneau artinien local de corps résiduel algébriquement clos et soit G un schéma en groupes commutatifs propre et plat sur S. Alors G s'insère dans une suite exacte*

$$0 \to F \to G \to A \to 0$$

où A est un schéma abélien et F est un schéma en groupes fini et plat.

On en déduit facilement que, si S est le spectre d'un anneau artinien et si G est un schéma en groupes commutatifs propre et plat sur S, son dual $D(G)$ est propre et plat sur S. Je donne dans [Bro4] d'autres conditions suffisantes pour qu'un champ en groupes soit dualisable. En voici un exemple.

Théorème 1.3.5 ([Bro4, 4.11]) *Soit S un schéma régulier sur lequel 2 est inversible. Soit G un champ en groupes commutatifs sur S. On suppose que, localement pour la topologie étale sur S :*

(i) $H^0(G)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to A \to H^0(G) \to F \to 0$$

où A est un schéma abélien sur S, et où F peut être reconstruit, par extensions successives, à partir de schémas en groupes finis localement libres, et de groupes constants libres de rangs finis ;

(ii) $H^{-1}(G)$ peut être reconstruit, par extensions successives, à partir de schémas en groupes finis localement libres et de tores.

Alors G est dualisable, et $D(G)$ satisfait les mêmes hypothèses que G. Plus précisément, dès que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors $H^{-1}(D(G))$ est isomorphe au dual de Cartier de F, et $H^0(D(G))$ est extension du dual de Cartier de $H^{-1}(G)$ par le schéma abélien dual de A.

Pour résumer, voici un tableau qui recense quelques classes de groupes dualisables faciles à décrire. Dans chaque ligne de ce tableau, le 2-foncteur $D(.)$ induit une 2-équivalence entre la classe de gauche et la classe de droite. Dans la dernière ligne, on suppose que $2 \in \mathscr{O}_S^\times$.

D(.)	
groupes de type multiplicatif	champs classifiants de groupes constants tordus
groupes constants tordus	champs classifiants de groupes de type multiplicatif
groupes finis et plats	champs classifiants de groupes finis et plats
schémas abéliens	schémas abéliens
1-motifs	1-motifs
champs abéliens	groupes duabéliens
champs finabéliens	champs finabéliens

Morphisme d'Albanese. Revenons à notre motivation initiale : généraliser le morphisme d'Albanese au contexte des champs algébriques. Soit $f : X \to S$ un champ algébrique. On suppose que le morphisme $\mathscr{O}_S \to f_* \mathscr{O}_X$ est universellement un isomorphisme (i.e. pour tout morphisme $T \to S$, le morphisme $\mathscr{O}_T \to (f_T)_* \mathscr{O}_{X_T}$ est un isomorphisme) et que f a des sections localement pour la topologie *fppf* sur S. Par [14, 2.3], on a une suite exacte canonique de champs en groupes

$$0 \longrightarrow B\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \mathscr{P}ic(X/S) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S} \longrightarrow 0\,.$$

Via l'identification entre $B\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et le champ des faisceaux inversibles sur S, la première flèche est simplement le pullback f^*. La seconde flèche est la projection canonique du champ de Picard sur son espace de modules grossier. Comme f a localement des sections, il en est de même pour le morphisme $D(f^*)$ de $D(\mathscr{P}ic(X/S))$ vers $D(B\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, donc $\pi := D(f^*)$ est un épimorphisme. On en déduit (voir [Bro4, 3.18]) une suite exacte, duale de la précédente :

$$0 \longrightarrow D(\mathrm{Pic}_{X/S}) \xrightarrow{\ j\ } D(\mathscr{P}ic(X/S)) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Or, comme on l'explique dans [Bro4, 5.8], une extension de $\mathbb{Z}$ par un champ en groupes G définit naturellement un G-torseur, à savoir l'image inverse de la section $1 \in \mathbb{Z}$. C'est ce torseur que nous appellerons le torseur d'Albanese. Il sera noté $A^1(X)$ dans la suite.

$$A^1(X) := \pi^{-1}(1).$$

C'est un torseur sous le champ en groupes commutatifs $A^0(X) := D(\mathrm{Pic}_{X/S})$. Le principal intérêt de ce torseur est qu'il est muni naturellement d'un morphisme $X \to A^1(X)$ qui sera un excellent candidat pour jouer le rôle du morphisme d'Albanese. En effet, si x est un objet de $X(U)$ pour un certain S-schéma U, notons encore x la section induite du morphisme $X_U \to U$, où $X_U = X \times_S U$. Alors le pullback x^* définit un morphisme de champs en groupes commutatifs de $\mathscr{P}ic(X_U/U)$ vers $\mathscr{P}ic(U/U) \simeq (B\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_U$. Autrement dit, x^* définit un point du champ dual $D(\mathscr{P}ic(X/S))$. Cette construction est fonctorielle, et définit un morphisme naturel de champs $\varphi : X \to D(\mathscr{P}ic(X/S))$. Un calcul immédiat montre que, modulo l'identification de $D(B\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ avec $\mathbb{Z}$ faite ci-dessus, le morphisme composé $\pi \circ \varphi$ de X vers $\mathbb{Z}$ est constant égal à 1. Ceci prouve que φ se factorise à travers le sous-champ (ouvert et fermé) $A^1(X)$ de $D(\mathscr{P}ic(X/S))$. Ce morphisme sera noté a_X dans la suite et appelé le *morphisme d'Albanese.*

$$a_X : X \to A^1(X).$$

Ce morphisme a de bonnes propriétés formelles : on vérifie facilement que sa formation commute au changement de base. Par ailleurs, il est fonctoriel au sens suivant : si $g : X \to Y$ est un morphisme de champs algébriques qui satisfont aux hypothèses ci-dessus, alors on a un morphisme naturel $A^1(g) : A^1(X) \to A^1(Y)$ qui est $A^0(g)$-équivariant et qui fait 2-commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a_X"] \arrow[d, "g"'] & A^1(X) \arrow[d, "A^1(g)"] \\ Y \arrow[r, "a_Y"'] & A^1(Y)\,. \end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que ce morphisme d'Albanese mérite réellement d'être appelé ainsi. Depuis Serre [63] et Grothendieck [36, exp. 236, FGA VI, thm 3.3 (iii)], on définit généralement le morphisme d'Albanese par sa propriété universelle : c'est l'unique morphisme, s'il existe, qui est universel pour les morphismes vers les groupes algébriques d'un type donné, ou plus généralement vers les torseurs sous ces mêmes groupes algébriques, si l'on ne suppose pas l'existence d'une section pour X. Mon principal résultat au sujet de ce morphisme est la propriété universelle suivante. Dans cet énoncé, $A^0_\tau(X)$ désigne le champ en groupes $D(\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S})$ et $A^1_\tau(X)$ désigne le $A^0_\tau(X)$-torseur obtenu à partir de $A^1(X)$ par extension des scalaires le long du morphisme naturel $A^0(X) \to A^0_\tau(X)$, dual de l'inclusion canonique $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$. Par abus de notation, on note encore $a_X : X \to A^1_\tau(X)$ le morphisme composé $X \to A^1(X) \to A^1_\tau(X)$ et on l'appelle encore le morphisme d'Albanese.

Théorème 1.3.6 ([Bro4, 8.1]) *Soit X un champ algébrique sur une base S avec les hypothèses ci-dessus. On suppose de plus que la composante de torsion $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ de son foncteur de Picard est un groupe duabélien. Alors le morphisme d'Albanese $a_X : X \to A^1_\tau(X)$ est initial parmi les morphismes de X vers un torseur sous un champ abélien. Plus précisément, pour tout triplet (B, T, b) où B est un champ abélien, T est un B-torseur et $b : X \to T$ est un morphisme de champs algébriques, il existe un triplet (c_0, c_1, γ) où $c_0 : A^0_\tau(X) \to B$ est un morphisme de champs en groupes commutatifs, $c_1 : A^1_\tau(X) \to T$ est un morphisme c_0-équivariant, et γ est un 2-isomorphisme entre $c_1 \circ a_X$ et b. Un tel triplet (c_0, c_1, γ) est unique à unique isomorphisme près.*

En pratique, demander que $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ soit représentable revient plus ou moins à demander que X soit au minimum propre et plat (il y a peu de résultats de représentabilité sans ces hypothèses). Remarquons cependant que, contrairement à ce qu'il se passe pour des généralisations du morphisme d'Albanese dans d'autres contextes (par exemple pour une variété arbitraire sur un corps, voir par exemple [6], [59], [33], [61], [62] ; même si certains de ces articles considèrent des morphismes à valeurs dans des schémas en groupes non compacts, ce qui cause des difficultés très différentes des nôtres), nous n'avons pas besoin de supposer que X a un S-point pour obtenir notre morphisme d'Albanese, et ce morphisme d'Albanese est défini sur X tout entier (comparer avec [6, 7.3]). Nous n'avons pas non plus besoin de supposer que la base S est le spectre d'un corps : c'est un schéma arbitraire.

Exemple 1.3.7 Considérons le cas d'une courbe tordue $\mathscr{C} \to C$ comme celles définies par Abramovich et Vistoli [3]. On se fixe une famille de courbes projectives et lisses $C \to S$. Suivant [1, B.2] (voir aussi [16, 2.2.4 et 4.1]), on construit $\mathscr{C}$ comme un champ de racines $\sqrt[r_1]{(\mathscr{L}_1, s_1)} \times_S \cdots \times_S \sqrt[r_n]{(\mathscr{L}_n, s_n)}$, où $\mathscr{L}_i$ est un faisceau inversible sur C et s_i est une section globale de $\mathscr{L}_i$. Alors, par [14, 5.4], $\mathrm{Pic}_{\mathscr{C}/S}$ est extension de $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ par $\mathrm{Pic}_{C/S}$.

$$0 \to \mathrm{Pic}_{C/S} \to \mathrm{Pic}_{\mathscr{C}/S} \to \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z} \to 0$$

Par [Bro4, 3.19], la suite duale est exacte.

$$0 \to B\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{r_i}\right) \to A^0(\mathscr{C}) \to A^0(C) \to 0$$

On voit donc que $A^0(\mathscr{C})$ est une $\prod_{i=1}^n \mu_{r_i}$-gerbe sur $A^0(C)$. Soit Q l'image de $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathscr{C}/S}$ dans $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$. C'est un sous-groupe ouvert et fermé du groupe $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$. Par ailleurs, $\mathrm{Pic}^{\tau}_{C/S}$ est un schéma abélien. Par [Bro2, 3.3.2], on a une suite exacte $0 \to \mathrm{Pic}^{\tau}_{C/S} \to \mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathscr{C}/S} \to Q \to 0$. Par [Bro4, 3.19], la suite duale est exacte, donc $A^0_{\tau}(\mathscr{C})$ est une Q^D-gerbe sur le schéma abélien $A^0_{\tau}(C) = (\mathrm{Pic}^0_{C/S})^t$. En particulier c'est un champ abélien. On peut même décrire assez explicitement le morphisme $\mathscr{C} \to A^1_{\tau}(\mathscr{C})$. Supposons pour cela que $\mathscr{C}$ a un S-point x_0 (c'est vrai localement pour la topologie *fppf*). Alors le torseur se trivialise. En identifiant $A^1_{\tau}(\mathscr{C})$ à $A^0_{\tau}(\mathscr{C})$ (le neutre étant l'image de x_0), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{a_{\mathscr{C}}} & A^0_{\tau}(\mathscr{C}) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A^0_{\tau}(\pi)} \\ C & \xrightarrow[a_C]{} & A^0_{\tau}(C) \end{array}$$

dans lequel la flèche du bas est le morphisme d'Albanese classique (qui envoie $\pi(x_0)$ sur 0). On vérifie alors que, dans les fibres au-dessus de $\pi(x_0)$, le morphisme $a_{\mathscr{C}}$ s'identifie au dual de l'inclusion de Q dans $\prod \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$.

Application à la conjecture des sections. Soit k un corps de groupe de Galois absolu $G_k = \mathrm{Gal}\,(k^{\mathrm{sep}}/k)$. Soit X une variété géométriquement connexe sur k et soit $\overline{x}$ un point géométrique de X. Le groupe fondamental de X s'insère dans une suite exacte

$$1 \to \pi_1(X \times_k k^{\mathrm{sep}}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to G_k \to 1.$$

Si $a \in X(k)$ est un point rationnel de X, la fonctorialité du π_1 donne un morphisme de groupes $s_a : G_k \to \pi_1(X, \overline{a})$. Tout chemin étale γ sur $\overline{X}$ entre $\overline{x}$ et $\overline{a}$ définit un isomorphisme $\pi_1(X, \overline{a}) \simeq \pi_1(X, \overline{x})$. Par composition, on obtient une section $s_a : G_k \to \pi_1(X, \overline{x})$ du morphisme $\pi : \pi_1(X, \overline{x}) \to G_k$. Si l'on change le chemin, la section s_a est modifiée par conjugaison par un élément de $\pi_1(\overline{X}, \overline{x})$. En notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des sections de π quotienté par l'action de conjugaison de $\pi_1(\overline{X}, \overline{x})$, cette construction définit une application

$$s : X(k) \to \mathscr{S}.$$

La célèbre *conjecture des sections* de Grothendieck (GSC) affirme alors que, si X est une courbe projective, lisse, géométriquement connexe et de genre $g \geq 2$, sur un corps k qui est de type fini sur $\mathbb{Q}$, l'application s que nous venons de construire est bijective. Il est facile de voir que s est injective, la conjecture concerne donc la surjectivité.

