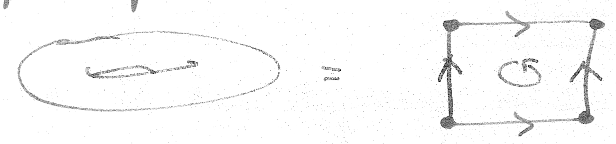
Exposé numéro (Sylvain Brochard)

Comparaison entre la cohomologie l-adique et la cohomologie de Betti

① Cohomologie de Betti (ou cohomologie singulière)

On donne juste un exemple de calcul pour rafraîchir la mémoire des participants.

Ex: tore $T =$



On note $C_n = \{\text{cellules de dim}^\circ\ n\}$.

Ici $C_0 = \{\bullet\}$, $C_1 = \{\rightarrow, \uparrow\}$, $C_2 = \{\square\}$.

Les groupes d'homologie $H_i(T)$ se calculent à l'aide du complexe $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}^{C_n} \longrightarrow \mathbb{Z}^{C_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}^{C_0} \longrightarrow 0$.

Ici $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ et toutes les flèches sont nulles, donc
$$H_i(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & i = 1 \\ \mathbb{Z} & i = 2 \\ 0 & i \geq 3 \end{cases}$$

Comme les H_i sont libres, on a pour tout groupe G (abélien) :
$$H^i(T, G) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(T), G)$$
d'où
$$H^i(T, G) = \begin{cases} G & i = 0 \\ G^2 & i = 1 \\ G & i = 2 \\ 0 & i \geq 3 \end{cases}.$$

Plus généralement, pour X courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$, de genre g, on a en notant X^{an} l'espace analytique associé :
$$H^i(X^{an}, G) = \begin{cases} G & \