Dans [10], Borne et Vistoli ont prolongé la théorie de Nori du schéma en groupes fondamental en une théorie de la gerbe fondamentale, qui s'applique aux champs algébriques même en l'absence d'un point rationnel. Lorsqu'elle existe (pour un champ algébrique donné X sur un corps k), la gerbe fondamentale est un morphisme $X \to \Pi_{X/k}$ vers une gerbe profinie, avec une propriété universelle pour les morphismes vers les champs finis (voir [10, 5.1]). Leur formalisme permet de reformuler la conjecture des sections (GSC). En effet, l'application s est bijective si et seulement si le morphisme naturel $X \to \Pi_{X/k}$ induit une bijection sur les classes d'isomorphie de points k-rationnels. L'un des intérêts de leur construction est qu'elle ne dépend pas du choix d'un point géométrique de X. En collaboration avec Borne et Vistoli, nous avons démontré un résultat qui permet de construire de nouveaux exemples de courbes qui vérifient la conjecture des sections. Plus précisément, soit P une variété de Severi-Brauer sur un corps k. Soit r son exposant (i.e. l'ordre de sa classe dans le groupe de Brauer). On sait que le groupe $\mathrm{Pic}\,(P)$ est engendré par un faisceau inversible de degré r, que l'on appelle $\mathscr{O}_P(r)$. Soit $f : X \to P$ un morphisme, où X est un champ algébrique inflexible (voir [10] pour la notion de champ inflexible). Ici $X(k)$ est vide, puisque P n'a pas de k-points. La conjecture des sections pour X signifie alors simplement que $\Pi_{X/k}(k)$ est vide aussi.

Proposition 1.3.8 ([Bro4, 10.1] ou [10]) *On suppose qu'il existe un nombre premier p divisant r tel que $f^*\mathscr{O}_P(r)$ admette une racine p-ième sur X. Alors $\Pi_{X/k}(k) = \varnothing$.*

L'ingrédient essentiel de la preuve donnée dans [Bro4, 10.1] est le morphisme d'Albanese champêtre construit ci-dessus et sa propriété universelle. La preuve donnée dans [10] est obtenue par une méthode différente. Comme expliqué dans [10], ce résultat permet de donner une méthode générale de construction d'exemples de courbes projectives lisses de genre au moins 2 qui satisfont GSC. Je démontre aussi que, si la composante de torsion $\mathrm{Pic}\,^{\tau}_{X/k}$ est finie, alors le torseur d'Albanese $A^1(X)$ coïncide avec l'abélianisé de la gerbe fondamentale.

Torseurs universels et obstruction élémentaire. Le morphisme d'Albanese ci-dessus nous permet aussi de donner une description géométrique de certaines constructions arithmétiques classiques. Les « torseurs universels » et « l'obstruction élémentaire » ont été introduits par Colliot-Thélène et Sansuc dans une série de Notes [20, 21, 22] et dans l'article fondateur [23]. Ce sont les ingrédients-clés d'une méthode générale qui a fait la preuve de son utilité dans l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques. L'un des principaux outils est la suite exacte fondamentale suivante. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On suppose dans toute la suite de ce paragraphe que $\mathscr{O}_S \to f_*\mathscr{O}_X$ est universellement un isomorphisme, et que f a des sections localement pour la topologie *fppf*.

Lemme 1.3.9 ([21, prop. 1], [23, 2.0]) *Soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors il existe une suite exacte fonctorielle :*

$$0 \longrightarrow H^1(S,G) \xrightarrow{i_1} H^1(X,G) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}(G^D, \mathrm{Pic}_{X/S}) \xrightarrow{\partial} H^2(S,G) \xrightarrow{i_2} H^2(X,G)$$

Dans cette suite exacte, les morphismes i_1 et i_2 sont simplement donnés par pullback le long de f. Les groupes de cohomologie sont calculés au sens de la topologie *fppf*. Lorsque G est lisse, ils coïncident avec les groupes de cohomologie au sens étale.

On suppose de plus que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un réseau tordu, c'est-à-dire que, localement pour la topologie étale, il représente le faisceau constant associé à un groupe abélien ordinaire, libre et de rang fini. Son dual de Cartier $G_0 := \mathrm{Pic}^D_{X/S}$ est donc un groupe de type multiplicatif et de type fini. Suivant [21], un *torseur universel* est par définition un G_0-torseur T sur X (ou sa classe dans $H^1(X, G_0)$) tel que $\chi(T)$ soit égal à l'isomorphisme canonique de dualité $\lambda_0 : \mathrm{Pic}^{DD}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$. Maintenant, si $x \in X(S)$ est une section de f, elle induit des rétractions des morphismes i_1 et i_2 de la suite exacte ci-dessus et l'on voit qu'il existe un unique torseur universel $T_x \in H^1(X, G_0)$ tel que x^*T_x soit trivial. On l'appellera le *torseur universel associé à x*. Remarquons dès maintenant que, puisque x^*T_x est trivial, le S-point x est dans l'image du morphisme $T_x(S) \to X(S)$. L'*obstruction élémentaire* est la classe $\partial(\lambda_0)$ dans le groupe $H^2(S, G_0)$. C'est une obstruction à l'existence de torseurs universels : elle s'annule si et seulement s'il existe des torseurs universels sur X.

Essayons de donner, en quelques mots, une idée des raisons pour lesquelles ces objets sont utiles dans l'étude des points rationnels de X. Supposons que X soit propre, lisse, $\overline{k}$-rationnelle, et qu'elle admette des torseurs universels. Si le corps k est de type fini sur son sous-corps premier, alors par [20], il y a, à isomorphisme près, un nombre fini de torseurs universels $\pi_i : T^i \to X$ $(i = 1 \dots n)$ et ils induisent une partition de l'ensemble des points k-rationnels de X :

$$X(k) = \coprod_i \pi_i(T^i(k)).$$

Heuristiquement, cette description des k-points est utile car l'arithmétique des torseurs universels doit être plus simple que l'arithmétique de la variété X.

La suite exacte du Lemme 1.3.9 est obtenue dans [21, 23] par voie cohomologique. J'explique dans [Bro4, §9] comment le torseur d'Albanese $A^1(X)$, dont la construction a été rappelée ci-dessus, permet de donner une description *géométrique* de ces torseurs universels et de l'obstruction élémentaire. Donnons ici les principaux résultats. Notons $a : X \to A^1(X)$ le morphisme d'Albanese champêtre construit ci-dessus. Ici, $A^0(X)$ est isomorphe à BG_0, où G_0 est le dual de Cartier de $\mathrm{Pic}_{X/k}$, ce qui signifie que $A^1(X)$ peut être vu comme une G_0-gerbe.

Commençons par les torseurs universels. Soit $x \in X(k)$ un k-point de X. Son image $a(x)$ permet de trivialiser la gerbe $A^1(X)$ et d'obtenir un isomorphisme $A^1(X) \simeq BG_0$. Par composition avec a, on obtient un morphisme $X \to BG_0$, qui correspond donc à un G_0-torseur sur X que nous noterons T'_x. Je démontre alors :

Proposition 1.3.10 ([Bro4, 9.5]) *Le torseur T'_x est isomorphe au torseur universel T_x associé à x.*

Passons maintenant à l'obstruction élémentaire. Plus généralement, nous allons voir que le morphisme d'Albanese permet essentiellement de retrouver la suite exacte du Lemme 1.3.9. Soit G un groupe de type multiplicatif et de type fini sur k et soit T un G-torseur sur X, c'est-à-dire un morphisme $\varphi_T : X \to BG$. D'après l'analogue de la propriété universelle 1.3.6 pour les champs classifiants de groupes de Cartier [Bro4, Thm 8.8], il existe un unique triplet (à unique isomorphisme près) (c_0, c_1, γ) tel que $c_0 : D(\mathrm{Pic}_{X/k}) \to BG$ soit un morphisme de champs en groupes, que $c_1 : A^1 \to BG$ soit un morphisme de champs c_0-équivariant et que γ soit un 2-isomorphisme entre $c_1 \circ a$ et φ_T. Via les isomorphismes canoniques $G^D \simeq D(BG)$ et $\mathrm{Pic}_{X/k} \simeq DD(\mathrm{Pic}_{X/k})$, le morphisme dual de c_0 s'identifie à un morphisme $\chi'(T) : G^D \to \mathrm{Pic}_{X/k}$. Ceci définit donc une application $\chi' : H^1(X, G) \to \mathrm{Hom}(G^D, \mathrm{Pic}_{X/k})$. On définit enfin $\partial' : \mathrm{Hom}(G^D, \mathrm{Pic}_{X/k}) \to H^2(X, G)$ comme étant l'application qui à $\lambda : G^D \to \mathrm{Pic}_{X/k}$ associe la classe dans $H^2(X, G)$ qui correspond à la G-gerbe (c'est-à-dire, le BG-torseur !) obtenue à partir du $D(\mathrm{Pic}_{X/k})$-torseur $A^1(X)$ par extension des scalaires le long du dual de λ (via l'isomorphisme canonique entre $D(G^D)$ et BG). On a alors les résultats suivants.

Théorème 1.3.11 ([Bro4, 9.3])

1. $\chi' = \chi$
2. *L'application ∂' est un morphisme de groupes. De plus, la suite exacte 1.3.9 reste exacte si l'on y remplace ∂ par ∂'.*
3. *L'obstruction élémentaire $\partial(\lambda_0)$ s'annule si et seulement si la gerbe $A^1(X)$ est triviale.*

1.4 Polarisations d'un 1-motif

Soit A une variété abélienne sur un corps k et soit $A^* = \mathrm{Pic}^0_{A/k}$ la variété abélienne duale. Soit L un fibré en droites sur A. Alors le morphisme $\varphi_L : A \to A^*$, defini par $\varphi_L(a) = t_a^* L \otimes L^{-1}$ où $t_a : A \to A$ désigne la translation par a, est un morphisme de groupes. C'est une conséquence facile du « Théorème du Carré », lui-même conséquence du classique « Théorème du Cube ». On a ainsi un morphisme de groupes fonctoriel $\Phi : \mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Hom}(A, A^*)$. Cette construction $L \mapsto \varphi_L$ est l'un des piliers de la théorie des variétés abéliennes.

La catégorie des 1-motifs étant un prolongement de la catégorie des variétés abéliennes, il est assez naturel de se demander si la construction de φ_L y a encore un sens. Les 1-motifs ont été introduits par Deligne dans [26, Section 10]. Soit S un schéma. Un 1-motif $M = (X, A, T, G, u)$ sur S est un complexe $[u : X \to G]$ de S-schémas en groupes commutatifs concentré en degrés 0 et -1, où :

— X est un réseau tordu, i.e. localement pour la topologie étale, c'est un groupe constant associé à un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini,

— G est un schéma semi-abélien (extension d'un schéma abélien A par un tore T),

— $u : X \to G$ est un morphisme de S-schémas en groupes.

Un morphisme entre deux 1-motifs est un morphisme de complexes de schémas en groupes sur S. Si M_1 et M_2 sont deux 1-motifs sur S, notons

$$\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$$

le groupe des morphismes de M_1 vers M_2.

En collaboration avec Cristiana Bertolin, nous démontrons dans l'article [Bro1] le résultat suivant.

Théorème 1.4.1 ([Bro1, 1.1]) *Soit S un schéma et soit M un 1-motif sur S. On suppose que S est normal, ou que la composante torique du motif M est triviale. Alors il existe un morphisme fonctoriel*

$$\Phi : \mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, M^*)$$

qui coïncide avec $L \mapsto \varphi_L$ si M est un schéma abélien.

Voir la remarque 1.4.5 plus bas pour des commentaires sur ce qu'il se passe lorsque la base S n'est pas normale et que la partie torique de M n'est pas triviale. Nous donnons en réalité deux constructions indépendantes du morphisme Φ.

Première construction. Elle est à la fois la plus explicite et la plus géométrique. Elle repose sur une description fonctorielle, due à Deligne [26, 10.2.11], du dual de Cartier M^* en termes d'extensions, ainsi que sur un dévissage explicite du groupe de Picard de M. Ce calcul de $\mathrm{Pic}\,(M)$, qui présente un intérêt en soi, peut être résumé comme suit. Le 1-motif M s'insère dans une « suite exacte » $0 \to G \to M \to X[1] \to 0$. Le morphisme $i : G \to M$ induit par pullback un morphisme $i^* : \mathrm{Pic}\,(M) \to \mathrm{Pic}\,(G)$. Nous donnons des suites exactes qui permettent de décrire assez explicitement le noyau de i^* ainsi que le groupe $\mathrm{Pic}\,(G)$ (voir plus de détails ci-dessous).

Seconde construction. La seconde construction est plus abstraite mais aussi plus éclairante. De plus elle fonctionne dans une catégorie un peu plus large que celle des 1-motifs, et permet de démontrer le fait que Φ est un morphisme de groupes. Cette construction repose sur le résultat suivant qui, nous semble-t-il, présente lui aussi un intérêt en soi : si la base S est *normale*, alors tout 1-motif sur S satisfait au *Théorème du Cube* bien connu dans la théorie des variétés abéliennes (voir [Bro1, 7.1]). Cette seconde construction repose par ailleurs fortement sur la description du dual de Cartier d'un 1-motif en termes de champs en groupes commutatifs (voir la section 1.3). Nous montrons bien sûr que ces deux constructions coïncident.

Dévissage du groupe de Picard de M. La notion de faisceau inversible sur un 1-motif M existe depuis longtemps dans la littérature, au moins implicitement. En effet, déjà dans [53, p. 64] Mumford introduit une notion naturelle de faisceau inversible sur un S-champ arbitraire (qui n'est même pas supposé algébrique, puisque les champs algébriques n'avaient pas encore été inventés !).

Comme on peut associer à tout 1-motif M sur S un champ en groupes commutatifs $\mathrm{st}(M)$ on peut définir la catégorie $\mathrm{PIC}(M)$ des faisceaux inversibles sur M comme étant la catégorie des faisceaux inversibles sur $\mathrm{st}(M)$. Le *groupe de Picard* de M, noté $\mathrm{Pic}\,(M)$, est alors le groupe des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles sur $\mathrm{st}(M)$.

Le champ $\mathrm{st}(M)$ associé à un 1-motif $M = [X \stackrel{u}{\to} G]$ est isomorphe au champ quotient $[G/X]$, où X agit sur G par translations via u. À travers cette identification, l'inclusion de 1-motifs $i : G \to M$ correspond à la projection $G \to [G/X]$, qui est étale et surjective. On peut alors décrire les faisceaux inversibles sur M comme des couples

$$(L, \delta)$$

où L est un faisceau inversible sur G et δ est une donnée de descente pour L relativement au recouvrement $i : G \to [G/X]$. Si l'on explicite cette donnée de descente, cela revient à dire qu'un faisceau inversible sur un 1-motif M est un faisceau inversible sur G muni d'une action de X qui est compatible avec l'action de X sur G par translations. Cette interprétation permet d'insérer le noyau du morphisme $i^* : \mathrm{Pic}\,(M) \to \mathrm{Pic}\,(G)$ dans une suite exacte longue, comme suit.

Théorème 1.4.2 ([Bro1, 1.3]) *On suppose que le schéma de base S est réduit. Alors le noyau K du morphisme i^* s'insère dans une suite exacte*

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\circ u} \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\beta^*} K \xrightarrow{\Theta} \Lambda \xrightarrow{\Psi} \Sigma.$$

Explicitons les différents termes de cette suite exacte. Le premier morphisme est simplement donné par la composition par u, où $u : X \to G$ est le morphisme structural de M. Par ailleurs, le groupe $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_m)$ s'identifie de manière naturelle à $\mathrm{Pic}\,(X[1])/\mathrm{Pic}\,(S)$, et K au noyau de $\mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S) \to \mathrm{Pic}\,(G)/\mathrm{Pic}\,(S)$. Via ces identifications, le morphisme β^* n'est autre que le pullback le long du morphisme de 1-motifs $\beta : M \to X[1]$. Le groupe Λ est le sous-groupe de $\mathrm{Hom}(X, G^D)$, où G^D est le schéma en groupes $\underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)$, constitué des $\lambda \in \mathrm{Hom}(X, G^D)$ tels que pour tout S-schéma U et tout couple de points $x, y \in X(U)$, $\lambda(x)(u(y)) = \lambda(y)(u(x))$. En identifiant G à son bidual, ceci équivaut à dire que $\lambda^D \circ u = u^D \circ \lambda$. Enfin, Σ est un quotient du groupe des morphismes bilinéaires symétriques $X \times_S X \to \mathbb{G}_m$. Il serait trop long de donner ici les définitions complètes de Σ et des morphismes Θ et Ψ, mais les constructions sont explicites et élémentaires.

Il nous reste à décrire le but $\mathrm{Pic}\,(G)$ de i^*. Le groupe G s'insère dans une suite exacte $0 \to T \stackrel{j}{\to} G \stackrel{\pi}{\to} A \to 0$ où A est un schéma abélien et T un tore. Notons

$$\xi : \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}\,(A)$$

le morphisme défini comme suit : pour tout morphisme $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$, $\xi(\alpha)$ est l'image par l'inclusion $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m) \hookrightarrow H^1(A, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}\,(A)$ de la classe $[\alpha_* G]$ du push-down de G par α. On montre alors le résultat suivant.

Proposition 1.4.3 ([Bro1, 1.2]) *Si S est normal, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\xi} \frac{\mathrm{Pic}\,(A)}{\mathrm{Pic}\,(S)} \xrightarrow{\pi^*} \frac{\mathrm{Pic}\,(G)}{\mathrm{Pic}\,(S)} \xrightarrow{j^*} \frac{\mathrm{Pic}\,(T)}{\mathrm{Pic}\,(S)}$$

est exacte.

Théorème du Cube pour les 1-motifs : Dans sa forme classique, le Théorème du Cube affirme que pour tout fibré en droites L sur une variété abélienne A, le fibré $\theta(L)$ associé est trivial, où

$$\theta(L) = m_{123}^* L \otimes (m_{12}^* L)^{-1} \otimes (m_{13}^* L)^{-1} \otimes (m_{23}^* L)^{-1} \otimes m_1^* L \otimes m_2^* L \otimes m_3^* L$$

et où, pour $I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{1, 2, 3\}$, $m_{i_1 \ldots i_l}$ désigne le morphisme additif $A^3 \to A$ donné par $(a_1, a_2, a_3) \mapsto a_{i_1} \ldots a_{i_l}$.

Dans [12] Breen propose le renforcement suivant du Théorème du Cube. Une structure cubiste sur L est une section de $\theta(L)$ qui satisfait certaines conditions supplémentaires qui font de $\theta_2(L) := \mu^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ (où $\mu, p_1, p_2 : G \times G \to G$ sont respectivement le morphisme d'addition, et les projections sur le premier et second facteur) une biextension symétrique de $G \times G$ par $\mathbb{G}_\mathrm{m}$. Un $\mathbb{G}_\mathrm{m}$-torseur cubiste est un faisceau inversible muni d'une structure cubiste. On dit alors qu'un S-schéma en groupes commutatifs G satisfait au Théorème du Cube si le foncteur d'oubli

$$\mathrm{CUB}(G) \longrightarrow \mathrm{RLB}(G)$$

de la catégorie $\mathrm{CUB}(G)$ des torseurs cubistes sur G, vers la catégorie $\mathrm{RLB}(G)$ des fibrés en droite rigidifiés sur G, est une équivalence de catégories.

La notion de structure cubiste introduite par Breen se généralise dans difficulités au contexte des champs en groupes commutatifs (voir [Bro1, 6.1]). Elle vient éclairer la construction de 1.4.1 en deux temps.

D'une part, dans un contexte très général, nous montrons que la donnée d'un fibré en droites cubiste $(\mathscr{L}, \tau)$ sur un champ en groupes commutatifs $\mathscr{G}$ définit un foncteur additif de $\mathscr{G}$ vers son dual $D(\mathscr{G}) = \mathscr{H}om(\mathscr{G}, B\mathbb{G}_m)$:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{(\mathscr{L},\tau)} : & \mathscr{G} & \longrightarrow & D(\mathscr{G}) \\ & a & \longmapsto & \left(b \mapsto \mathscr{L}_{ab} \otimes \mathscr{L}_a^{-1} \otimes \mathscr{L}_b^{-1}\right). \end{array}$$

D'autre part, nous montrons que, si la base S est normale, les 1-motifs satisfont au Théorème du Cube au sens ci-dessus. Plus précisément, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 1.4.4 ([Bro1, 7.1]) *Soient S un schéma et $[X \to G]$ un complexe de schémas en groupes commutatifs. Soit $\mathscr{G}$ le champ en groupes commutatifs associé. On suppose que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée.*

1. G est un schéma abélien.

2. S est normal, $X \times_S X$ est réduit, G est lisse à fibres connexes, et les fibres maximales de G sont extensions multiples de variétés abéliennes, de tores (non nécessairement déployés) et de copies de $\mathbb{G}_a$.

Alors $\mathscr{G}$ satisfait au théorème du cube.

Le théorème 1.4.1 est alors une conséquence immédiate de ces deux faits, compte tenu du fait que le quotient $\mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S)$ est isomorphe au groupe des classes de faisceaux inversibles rigidifiés sur M.

Signalons que la construction 1.4.1 ne permet pas d'épuiser tous les morphismes de M vers M^* : il existe en effet des morphismes qui ne proviennent pas d'un fibré en droites.

Remarque 1.4.5 Si la base S n'est pas normale, la construction qui permet d'associer un morphisme $\mathscr{G} \to D(\mathscr{G})$ à un fibré en droites cubistes sur un champ en groupes commutatifs $\mathscr{G}$ reste valable. On a donc toujours, si M est un 1-motif sur la base S, un morphisme canonique $\mathrm{CUB}(M) \to \mathrm{Hom}(M, M^*)$. En revanche, on ne peut plus identifier $\mathrm{CUB}(M)$ avec $\mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S)$. On a vu plus haut que le morphisme canonique $\mathrm{CUB}(M) \to \mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S)$ est un isomorphisme lorsque S est normale ou lorsque la partie torique de M est triviale, mais sur une base non normale il n'est ni injectif, ni surjectif en général, même lorsque M est un tore. Si S est réduit, ce morphisme est tout de même injectif. On pourra donc associer un morphisme $M \to M^*$ aux classes de $\mathrm{Pic}\,(M)/\mathrm{Pic}\,(S)$ qui proviennent d'un élément de $\mathrm{CUB}(M)$, i.e. aux fibrés en droites sur M qui admettent une structure du cube.

Chapitre 2

Critères de liberté pour la théorie des nombres

Ce chapitre présente les résultats que j'ai obtenus en algèbre commutative. Ces travaux sont tous plus ou moins directement inspirés par les problèmes de relèvement modulaire en théorie des nombres, et notamment par la preuve du dernier théorème de Fermat par Wiles. Bien que mes résultats soient uniquement des résultats d'algèbre commutative, afin de les replacer dans leur contexte, nous nous intéresserons dans la section 2.1 à une partie de la preuve de la modularité des courbes elliptiques semistables sur $\mathbb{Q}$ par Taylor et Wiles. Nous verrons deux résultats essentiels d'algèbre qui appaissent dans cette preuve : une méthode dite de « patching », utilisée pour traiter le cas « minimal », et un critère numérique permettant de caractériser les intersections complètes, permettant de déduire le cas général du cas minimal. La technique de « patching » en particulier s'est avérée tellement fructueuse qu'il serait difficile de surestimer l'exploitation qui en a été faite par la suite. Ses généralisations diverses et variées ont permis de démontrer une série de résultats remarquables qui vérifient dans de nombreux cas la conjecture de Fontaine-Mazur. La preuve spectaculaire par Newton et Thorne [56] de l'automorphie de toutes les puissances symétriques des représentations galoisiennes associées aux formes nouvelles en est un exemple récent. Dans la section 2.1, ce sont plus précisément les améliorations des critères de Taylor et Wiles proposées par Diamond dans [27] que nous verrons. Ce sont des critères qui, en plus de détecter si un anneau R est une intersection complète, permettent de démontrer simultanément qu'un certain module sur R est libre.

Les travaux présentés dans les sections 2.2 et 2.3 visent à renforcer le premier de ces critères, afin de rendre son application plus facile dans les problèmes de relèvement modulaire. Le théorème principal (voir 2.2.2 ou 2.3.2) permet en fait, dans les cas favorables, de s'affranchir totalement des arguments de patching. Bien qu'elle présente des résultats d'une nature légèrement différente, la section 2.4 reste dans le même esprit : l'une des applications du théorème principal 2.4.4 sur les suites indépendantes permet là encore d'éliminer le recours aux techniques de patching dans certains cas, sous des hypothèses qui restent malheureusement un peu trop contraignantes en pratique. La section 2.5 présente quant à elle des améliorations de l'autre critère de liberté de Wiles et Diamond, le critère numérique.

Notations et conventions

Soient A un anneau local noethérien (commutatif, unitaire), $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal et k_A son corps résiduel. L'*espace cotangent* de A est le k_A-espace vectoriel $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$. La dimension de cet espace vectoriel est appelée la *dimension de plongement* de A et notée $\mathrm{edim}(A)$. On a toujours $\dim A \leq \mathrm{edim}(A)$, où $\dim A$ est la dimension de Krull de A. Lorsqu'il y a égalité, on dit que A est *régulier*. Si M est un A-module et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on note $M[\mathfrak{a}]$ l'ensemble des éléments $m \in M$ tels que $\lambda m = 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}$. Si M est de type fini, on note $\mu_A(M)$ le nombre minimal de générateurs de M sur A. C'est aussi la dimension sur k_A de $M/\mathfrak{m}_A M$. La *dimension projective* de M est la longueur minimale d'une résolution projective de M.

Dimension plate. Soient M un A-module et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la *dimension plate* de M est $\leq n$ si M admet une résolution plate de longueur au plus n. Cette condition équivaut à $\mathrm{Tor}\,^A_{n+1}(-, M) = 0$. Lorsqu'elle est vérifiée, on a alors $\mathrm{Tor}\,^A_i(-, M) = 0$ pour tout $i \geq n+1$. Si M est de type fini sur A, sa dimension plate est égale à sa dimension projective.

Intersections complètes. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux. Lorsque φ est surjectif, on dit qu'il est d'intersection complète (ou que c'est une intersection complète) si son noyau peut être engendré par une suite régulière. Dans le cas général, soit $\widehat{B}$ le complété de B pour la topologie $\mathfrak{m}_B$-adique. Par [5], le composé $A \to B \to \widehat{B}$ admet une « factorisation régulière », c'est-à-dire une factorisation de la forme $A \to A' \twoheadrightarrow \widehat{B}$ où $A' \twoheadrightarrow \widehat{B}$ est surjectif et où le morphisme $A \to A'$ est plat et de fibre spéciale régulière. Suivant Avramov [4], on dit alors que φ est une intersection complète si $A' \twoheadrightarrow \widehat{B}$ en est une au sens précédent. Ceci ne dépend pas du choix de la factorisation régulière.

2.1 Ingrédients d'algèbre commutative dans la preuve de Wiles du théorème de Fermat.

Pour achever sa preuve, Wiles doit montrer que, pour tout ensemble fini Σ de nombres premiers, un certain morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres $\Phi_\Sigma : R_\Sigma \to T_\Sigma$ est un isomorphisme et que T_Σ est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}$. Ici $\mathscr{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, en particulier c'est un anneau de valuation discrète, R_Σ est l'anneau de déformations universel d'une représentation galoisienne $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}\,_2(k)$ (où k est le corps résiduel de $\mathscr{O}$) et T_Σ est une certaine algèbre de Hecke. L'indice Σ désigne l'ensemble des nombres premiers où la ramification est autorisée. La preuve procède en deux étapes : le résultat est d'abord prouvé pour $\Sigma = \varnothing$ (le cas « minimal ») par une méthode de « patching », ensuite le cas général en est déduit à l'aide d'un critère numérique pour les intersections complètes.

2.1.1 Le cas minimal.

Pour traiter le cas minimal, Wiles construit, pour tout $n \geq 1$, un ensemble Q_n de nombres premiers congrus à 1 modulo ℓ^n qui vérifie plusieurs autres propriétés ad hoc. Alors, en considérant une sorte de « recollement » ou « limite » (communément appelé « patching ») des morphismes $\Phi_{Q_n} : R_{Q_n} \to T_{Q_n}$, Wiles réussit à démontrer le résultat désiré pour $\Sigma = \varnothing$. Entre autres choses, la preuve originale de Wiles et Taylor repose sur le fait (dû à Mazur et Ribet) que l'homologie de la courbe modulaire est un module libre de rang 2 sur $T_\varnothing$ (fait connu sous le nom de « résultat de multiplicité 1 »). Diamond améliore la méthode dans [27] : en recollant les modules en même temps que les algèbres, il réussit à retirer le résultat de « multiplicité 1 » des ingrédients de la preuve. Sa preuve repose sur le critère de liberté [27, 2.1], rappelé ci-dessous en 2.1.2, qui s'obtient encore par un argument de patching analogue à celui de Taylor et Wiles. Depuis sa publication, le critère 2.1.2 de Diamond a été utilisé intensivement. Voici par exemple une liste (non exhaustive, par ordre chronologique) d'articles qui l'utilisent directement : [24], [28], [35], [7], [64], [19], [29], [58], [38], [13]. Une variante de ce critère de liberté, due à Kisin (voir [47, 3.3.1]), a aussi été utilisée dans la preuve de plusieurs résultats majeurs, par exemple dans la preuve de la conjecture de modularité de Serre (voir [47], [43] et [46]) ou la conjecture de Fontaine–Mazur pour GL_2 (voir [45]). Une approche plus fonctorielle de la méthode de patching est proposée dans [32]. Nous expliquons dans ce qui suit les arguments de Diamond, en suivant l'article [27].

Le résultat-clé d'algèbre commutative. On fixe un entier $r \geq 1$ et un corps fini k. Notons respectivement A et B les anneaux de séries formelles $k[[S_1, \ldots, S_r]]$ et $k[[X_1, \ldots, X_r]]$.

Théorème 2.1.2 (patching, [27, 2.1]) *Soient R une k-algèbre et H un R-module non nul, de dimension finie sur k. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, il existe :*

(a) un morphisme de k-algèbres $\varphi_n : A \to B$,

(b) un morphisme de k-algèbres surjectif $\psi_n : B/\mathfrak{m}_A B \to R$,

(c) un $(B/\mathfrak{m}_A^n B)$-module H_n, libre sur $A/\mathfrak{m}_A^n$,

(d) un isomorphisme $(B/\mathfrak{m}_A B)$-linéaire $\pi_n : H_n/\mathfrak{m}_A H_n \to H$.

Alors R est une intersection complète de dimension zéro, et H est libre sur R.

Démonstration. Soit $d = \dim_k H$. Alors H_n est libre de rang d sur $A/\mathfrak{m}_A^n$. Quitte à choisir pour tout n une $(A/\mathfrak{m}_A^n)$-base de H_n, qui relève une k-base fixée de H, la structure de B-module sur H_n induit un morphisme de A-algèbres $\mu_n : B \to M_d(A/\mathfrak{m}_A^n)$. Pour tout $n \geq 1$ et tout j, soit $\nu_n(X_j)$ un relèvement de $\mu_n(X_j)$ dans $M_d(A)$. Comme $B^r \times R^r \times M_d(A)^r$ est compact, la suite

$$(\varphi_n(S_1), \ldots, \varphi_n(S_r), \psi_n(X_1), \ldots, \psi_n(X_r), \nu_n(X_1), \ldots, \nu_n(X_r))$$

admet une sous-suite convergente. Notons

$$(\varphi_\infty(S_1), \ldots, \varphi_\infty(S_r), \psi_\infty(X_1), \ldots, \psi_\infty(X_r), \nu_\infty(X_1), \ldots, \nu_\infty(X_r))$$

la limite. Ceci définit des morphismes $\varphi_\infty : A \to B$ et $\psi_\infty : B \to R$, et un B-module H_∞ qui est libre de rang d sur A. De plus ψ_∞ est surjectif, s'annule sur $\varphi_\infty(\mathfrak{m}_A)$, et $H_\infty/\mathfrak{m}_A H_\infty$ est isomorphe à H comme B-module. Comme H_∞ est libre sur A, on a $\mathrm{prof}_A(H_\infty) = \mathrm{prof}(A) = r$. On en déduit $\mathrm{prof}_B(H_\infty) \geq r$. Mais comme B est régulier, H_∞ est de dimension projective finie sur B. La formule d'Auslander-Buchsbaum donne $\mathrm{prof}_B(H_\infty) + \mathrm{pd}_B(H_\infty) = r$, d'où $\mathrm{pd}_B(H_\infty) = 0$ et H_∞ est libre sur B. On en déduit que H est libre sur $B/\mathfrak{m}_A B$. Ceci implique que ψ_∞ (qui est surjectif) induit un isomorphisme $B/\mathfrak{m}_A B \to R$, d'où les deux conclusions. □

Application au cas minimal. Reprenons les notations du début du paragraphe et montrons que $\Phi_\varnothing$ est un isomorphisme. Soient λ une uniformisante de $\mathscr{O}$ et k son corps résiduel. Notons $R = R_\varnothing \otimes_{\mathscr{O}} k = R_\varnothing/\lambda R_\varnothing$, et $T = T_\varnothing/\lambda T_\varnothing$. Par des arguments de cohomologie galoisienne (voir par exemple [25, 2.49]), il existe un entier r et pour tout $n \geq 1$ un ensemble fini Q_n de nombres premiers, avec les propriétés suivantes :

- La k-algèbre $R_n := R_{Q_n}/\lambda R_{Q_n}$ peut s'écrire comme un quotient de $B = k[[X_1, \dots, X_r]]$. Il existe donc un morphisme surjectif $\theta_n : B \to R_n$.
- Q_n est de cardinal r.
- Pour tout $q \in Q_n$, $q \equiv 1$ (ℓ^n), $\overline{\rho}$ est non ramifié en q et $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ a des valeurs propres distinctes.

Soit G_n le ℓ-sous-groupe de Sylow de $\prod_{q \in Q_n} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Les propriétés ci-dessus permettent de munir R_n d'une structure de $k[G_n]$-algèbre comme dans [25, §2.8]. La définition assure que le composé $k[G_n] \to R_n \to R$ envoie l'idéal maximal de $k[G_n]$ sur 0. De plus, la condition sur le cardinal de Q_n garantit qu'il existe un morphisme surjectif de k-algèbres $A \to k[G_n]$, avec $A = k[[S_1, \dots, S_r]]$, dont le noyau est inclus dans $\mathfrak{m}_A^{\ell^n}$, en raison de la condition $q \equiv 1$ (ℓ^n) pour tout $q \in Q_n$. On peut alors choisir un morphisme $\varphi_n : A \to B$ qui relève le composé $A \to k[G_n] \to R_n$. Le composé de θ_n avec $R_n \to R$ envoie $\varphi_n(\mathfrak{m}_A)$ sur 0. Il induit donc un morphisme (surjectif) $\psi_n : B/\mathfrak{m}_A B \to R$.

Soit N l'entier $N_\varnothing$ de [25, (4.2.1)] et $M_n = p^2 \prod_{q \in Q_n} q$, où p est un nombre premier auxiliaire bien choisi (voir [25, §4.3]). Considérons le groupe

$$\Gamma_n = \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(M_n)$$

et soit X_{Γ_n} la courbe modulaire associée. Par [25, 4.10], il existe un isomorphisme $T_{Q_n} \simeq T'_{\mathfrak{m}_n}$, où T' est l'algèbre des opérateurs de Hecke agissant sur $H_1(X_{\Gamma_n}, \mathscr{O})$ et $\mathfrak{m}_n$ est un certain idéal maximal de T'. Considérons le $T'_{\mathfrak{m}_n}$-module

$$H'_n := H_1(X_{\Gamma_n}, \mathscr{O})^-_{\mathfrak{m}_n} \otimes_{\mathscr{O}} k$$

constitué des éléments sur lesquels la conjugaison complexe agit par -1. On peut voir H'_n comme un module sur $k[G_n]$, R_n, ou T_n via les morphismes de k-algèbres

$$k[G_n] \to R_n \to T_n \simeq T'_{\mathfrak{m}_n} \otimes_{\mathscr{O}} k,$$

où l'on rappelle que $R_n = R_{Q_n} \otimes_{\mathscr{O}} k$ et où l'on a noté $T_n = T_{Q_n} \otimes_{\mathscr{O}} k$. Par [27, Lemme 3.2], le module H'_n est libre sur $k[G_n]$, et l'on a un isomorphisme de T_n-modules $H'_n/\mathfrak{m}_A H'_n \simeq H$, où $H = H_1(X_0(N), \mathscr{O})^-_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathscr{O}} k$. En posant $H_n = H'_n/\mathfrak{m}_A^n H'_n$, on peut alors appliquer le théorème 2.1.2 ci-dessus et en déduire que R est une intersection complète de dimension zéro, et que H est libre sur R. En particulier, le morphisme $R \to T$ doit être injectif (sinon H aurait de la torsion sur R, puisque c'est un T-module). Comme on sait déjà qu'il est surjectif, c'est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme $\Phi_\varnothing : R_\varnothing \to T_\varnothing$ devient un isomorphisme après application du foncteur $(-) \otimes_{\mathscr{O}} k$. Par Nakayama, on en déduit que $\Phi_\varnothing$ lui-même est un isomorphisme, ce qui achève la preuve dans le cas minimal.

2.1.3 Le cas non minimal : le critère numérique.

Soit $\mathscr{O}$ un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante λ, de corps résiduel k. Soit R une $\mathscr{O}$-algèbre locale complète noethérienne munie d'un morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres $\pi_R : R \to \mathscr{O}$. Notons $\mathfrak{p}$ le noyau de π_R et I l'annulateur de $\mathfrak{p}$ dans R. Si $R \to T$ est un morphisme surjectif de $\mathscr{O}$-algèbres dont le noyau est inclus dans $\mathfrak{p}$, on notera π_T le morphisme induit $T \to \mathscr{O}$, $\mathfrak{p}_T$ son noyau et $I_T = \mathrm{Ann}_T(\mathfrak{p}_T)$.

Le principal outil d'algèbre commutative qui permet de passer du cas minimal au cas général est le théorème ci-dessous. C'est un critère qui permet, étant donné un module H sur R, de caractériser simultanément la liberté de H et la propriété d'être une intersection complète pour R, en termes d'invariants *numériques* associés à R et H.

Théorème 2.1.4 *[27, 2.4] Soit H un R-module, qui est libre de rang fini sur $\mathscr{O}$, et dont le support contient $\mathfrak{p}$. Notons*

$$\Omega = \frac{H}{H[\mathfrak{p}_T] + H[I_T]}$$

où $T = R/\mathrm{Ann}_R(H)$. Soit d le rang de $H[\mathfrak{p}]$ sur $\mathscr{O}$. Si Ω est de longueur finie sur $\mathscr{O}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) $\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} H \leq d.\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} T$ *et* $\mathrm{length}_{\mathscr{O}} \Omega \geq d. \mathrm{length}_{\mathscr{O}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)$.

(b) $\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} H = d.\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} T$ *et* $\Omega \simeq (\mathscr{O}/\,\mathrm{Fit}_{\mathscr{O}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2))^d$.

(c) R est une intersection complète et H est libre (de rang d) sur R.

Reprenons les notations du paragraphe précédent pour voir comment ce critère est utilisé dans la preuve du théorème de Fermat. Si Σ est un ensemble fini de nombres premiers fixé, on souhaite montrer que le morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres Φ_Σ : $R_\Sigma \to T_\Sigma$ est un isomorphisme. On applique alors le critère ci-dessus au T_Σ-module

$$H_\Sigma = H_1(X_0(N_\Sigma), \mathscr{O})_{\mathfrak{m}_\Sigma},$$

où N_Σ est un entier bien choisi. Comme on sait a priori que le morphisme Φ_Σ est surjectif, il suffit de montrer que H_Σ est libre sur R_Σ pour conclure. On sait aussi, d'après le cas minimal, que $R_\varnothing$ est une intersection complète, que $\Phi_\varnothing$ est un isomorphisme et que $H_\varnothing$ est libre sur $R_\varnothing$. On sait donc, par 2.1.4, que le couple $(R_\varnothing, H_\varnothing)$ vérifie les conditions numériques données dans la condition (a) de 2.1.4. L'essentiel du travail (qui repose sur des arguments de théorie des nombres que nous passerons sous silence ici) est alors de comparer les longueurs sur $\mathscr{O}$ de $\mathfrak{p}_\varnothing/\mathfrak{p}_\varnothing^2$ et de $\mathfrak{p}_\Sigma/\mathfrak{p}_\Sigma^2$ ainsi que celles de $\Omega_\varnothing$ et de Ω_Σ, pour montrer que la condition numérique (a) pour $(R_\varnothing, H_\varnothing)$ implique la même condition pour le couple (R_Σ, H_Σ).

2.2 La conjecture de de Smit

Revenons sur le critère de liberté 2.1.2 de Diamond. Après l'avoir énoncé et démontré, Diamond pose dans [27, Rem 2.2] la question de savoir s'il pourrait être suffisant de supposer que les conditions (a), (b), (c), (d) de 2.1.2 sont valables pour un entier n suffisament grand, au lieu de les demander pour tout $n \geq 1$, et si l'on peut borner cette notion de « suffisament grand » en fonction du nombre r de variables et du rang du module seulement. C'est dans cet esprit que de Smit a fait la conjecture suivante.

Conjecture 2.2.1 (de Smit, 1997) *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux artiniens locaux de même dimension de plongement. Alors tout B-module libre sur A est libre sur B.*

Dans [Bro8], avec A. Mézard, nous avons démontré la conjecture de de Smit lorsque la dimension de plongement de A et B est ≤ 2, et en supposant de plus que le morphisme $A \to B$ soit plat. J'ai ensuite démontré dans [Bro3] le théorème suivant. Il démontre entièrement la conjecture de de Smit, ce qui répond à la question de Diamond : avoir les conditions (a) à (d) pour $n = 2$ est déjà suffisant, pour tout entier r et tout module. Ceci rend évidemment le critère de liberté plus facile à appliquer.

Théorème 2.2.2 ([Bro3, 1.1]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens. On suppose que* $\mathrm{edim}(A) \geq \mathrm{edim}(B)$*, et qu'il existe un B-module $M \neq 0$ de type fini qui est libre sur A. Alors*

1. *M est libre sur B.*
2. *Le morphisme $A \to B$ est plat, et* $\mathrm{edim}(A) = \mathrm{edim}(B)$*.*
3. *L'anneau $B/\mathfrak{m}_A B$ est une intersection complète de dimension zéro.*

Signalons tout de suite une conséquence schématique de 2.2.2.

Corollaire 2.2.3 ([Bro3, Thm 2.5]) *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas localement noethériens tel que pour tout $x \in X$, les espaces tangents satisfassent* $\dim T_x \leq \dim T_{f(x)}$*. Alors tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent qui est plat sur S est aussi plat sur X.*

Simplification de la preuve du théorème de Fermat. Expliquons maintenant comment le théorème 2.2.2 permet de simplifier légèrement la preuve du théorème de Fermat. Comme expliqué dans le paragraphe §2.1, dont nous reprenons les notations, pour achever sa preuve, Wiles doit montrer que le morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres $\Phi_\Sigma : R_\Sigma \to T_\Sigma$ est un isomorphisme et que T_Σ est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}$. Le critère 2.2.2 permet de s'affranchir des arguments de patching pour traiter le cas minimal de $\Phi_\varnothing$. Au lieu de construire tout un système d'ensembles Q_n, $n \geq 1$, il suffit de construire le premier d'entre eux, à savoir Q_1. En effet, l'intérêt de considérer tous les ensembles Q_n était de pouvoir « passer à la limite » pour se ramener à un problème sur un anneau *régulier*, où l'on peut utiliser la formule d'Auslander-Buchsbaum (voir la preuve du critère 2.1.2). Maintenant que l'on dispose de l'énoncé de de Smit, on peut, avec les notations de 2.1, appliquer directement le théorème 2.2.2 au morphisme $k[G_1] \to R_1$ et au module H_1'. En effet, par [27, 3.2], on sait que H_1' est libre sur $k[G_1]$. Remarquons qu'il y a un isomorphisme $\mathscr{O}[G_1] \simeq \frac{\mathscr{O}[[S_1,\ldots,S_r]]}{((1+S_1)^{\alpha_1}-1,\ldots,(1+S_r)^{\alpha_r}-1)}$, où les α_i sont les cardinaux des ℓ-sous-groupes de Sylow des groupes $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ pour $q \in Q_1$. En particulier, $\alpha_i \geq \ell \geq 2$ et on en déduit que $\mathrm{edim}(k[G_1]) = r$. Par 2.2.2, on obtient que H_1' est libre sur R_1, et que R_1 est libre et est une intersection complète relative sur $k[G_1]$. En particulier, $R_1 \to T_1$ doit être injectif (sinon H_1' aurait de la torsion sur R_1). C'est donc un isomorphisme. Des arguments standard reposant sur le lemme de Nakayama permettent de conclure que R_{Q_1} est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}$ et que Φ_{Q_1} est un isomorphisme. Par [25, Cor. 2.45 and 3.32], les morphismes canoniques $R_{Q_1} \to R_\varnothing$ et $T_{Q_1} \to T_\varnothing$ induisent des isomorphismes $R_{Q_1}/\mathfrak{a}_{Q_1}R_{Q_1} \simeq R_\varnothing$ et $T_{Q_1}/\mathfrak{a}_{Q_1}T_{Q_1} \simeq T_\varnothing$, où $\mathfrak{a}_{Q_1}$ est l'idéal d'augmentation de $\mathscr{O}[G_1]$ (i.e. l'idéal engendré par $S_1, \ldots, S_R$). On déduit donc immédiatement de ce qui précède que $\Phi_\varnothing : R_\varnothing \to T_\varnothing$ est un isomorphisme et que $T_\varnothing$ est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}$.

2.3 Renforcement de la conjecture de de Smit

Lorsque A et B sont réguliers, la formule d'Auslander-Buchsbaum permet d'obtenir facilement une version de 2.2.2 dans laquelle les dimensions de plongement de A et B ne sont pas nécessairement égales. L'hypothèse « M est libre sur A » est alors assouplie et remplacée par une majoration de sa dimension plate. Voici l'énoncé précis, assorti d'une preuve pour la commodité du lecteur.

Proposition 2.3.1 *Soit $\mathscr{O}$ un anneau de valuation discrète, $A := \mathscr{O}[[x_1, \ldots, x_r]]$, et $\varphi : A \to B$ un morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres. On suppose que B est un quotient de $\mathscr{O}[[y_1, \ldots, y_s]]$ et qu'il existe un B-module N non nul, de type fini sur A, tel que proj. dim.$_A N \leq r - s$. Alors N est libre sur B et $B = \mathscr{O}[[y_1, \ldots, y_s]]$.*

Démonstration. Comme N est de type fini sur A, et de dimension projective finie, la formule d'Auslander-Buchsbaum donne

$$\mathrm{prof}_A N + \mathrm{pd}_A N = \mathrm{prof}\, A = r + 1$$

donc $\mathrm{prof}_A N \geq s + 1$. On en déduit :

$$s + 1 \leq \mathrm{prof}_A N = \mathrm{prof}_B N \leq \dim B \leq \dim \mathscr{O}[\![y_1, \ldots, y_s]\!] = s + 1\,.$$

L'égalité est valable car N est de type fini sur A, et l'inégalité de droite est due au fait que B est un quotient de $\mathscr{O}[\![y_1, \ldots, y_s]\!]$. On en déduit que B et $\mathscr{O}[\![y_1, \ldots, y_s]\!]$ ont la même dimension. Ils sont donc égaux, puisque le premier est un quotient du second, qui est intègre. En particulier, B est lui aussi régulier et $\mathrm{pd}_B N$ est fini. Alors, étant donné que $\mathrm{prof}_B N = s + 1$, une nouvelle application de la formule d'Auslander-Buchsbaum montre que N est un B-module libre. □

En collaboration avec Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare, nous avons obtenu dans l'article [Bro6] une généralisation commune au critère 2.2.2 de de Smit et à la proposition 2.3.1. Notre résultat principal est le suivant. Ici, comme dans 2.3.1, on ne suppose plus que M est libre sur A (i.e. que $\operatorname{flat\,dim}_A M = 0$), mais seulement que $\operatorname{flat\,dim}_A M \leq \operatorname{edim}(A) - \operatorname{edim}(B)$.

Théorème 2.3.2 ([Bro6, 1.2]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens. On suppose qu'il existe un B-module $M \neq 0$ de type fini dont la dimension plate sur A satisfait :* $\operatorname{flat\,dim}_A M \leq \operatorname{edim}(A) - \operatorname{edim}(B)$. *Alors M est libre sur B, le morphisme φ est d'intersection complète, et l'on a de plus l'égalité*

$$\operatorname{edim}(A) - \dim(A) = \operatorname{edim}(B) - \dim(B).$$

Cette version nous permet de donner au passage une nouvelle preuve de la conjecture de de Smit, plus simple et sans doute plus éclairante que la preuve originale (quoique moins élémentaire). L'hypothèse plus générale permet en effet, à l'aide de résultats classiques d'algèbre commutative, de réduire la preuve au cas où φ est surjectif. On peut alors procéder par récurrence sur $\operatorname{edim} A - \operatorname{edim} B$. L'un des ingrédients-clé dans cette récurrence est un théorème de Nagata, dont nous reparlerons plus bas, qui permet de contrôler la dimension projective des modules de type fini le long des morphismes surjectifs qui sont des intersections complètes « exceptionnelles ». Commençons donc par quelques rappels sur cette classe de morphismes.

Intersections complètes exceptionnelles. Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'intersection complète, on a toujours l'inégalité

$$\operatorname{edim}(A) - \dim(A) \leq \operatorname{edim}(B) - \dim(B).$$

Ceci résulte de travaux d'Avramov, Foxby et Herzog à la fin des années 1990. Les morphismes pour lesquels cette inégalité est une égalité forment une classe tout à fait particulière, c'est ce que nous appelons les intersections complètes exceptionnelles. Si φ est surjectif, de noyau I, cette propriété équivaut à la condition que I puisse être engendré par une suite régulière d'éléments dont les images sont linéairement indépendantes dans l'espace cotangent $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$. Plus généralement, si $\varphi : A \to B$ est essentiellement de type fini, ou si l'extension résiduelle $k_A \to k_B$ est séparable, il résulte de [5, (1.1.2)] que le morphisme $A \to B$ est « formellement lissable ». On peut dans ce cas donner une caractérisation analogue des intersections complètes exceptionnelles. Si M est un B-module, notons $D_i(B/A, M)$ le i-ème groupe d'homologie d'André-Quillen de la A-algèbre B à coefficients dans M, c'est-à-dire

$$D_i(B/A, M) = H_i(L_{B/A} \otimes_B M)$$

où $L_{B/A}$ est le complexe cotangent du morphisme $A \to B$. L'*espace cotangent* du morphisme $A \to B$ est $D_1(B/A, k_B)$. Si $B = A/I$, c'est simplement $I/\mathfrak{m}_A I$. En particulier, l'espace cotangent $D_1(k_A/A, k_A)$ du morphisme $A \to k_A$ est isomorphe à $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$, l'espace cotangent usuel de A. Dans le cas général, il y a un morphisme naturel

$$c_\varphi : D_1(B/A, k_B) \to D_1(k_A/A, k_A) \otimes_{k_A} k_B.$$

Proposition 2.3.3 ([Bro6, 2.16]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens. On suppose que φ est* formellement lissable. *Alors φ est une intersection complète exceptionnelle si et seulement c'est une intersection complète et si le morphisme c_φ ci-dessus est injectif.*

Ceci donne donc une caractérisation des intersections complètes exceptionnelles en termes de l'espace cotangent de φ.

Au sujet d'un théorème de Nagata. Le théorème de Nagata évoqué ci-dessus, qui joue un rôle-clé dans la preuve de 2.3.2, est le suivant.

Théorème 2.3.4 ([55, §27]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme surjectif et local d'anneaux locaux et soit M un B-module de type fini. Si φ est une intersection complète exceptionnelle, alors*

$$\operatorname{edim} A - \operatorname{pd}_A M = \operatorname{edim} B - \operatorname{pd}_B M\,.$$

En particulier, $\operatorname{pd}_A M$ est fini si et seulement si $\operatorname{pd}_B M$ est fini.

En fait, notre résultat principal 2.3.2 peut être vu comme une réciproque de ce résultat. Nous obtenons aussi la variante suivante, qui est peut-être une « meilleure » réciproque. Notez cependant que dans cette variante, nous devons supposer a priori que la dimension projective du module M sur B est finie (il est facile de produire des contre-exemples sans cette hypothèse), ce qui n'était pas le cas dans l'énoncé précédent.

Théorème 2.3.5 ([Bro6, 3.2]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local et soit M un B-module non nul, de type fini et de dimension projective finie. Alors on a une inégalité*

$$\operatorname{flat\,dim}_A M - \operatorname{pd}_B M \geq \operatorname{edim} A - \operatorname{edim} B.$$

De plus, s'il y a égalité, alors φ est une intersection complète exceptionnelle.

Projets. Pour les applications aux questions de relèvement modulaire, il serait très utile d'obtenir une version de 2.3.2 qui s'applique non pas à des modules mais à des complexes de modules. Avec Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare, nous aimerions par exemple démontrer la conjecture ci-dessous. Nous avons déjà une preuve dans plusieurs cas particuliers, mais les hypothèses sont pour l'instant trop restrictives pour les applications.

Conjecture 2.3.6 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens et soit $\delta \geq 0$ un entier. Soit $P_\bullet$ un complexe de A-modules libres de rangs finis. On suppose que :*

(i) $P_i = 0$ *si* $i \notin [0, \delta]$

(ii) $\operatorname{edim}(B) \leq \operatorname{edim}(A) - \delta$

(iii) Le morphisme naturel $A \to \operatorname{End}_{D(A)}(P_\bullet)$ se factorise par B.

Alors le conoyau $M = H_0(P_\bullet)$ est un B-module libre.

2.4 Suites indépendantes

Les suites indépendantes ont été introduites par Christer Lech dans [49]. Une suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments d'un anneau commutatif A est dite *indépendante* dans A si, pour toute suite $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, l'égalité $\sum x_i a_i = 0$ implique $a_1, \ldots, a_n \in (x_1, \ldots, x_n)$. Cette notion d'indépendance a été utilisée par Vasconcelos [67] pour caractériser de la manière suivante les suites régulières.

Proposition 2.4.1 ([67, Cor.1 p.311]) *Soit A un anneau local noethérien et soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{m}_A$. Il y a équivalence entre :*

1. *La suite x est régulière.*
2. *L'idéal $J_x = (x_1, \ldots, x_n)$ est de dimension projective finie, et la suite x est A-indépendante.*

À part les suites régulières, une autre source importante d'exemples est la suivante : tout système minimal de générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ d'un anneau local noethérien A est indépendante. Les suites indépendantes ont aussi été étudiées par Hanes dans [37], qui donne une borne inférieure pour la co-longueur d'un idéal engendré par une suite indépendante, et utilise cette borne inférieure pour donner des résultats partiels pour la conjecture de Lech sur les multiplicités dans les couples plats d'anneaux locaux. Récemment, Meng a défini dans [52] la notion de suite *fortement Lech-indépendante* et, comme Hanes, l'utilise pour en déduire certains cas particuliers de la conjecture de Lech.

Lech [49, p. 77] et Hanes [37, Definition 2.1]. définissent comme suit la notion d'indépendance relativement à un A-module M.

Définition 2.4.2 *Soient A un anneau et M un A-module. Une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de A est dite M-indépendante si, pour tous $m_1, \ldots, m_n \in M$, la relation $\sum x_i m_i = 0$ implique $m_i \in (x_1, \ldots, x_n)M$.*

De manière équivalente, si J_x désigne l'idéal engendré par $x_1, \ldots, x_n$, la suite x est M-indépendante si et seulement si la surjection naturelle

$$\varphi_x : (M/J_xM)^n \longrightarrow J_xM/J_x^2M$$

définie par $\varphi_x(m_1, \ldots, m_n) = \sum x_i m_i$ est un isomorphisme. Si A est local noethérien et si $M = A$, le lemme de Nakayama implique que la suite x est A-indépendante si et seulement si J_x/J_x^2 est un (A/J_x)-module libre. En particulier ceci ne dépend pas de la suite x mais seulement de l'idéal J_x qu'elle engendre. Meng définit ainsi la notion de suite fortement indépendante [52, Definition 3.1] : un ideal I est dit fortement indépendant si I^i/I^{i+1} est libre sur A/I pour tout $i \geq 1$. On peut généraliser l'indépendance forte aux modules. Pour cela, la notion suivante sera commode. Soient A un anneau local noethérien, M un A-module et I un idéal de A. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système minimal de générateurs de I. Notons $R_I(M)$ le sous-module de M engendré par les éléments $m_i \in M$ pour toutes les relations

$$x_1m_1 + \cdots + x_nm_n = 0\,.$$

(Par [Bro8, 4.1], $R_I(M)$ ne dépend pas du choix de $(x_1, \ldots, x_n)$.) Alors une suite $x_1, \ldots, x_n$ est M-indépendante si et seulement si $R_I(M) \subset IM$, où $I = (x_1, \ldots, x_n)$.

Définition 2.4.3 *Soient A un anneau local noethérien et M un A-module. On dit qu'un idéal I de A est fortement M-indépendant si $R_{I^i}(M) \subset IM$ pour tout $i \geq 1$. Une suite x est dite fortement M-indépendante si elle engendre un idéal fortement M-indépendant.*

Toute suite M-régulière est (fortement) M-indépendante, mais il y a en général beaucoup plus de suites M-indépendantes que de suites M-régulières, un cas extrême étant celui des modules sur un anneau artinien local, où il n'y a pas de suites régulières du tout. En dépit de leur ubiquité, les suites M-indépendantes ont été relativement peu exploitées jusqu'à présent. On peut imaginer plusieurs raisons à cela : (1) elles contiennent beaucoup moins d'information que les suites régulières, (2) elles se comportent moins bien par certaines opérations (par exemple une sous-suite d'une suite indépendante n'est en général pas indépendante), et (3) des techniques standard reposant sur le théorème de structure de Cohen permettent de ramener de nombreuses questions à des questions sur un anneau local régulier, où l'on peut utiliser des suites régulières. Nous pensons que les suites indépendantes peuvent être un substitut utile aux suites régulières dans les situations où les techniques évoquées en (3) ne semblent pas fonctionner.

Au sujet des suites M-indépendantes, mon principal résultat est le théorème suivant. Il n'était précédemment connu que lorsque la matrice (w_{ij}) qui apparaît dans l'énoncé est diagonale ([49, Lemme 3] et [37, Lemme 2.1]), ou lorsque la suite $x_1, \ldots, x_n$ est régulière (voir [15, 2.3.10]).

Théorème 2.4.4 ([Bro5, 1.1]) *Soient A un anneau et soient $x_1, \ldots, x_n$ et $u_1, \ldots, u_n$ des suites d'éléments de A, qui engendrent des idéaux J_x et J_u. Soit M un A-module. On suppose que la suite des x_i est M-indépendante et que $J_x \subset J_u$. Il existe donc des éléments $w_{ij} \in A$ tels que $x_i = \sum w_{ij} u_j$. Alors :*

1. *La suite $u_1, \ldots, u_n$ est M-indépendante.*
2. *Si Δ désigne le déterminant de la matrice (w_{ij}), on a les égalités suivantes de sous-modules de M :*

$$(J_x M : J_u) = (J_x + (\Delta))M$$
$$(J_x M : (J_x + (\Delta))) = J_u M$$

3. *Si M est non nul et de type fini, et si $J_u \subset \mathrm{Jac}(A)$, alors $\Delta \notin J_x$.*

Un énoncé plus complet est donné dans [Bro5, Thm 3.4]. L'assertion (2) peut être vue comme un résultat de *liaison*. En effet, si $n = \mathrm{edim}(A)$, l'anneau A/J_x est une intersection complète par 2.4.8, et l'assertion (2) signifie alors que les idéaux J_u et $J_x + (\Delta)$ sont *liés* par J_x sur le module M (voir [57], [51] ou [40]).

Le principal ingrédient de la preuve de 2.4.4 est la caractérisation 2.4.5 ci-dessous de la M-indépendance d'une suite x en termes du complexe de Koszul $K(x)$, et ses corollaires 2.4.6 et 2.4.7. Ces résultats présentent un intérêt propre. On rappelle que le complexe de Koszul sur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est le complexe $K(x)$ dont la composante de degré ℓ est le A-module libre $K_\ell(x) = \Lambda^\ell(A^n)$ de base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}\}$ avec

$i_1 < \cdots < i_\ell$, et dont la différentielle $d^x_\ell : K_\ell(x) \to K_{\ell-1}(x)$ est donnée par la formule suivante, où le chapeau signifie que le terme e_{i_j} est omis.

$$d^x_\ell(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}) = \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} x_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}$$

Si M est un A-module, on note $K(x, M)$ le complexe $K(x) \otimes_A M$, et $d^{x,M}_\ell$ sa ℓ-ième différentielle.

Proposition 2.4.5 ([Bro5, 3.1]) *Soit A un anneau et soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une suite d'éléments de A. Soit M un A-module.*

1. *Si x est M-indépendante, alors on a une inclusion $\operatorname{Ker} d^{x,M}_\ell \subset J_x.K_\ell(x, M)$ pour tout entier $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.*
2. *Réciproquement, si $\operatorname{Ker} d^{x,M}_1 \subset J_x.K_1(x, M)$, alors x est M-indépendante.*

Corollaire 2.4.6 ([Bro5, 3.2]) *Soient M un A-module et x une suite M-indépendante. Alors pour tout A-module N et tout triplet de morphismes (φ, f, μ_ℓ) faisant commuter le diagramme en traits pleins ci-dessous tel que μ_ℓ prenne ses valeurs dans $J_x N$, il existe un morphisme $h_{\ell-1} : K_{\ell-1}(x) \to N$ tel que $\varphi = f \circ h_{\ell-1}$ modulo $J_x M$.*

$$\begin{tikzcd} K_\ell(x) \arrow[r, "d^x_\ell"] \arrow[d, "\mu_\ell"'] & K_{\ell-1}(x) \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dotted, "\exists h_{\ell-1}"] \\ N \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Corollaire 2.4.7 ([Bro5, 3.3]) *Soient $M_\bullet$ un complexe de A-modules et x une suite de longueur n d'éléments de A qui est M_ℓ-indépendante pour tout ℓ. Soit $\varphi : K(x) \to M_\bullet$ un morphisme de complexes tel que $\varphi_n : K_n(x) \to M_n$ soit à valeurs dans $J_x M_n$. Alors il existe un morphisme $\psi : K(x) \to M_\bullet$ homotope à φ et à valeurs dans $J_x M_\bullet$.*

Applications.

Soit A un anneau local noethérien et soit M un A-module de type fini et de dimension projective finie. Alors la profondeur de M et sa dimension projective sont liées par la formule suivante (Auslander-Buchsbaum) :

$$\operatorname{prof}_A(M) + \operatorname{pd}_A(M) = \operatorname{prof}(A).$$

Une conséquence utile de cette formule est que M est libre sur A si et seulement s'il existe une suite M-régulière de longueur $\operatorname{prof}(A)$ (la longueur maximale autorisée par la formule). À l'aide de 2.4.4, on obtient un énoncé similaire faisant intervenir des suites M-indépendantes au lieu de suites M-régulières. Le principal intérêt de cet énoncé est qu'il n'est pas nécessaire de savoir a priori que M est de dimension projective finie.

Théorème 2.4.8 ([Bro5, 2.7, 3.7]) *Soit A un anneau local noethérien et soit M un A-module de type fini.*

1. *Toute suite M-indépendante est de longueur* $\leq \mathrm{edim}(A)$.
2. *Le module M est libre sur A si et seulement s'il existe une suite fortement M-indépendante de longueur* $\mathrm{edim}(A)$ *dans* $\mathfrak{m}_A$.
3. *Le module $M/\mathfrak{m}_A^2 M$ est libre sur $A/\mathfrak{m}_A^2$ si et seulement s'il existe une suite M-indépendante de longueur* $\mathrm{edim}(A)$ *dans* $\mathfrak{m}_A$.
4. *Soit $x_1, \ldots, x_n$ une suite M-indépendante d'éléments de $\mathfrak{m}_A$ où $n = \mathrm{edim}(A)$, et soit J_x l'idéal qu'elle engendre. Alors $M/J_x^2 M$ est libre sur A/J_x^2. Si $M \neq 0$ alors A/J_x est une intersection complète de dimension zéro.*

Cet énoncé permet en particulier de donner encore une nouvelle preuve, plus transparante, de la conjecture de de Smit (voir 2.2.2 et 2.3.2 ci-dessus).

Corollaire 2.4.9 *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local et plat d'anneaux locaux noethériens avec* $\mathrm{edim}(A) \geq \mathrm{edim}(B)$ *et soit M un B-module de type fini qui est libre sur A. Alors M est libre sur B et* $\mathrm{edim}(A) = \mathrm{edim}(B)$.

Démonstration. Comme M est libre sur A, il existe une suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de A, de longueur $n = \mathrm{edim}(A)$, qui est fortement M-indépendante. Par [Bro5, 2.4] la suite $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ est fortement M-indépendante dans $\mathfrak{m}_B$. Comme $n \geq \mathrm{edim}(B)$, il résulte de 2.4.8 que M est B-libre et que $\mathrm{edim}(A) = \mathrm{edim}(B)$. □

Comme dit ci-dessus, l'énoncé de de Smit 2.2.2 est une amélioration de [27, Thm 2.1] car il évite le recours à la méthode de patching, permettant ainsi de simplifier significativement les hypothèses. Cependant, cette méthode de patching a été généralisée et adaptée à de nombreux autres contextes dans les problèmes de relèvement modulaire. Deux récents exemples sont donnés par Calegari et Geraghty dans [17]. Ils donnent deux nouveaux critères de liberté, qui reposent chacun sur une méthode de patching : un pour les modules *équilibrés* (« balanced modules ») [17, §2], et un autre dans un contexte dérivé [17, §6], où ils recollent des *complexes de modules* au lieu de modules (voir aussi [66, §4] et [44, §3]). Pour le premier de ces critères, celui portant sur les modules équilibrés, voici le résultat de platitude de base sur lequel leur méthode de patching repose. Ici $\dim_k \mathrm{Tor}\,^0_A(M,k)$ est le rang de M, i.e. le nombre minimal de générateurs de M comme A-module, tandis que $\dim_k \mathrm{Tor}\,^1_A(M,k)$ est heuristiquement le nombre minimal de relations entre les générateurs. Le résultat dit donc que M est B-libre si le nombre de relations n'excède pas le nombre de générateurs.

Proposition 2.4.10 *Soit $A \to B$ un morphisme local d'anneaux locaux réguliers tels que* $\dim(A) = \dim(B) + 1$. *Soit M un B-module, de type fini sur A, tel que*

$$\dim_k \mathrm{Tor}\,^1_A(M,k) \leq \dim_k \mathrm{Tor}\,^0_A(M,k).$$

Alors M est libre sur B.

Démonstration. Soit k le corps résiduel de A. Par hypothèse, le module M admet une présentation de la forme $A^d \to A^d \to M \to 0$, avec $d = \mu_A(M)$. Soit K le noyau de la première flèche et soit η le point générique de $\mathrm{Spec}\, A$. Comme M est de type fini sur A, on a $\dim_A M = \dim_B M \leq \dim B$, d'où $\dim_A M < \dim A$, donc η n'est pas dans le support de M. Ceci signifie que $M_\eta = 0$. En appliquant le foncteur exact $(-) \otimes_A \mathrm{Frac}\,(A)$ à la présentation de M et en considérant les dimensions sur $\mathrm{Frac}\,(A)$, ceci implique $K_\eta = 0$. Comme $K \subset A^d$ on en déduit que $K = 0$, donc $\mathrm{pd}_A(M) \leq 1$. La formule d'Auslander-Buchsbaum donne alors $\mathrm{prof}_A(M) \geq \dim A - 1 = \dim B$, donc $\mathrm{prof}_B(M) \geq \dim B$ et en appliquant de nouveau la formule d'Auslander-Buchsbaum ceci implique que M est libre sur B. $\square$

Il semble naturel de se demander si l'on peut aussi se passer des méthodes de patching dans les travaux de Calegari et Geraghty, comme la conjecture de de Smit permet de le faire dans la preuve du dernier théorème de Fermat. Pour cela nous aurions besoin d'un résultat analogue à 2.4.10, mais qui s'applique à des anneaux locaux noethériens arbitraires, et pas seulement à des anneaux réguliers. Ceci soulève la question suivante : si $A \to B$ est un morphisme local d'anneaux locaux noethériens avec $\mathrm{edim}(A) - \mathrm{edim}(B) \geq 0$, et si M est un B-module qui est de type fini sur A, est-il possible de donner un critère de liberté pour M sur B en termes des nombres $\dim_k \mathrm{Tor}\,^1_A(M,k)$ et $\mu_A(M)$? C'est surtout le quotient de ces deux nombres qui semble jouer un rôle dans cette question et il sera commode dans la suite de lui donner un nom. Nous appellerons *taux de torsion de M sur A* le nombre défini par

$$t_A(M) = \frac{\dim_k \mathrm{Tor}\,^1_A(M,k)}{\dim_k \mathrm{Tor}\,^0_A(M,k)}$$

si $M \neq 0$, et $t_A(0) = 0$. Par exemple un A-module M est équilibré au sens de Calegari et Geraghty si et seulement si $t_A(M) \leq 1$. Il est libre sur A si et seulement si $t_A(M) = 0$. Notre principal résultat dans cette direction est alors le théorème suivant, qui signifie qu'il est possible d'éviter le patching dans le critère portant sur les modules équilibrés, au prix d'une hypothèse d'intersection complète.

Théorème 2.4.11 ([Bro5, Thm 4.12]) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme fini et local d'anneaux locaux noethériens tel que $B/\mathfrak{m}_A B$ soit une intersection complète. Soit M un B-module qui est de type fini sur A. On suppose que*

$$t_A(M) \leq \mathrm{edim}(A) - \mathrm{edim}(B).$$

Alors M est libre sur B, et l'inégalité précédente est une égalité.

Le théorème 2.4.4 est un ingrédient crucial dans la preuve de 2.4.11. Dans l'article en préparation en collaboration avec S. Iyengar et C. Khare évoqué à la fin de la section 2.3, nous avons aussi un résultat dans le même esprit pour la version dérivée, où de nouveau le théorème 2.4.4 joue un rôle clé.

Sans hypothèse d'intersection complète, nous avons malheureusement peu de résultats. La proposition ci-dessous donne une variante du résultat précédent, mais il y a des contre-exemples si l'on ne suppose pas $\mathfrak{m}_A^2 = 0$.

Proposition 2.4.12 ([Bro5, 4.14]) *Soit $A \to B$ un morphisme fini et local d'anneaux locaux noethériens, avec $\mathfrak{m}_A^2 = 0$. Soit M un B-module de type fini. On suppose que $t_A(M) \leq t_A(B)$ et que $M/\mathfrak{m}_A M$ est libre sur $B/\mathfrak{m}_A B$. Alors M est libre sur B.*

2.5 Un critère numérique de liberté reposant sur le défaut de Wiles

Nous avons présenté en 2.2 et 2.3 des résultats qui améliorent le critère de liberté 2.1.2 de Wiles et Diamond utilisé pour traiter le cas minimal. Dans cette section, nous présentons des résultats qui améliorent le critère numérique 2.1.4. Dans l'article [Bro7], en collaboration avec Srikanth Iyengar et Chandrashekhar Khare, nous donnons un critère pour qu'un module soit libre en termes de son « défaut de Wiles » (Wiles defect), un entier introduit récemment par Böckle, Khare et Manning dans [8], et dont nous rappelons la définition ci-dessous en 2.5.1. Ce critère est un raffinement de celui de Diamond et Wiles et s'applique dans des situations un peu plus générales. La preuve sensiblement différente que nous donnons apporte au passage un éclairage nouveau sur ces résultats antérieurs.

Dans tout ce qui suit, nous considérerons un anneau local noethérien A muni d'un morphisme surjectif $\pi\colon A \to \mathscr{O}$, où $\mathscr{O}$ est un anneau de valuation discrète, avec la propriété que le module conormal

$$\Phi_A := \mathfrak{p}_A/\mathfrak{p}_A^2 \quad \text{où} \quad \mathfrak{p}_A := \operatorname{Ker}(\pi),$$

est de longueur finie comme $\mathscr{O}$-module. (Dans les travaux de Diamond et Wiles, A est une $\mathscr{O}$-algèbre finie et π est un morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres, mais nous n'imposons pas ces conditions.) Le *module de congruence* d'un A-module M de type fini est le A-module

$$\Psi_A(M) := \frac{M}{M[\mathfrak{p}_A] + M[I_A]}, \quad \text{où} \quad I_A := A[\mathfrak{p}_A].$$

On rappelle que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on note $M[\mathfrak{a}]$ le sous-module de $\mathfrak{a}$-torsion de M, i.e.

$$M[\mathfrak{a}] = \{m \in M \mid \mathfrak{a} \cdot m = 0\}.$$

Comme $\mathfrak{p}_A \cdot \Psi_A(M) = 0$, le module de congruence $\Psi_A(M)$ a une structure naturelle de $\mathscr{O}$-module. De plus, l'hypothèse selon laquelle Φ_A est de longueur finie implique qu'il en est de même de $\Psi_A(M)$. Le module $M[\mathfrak{p}_A]$ a lui aussi une structure naturelle de $\mathscr{O}$-module, et l'on peut considérer son rang. Remarquons que le rang de $M[\mathfrak{p}_A]$ est égal à la dimension du localisé $M_{\mathfrak{p}_A}$ sur le corps des fractions de $\mathscr{O}$, et en particulier ils sont non nuls exactement quand $\mathfrak{p}_A$ est dans le support de M. Ce sera principalement ce cas qui nous intéressera dans la suite.

Définition 2.5.1 (défaut de Wiles) *Le* défaut de Wiles *du A-module M est l'entier*

$$\delta_A(M) = d \cdot \operatorname{length}_{\mathscr{O}} \Phi_A - \operatorname{length}_{\mathscr{O}} \Psi_A(M),$$

où $d := \operatorname{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A]$.

Dans [9, 8], cet entier est divisé par de, où e est l'indice de ramification de $\mathscr{O}$. Nous trouvons plus commode de supprimer le dénominateur. Nous démontrons :

Théorème 2.5.2 ([Bro7, 1.2]) *Soit M un A-module de type fini tel que* $\operatorname{prof}_A M \geq 1$. *Alors*

$$\operatorname{length}_{\mathscr{O}} \Psi_A(M) = (\operatorname{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A]) \cdot \operatorname{length}_{\mathscr{O}} \Psi_A(A) - \operatorname{length}_{\mathscr{O}} (M[\mathfrak{p}_A]/I_A M)\,.$$

De manière équivalente, on a une égalité

$$\delta_A(M) = (\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A]) \cdot \delta_A(A) + \mathrm{length}_{\mathscr{O}}\,(M[\mathfrak{p}_A]/I_A M)\,.$$

En particulier $\delta_A(M) \geq 0$. Lorsque $M_{\mathfrak{p}_A} \neq 0$, si $\delta_A(M) = 0$ alors A est d'intersection complète et M est fidèle. Si de plus M est de rang au plus $\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A]$ en chaque point générique de A, alors M est libre.

La première partie de ce résultat relie les longueurs des modules de congruence de M et de A. La dernière partie du Théorème 2.5.2, qui décrit quand $\delta_A(M) = 0$, raffine le résultat de Diamond [27, Theorem 2.4] ; voir le théorème 2.1.4 et aussi le résultat 2.5.3 ci-dessous. Dans [27] le module M est supposé fini et plat sur $\mathscr{O}$. Nous remplaçons cette hypothèse par la condition, plus faible, que M soit de type fini sur A et de profondeur strictement positive.

L'un des ingrédients de la preuve est le résultat [34, Proposition A.6] qui traite le cas où M est un A-module cyclique. Le principal nouvel ingrédient est le critère de liberté suivant pour les modules.

Théorème 2.5.3 ([Bro7, 1.3]) *On suppose que A est de Gorenstein et que M est de type fini sur A, avec $\mathrm{prof}_A\, M \geq 1$. Si*

$$\delta_A(M) = (\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A])\delta_A(A)\,,$$

et si M est de rang au plus $\mathrm{rg}_{\mathscr{O}} M[\mathfrak{p}_A]$ en tout point générique de A, alors M est libre.

Un résultat un peu plus général est donné en [Bro7, Thm 4.6], où la condition sur les rangs est remplacée par une condition plus faible faisant appel aux multiplicités. Les preuves des théorèmes 2.5.2 et 2.5.3 reposent sur une étude minutieuse des modules de congruence, ainsi que sur plusieurs modules auxiliaires qui y sont reliés.

Toujours dans l'article [Bro7], nous donnons une nouvelle preuve d'une formule de Venkatesh, formulée dans [68] et démontrée par Fakhruddin et Khare dans l'appendice de [8], qui permet de calculer le défaut de Wiles $\delta_A(A)$ d'un anneau A en termes de la cohomologie d'André-Quillen. Nous expliquons aussi comment cette formule permet de retrouver le critère de Wiles [69] et Lenstra [50] pour les isomorphismes entre intersections complètes.

Nous terminons cette partie en extrapolant sur la signification potentielle du théorème 2.5.2 pour l'étude des modules de congruence entre formes modulaires. La question de comparer les modules de congruence de A et de M a été abondamment étudiée, dans le contexte de la théorie des congruences entre formes modulaires. Cette théorie joue un rôle clé dans le travail fondateur de Wiles [69]. Comme rappelé ci-dessus, on étudie une algèbre de Hecke T qui agit sur $H^1(X_0(N), \mathscr{O})_{\mathfrak{m}}$, qui est isomorphe à $M \oplus M$ où M est un T-module fini et plat sur $\mathscr{O}$, donc de profondeur non nulle. On s'intéresse à une augmentation $\lambda_f = \lambda\colon T \to \mathscr{O}$ qui provient d'une forme nouvelle $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ de poids 2. Dans ce contexte, la question de montrer que les modules de congruence de T et de M (associés à l'augmentation λ_f provenant de la forme nouvelle f) coïncident a été étudiée dans des travaux de Hida [39] et de Ribet [60] dans les années 1980, et dans de nombreux autres travaux, y compris [69].

La motivation pour cette étude est que le module de congruence (cohomologique) de M est plus facile à étudier, et lié à une valeur critique de la fonction L associée au motif adjoint de f (comme découvert par Hida dans son travail fondateur), alors que le module de congruence de T est directement lié aux congruences entre f et d'autres formes nouvelles de $S_2(\Gamma_0(N))$. Dans ces travaux, il a été montré que la surjection naturelle $\Psi_T(T) \to \Psi_T(M)$ est un isomorphisme, prouvant ainsi que toutes les congruences entre f et d'autres formes nouvelles dans $S_2(\Gamma_0(N))$ peuvent être détectées « cohomologiquement », en montrant que M est un T-module libre (de rang 1). Il découle de nos résultats que l'on a un tel isomorphisme exactement lorsque $M[\mathfrak{p}_A]/I_A M = 0$, ce qui peut arriver sans que M soit libre sur T. Par exemple, [9, Theorem 3.12] implique que $M[\mathfrak{p}_A]/I_A M = 0$ lorsque $\mathrm{End}_T M = T$, ce qui est une condition plus faible qu'être libre. Nous espérons que les observations faites dans la première partie du théorème 2.5.2, qui donnent un sens au noyau du morphisme surjectif $\Psi_T(T) \to \Psi_T(M)$, seront utiles dans l'étude des congruences entre formes modulaires.

Enfin, signalons que, toujours avec Iyengar et Khare, nous avons quelques idées de conjectures qui permettraient potentiellement de renforcer encore les versions relatives à un module des critères numériques de Taylor et Wiles qui caractérisent les intersections complètes, et les critères numériques de liberté. Les résultats sont encore trop maigres mais le travail est en cours.

Travaux présentés dans ce mémoire

[Bro1] Cristiana Bertolin and Sylvain Brochard. Morphisms of 1-motives defined by line bundles. *International Mathematics Research Notices*, 2019(5) :1568–1600, 2019.

[Bro2] Sylvain Brochard. Finiteness theorems for the Picard objects of an algebraic stack. *Adv. Math.*, 229 :1555–1585, 2012.

[Bro3] Sylvain Brochard. Proof of de Smit's conjecture : a freeness criterion. *Compositio Mathematica*, 153(11) :2310–2317, 2017.

[Bro4] Sylvain Brochard. Duality for commutative group stacks. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3) :2321–2388, 2021.

[Bro5] Sylvain Brochard. Independent sequences and freeness criteria, 2022.

[Bro6] Sylvain Brochard, Srikanth B. Iyengar, and Chandrashekhar B. Khare. A freeness criterion without patching for modules over local rings. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, page 1–13, 2021.

[Bro7] Sylvain Brochard, Srikanth B Iyengar, and Chandrashekhar B Khare. Wiles Defect for Modules and Criteria for Freeness. *International Mathematics Research Notices*, 2022.

[Bro8] Sylvain Brochard and Ariane Mézard. About De Smit's question on flatness. *Math. Zeit.*, 267 :385–401, 2011.

Bibliographie

[1] Dan Abramovich, Tom Graber, and Angelo Vistoli. Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks. *Amer. J. Math.*, 130(5) :1337–1398, 2008.

[2] Dan Abramovich, Martin Olsson, and Angelo Vistoli. Tame stacks in positive characteristic. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(4) :1057–1091, 2008.

[3] Dan Abramovich and Angelo Vistoli. Compactifying the space of stable maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(1) :27–75 (electronic), 2002.

[4] Luchezar L. Avramov. Locally complete intersection homomorphisms and a conjecture of Quillen on the vanishing of cotangent homology. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :455–487, 1999.

[5] Luchezar L. Avramov, Hans-Bjo rn Foxby, and Bernd Herzog. Structure of local homomorphisms. *J. Algebra*, 164(1) :124–145, 1994.

[6] Luca Barbieri-Viale and Vasudevan Srinivas. Albanese and Picard 1-motives. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (87) :vi+104, 2001.

[7] Gebhard Böckle and Chandrashekhar Khare. Mod l representations of arithmetic fundamental groups. II. A conjecture of A. J. de Jong. *Compos. Math.*, 142(2) :271–294, 2006.

[8] Gebhard Böckle, Chandrashekhar B. Khare, and Jeffrey Manning. Wiles defect of Hecke algebras via local-global arguments. Preprint. ArXiv :2108.09729.

[9] Gebhard Böckle, Chandrashekhar B Khare, and Jeffrey Manning. Wiles defect for Hecke algebras that are not complete intersections. *Compositio Mathematica*, 157(9) :2046–2088, 2021.

[10] Niels Borne and Angelo Vistoli. The Nori fundamental gerbe of a fibered category. *J. Algebraic Geom.*, 24(2) :311–353, 2015.

[11] Alexander Braverman and Roman Bezrukavnikov. Geometric Langlands correspondence for $\mathscr{D}$-modules in prime characteristic : the $\mathrm{GL}(n)$ case. *Pure Appl. Math. Q.*, 3(1, Special Issue : In honor of Robert D. MacPherson. Part 3) :153–179, 2007.

[12] Lawrence Breen. *Fonctions thêta et théorème du cube*, volume 980 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[13] Christophe Breuil and Fred Diamond. Formes modulaires de Hilbert modulo p et valeurs d'extensions entre caractères galoisiens. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(5) :905–974, 2014.

[14] Sylvain Brochard. Foncteur de Picard d'un champ algébrique. *Math. Ann.*, 343 :541–602, 2009.

[15] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[16] Charles Cadman. Using stacks to impose tangency conditions on curves. *Amer. J. Math.*, 129(2) :405–427, 2007.

[17] Frank Calegari and David Geraghty. Modularity lifting beyond the Taylor-Wiles method. *Invent. Math.*, 211(1) :297–433, 2018.

[18] Tsao-Hsien Chen and Xinwen Zhu. Geometric Langlands in prime characteristic. *Comp. Math.*, (153) :395–452, 2017.

[19] Laurent Clozel, Michael Harris, and Richard Taylor. Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (108) :1–181, 2008. With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras.

[20] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. Torseurs sous des groupes de type multiplicatif ; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(18) :Aii, A1113–A1116, 1976.

[21] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 284(16) :A967–A970, 1977.

[22] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 284(19) :A1215–A1218, 1977.

[23] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles. II. *Duke Math. J.*, 54(2) :375–492, 1987.

[24] Brian Conrad, Fred Diamond, and Richard Taylor. Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2) :521–567, 1999.

[25] Henri Darmon, Fred Diamond, and Richard Taylor. Fermat's last theorem. In *Elliptic curves, modular forms & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, pages 2–140. Int. Press, Cambridge, MA, 1997.

[26] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (44) :5–77, 1974.

[27] Fred Diamond. The Taylor-Wiles construction and multiplicity one. *Invent. Math.*, 128(2) :379–391, 1997.

[28] Mark Dickinson. On the modularity of certain 2-adic Galois representations. *Duke Math. J.*, 109(2) :319–382, 2001.

[29] Mladen Dimitrov. On Ihara's lemma for Hilbert modular varieties. *Compos. Math.*, 145(5) :1114–1146, 2009.

[30] Ron Donagi and Tony Pantev. Torus fibrations, gerbes, and duality. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 193(901) :vi+90, 2008. With an appendix by D. Arinkin.

[31] Ron Donagi and Tony Pantev. Langlands duality for Hitchin systems. *Invent. Math.*, 189(3) :653–735, 2012.

[32] Matthew Emerton, Toby Gee, and David Savitt. Lattices in the cohomology of Shimura curves. *Invent. Math.*, 200(1) :1–96, 2015.

[33] Hélène Esnault, V. Srinivas, and Eckart Viehweg. The universal regular quotient of the Chow group of points on projective varieties. *Invent. Math.*, 135(3) :595–664, 1999.

[34] Najmuddin Fakhruddin, Chandrashekhar Khare, and Ravi Ramakrishna. Quantitative level lowering for Galois representations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 103(1) :250–287, 2021.

[35] Alain Genestier and Jacques Tilouine. Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4. *Astérisque*, (302) :177–290, 2005. Formes automorphes. II. Le cas du groupe $\mathrm{G}Sp(4)$.

[36] Alexander Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*. Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[37] Douglas Hanes. Length approximations for independently generated ideals. *J. Algebra*, 237(2) :708–718, 2001.

[38] Michael Harris. The Taylor-Wiles method for coherent cohomology. *J. Reine Angew. Math.*, 679 :125–153, 2013.

[39] Haruzo Hida. On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions. *Invent. Math.*, 64(2) :221–262, 1981.

[40] M. Jahangiri and Kh. Sayyari. Linkage of ideals over a module. *J. Algebr. Syst.*, 8(2) :269–281, 1 unnumbered page, 2021.

[41] Peter Jossen. On the arithmetic of 1-motives. PhD Thesis. Webpage of the author, 2009.

[42] Seán Keel and Shigefumi Mori. Quotients by groupoids. *Ann. of Math. (2)*, 145(1) :193–213, 1997.

[43] Chandrashekhar Khare and Jean-Pierre Wintenberger. Serre's modularity conjecture. II. *Invent. Math.*, 178(3) :505–586, 2009.

[44] Chandrashekhar B. Khare and Jack A. Thorne. Potential automorphy and the Leopoldt conjecture. *Amer. J. Math.*, 139(5) :1205–1273, 2017.

[45] Mark Kisin. The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(3) :641–690, 2009.

[46] Mark Kisin. Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations. *Invent. Math.*, 178(3) :587–634, 2009.

[47] Mark Kisin. Moduli of finite flat group schemes, and modularity. *Ann. of Math. (2)*, 170(3) :1085–1180, 2009.

[48] Gérard Laumon. Transformation de Fourier généralisée. arXiv :9603004, 1996.

[49] Christer Lech. Inequalities related to certain couples of local rings. *Acta Math.*, 112 :69–89, 1964.

[50] H. W. Lenstra, Jr. Complete intersections and Gorenstein rings. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 99–109. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[51] Alex Martsinkovsky and Jan R. Strooker. Linkage of modules. *J. Algebra*, 271(2) :587–626, 2004.

[52] Cheng Meng. Strongly Lech-independent ideals and Lech's conjecture. 2021. arXiv :2112.09849.

[53] David Mumford. Picard groups of moduli problems. In *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 33–81. Harper & Row, New York, 1965.

[54] David Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[55] Masayoshi Nagata. *Local rings*. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1975. Corrected reprint.

[56] James Newton and Jack A. Thorne. Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms, II. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 134 :117–152, 2021.

[57] C. Peskine and L. Szpiro. Liaison des variétés algébriques. I. *Invent. Math.*, 26 :271–302, 1974.

[58] Vincent Pilloni. Modularité, formes de Siegel et surfaces abéliennes. *J. Reine Angew. Math.*, 666 :35–82, 2012.

[59] Niranjan Ramachandran. Duality of Albanese and Picard 1-motives. *K-Theory*, 22(3) :271–301, 2001.

[60] Kenneth A. Ribet. Mod p Hecke operators and congruences between modular forms. *Invent. Math.*, 71(1) :193–205, 1983.

[61] Henrik Russell. Generalized Albanese and its dual. *J. Math. Kyoto Univ.*, 48(4) :907–949, 2008.

[62] Henrik Russell. Albanese varieties with modulus over a perfect field. *Algebra Number Theory*, 7(4) :853–892, 2013.

[63] Jean-Pierre Serre. Morphismes universels et variété d'albanese. *Séminaire Claude Chevalley*, Tome 4(Exposé no. 10) :1–22, 1958-1959.

[64] Richard Taylor. On the meromorphic continuation of degree two L-functions. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :729–779 (electronic), 2006.

[65] Richard Taylor and Andrew Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :553–572, 1995.

[66] Jack A. Thorne. Beyond the Taylor–Wiles method. Unpublished. Available at `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~jat58/beyondtw.pdf`.

[67] Wolmer V. Vasconcelos. Ideals generated by R-sequences. *J. Algebra*, 6 :309–316, 1967.

[68] Akshay Venkatesh. Derived version of Wiles's equality. 2016.

[69] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.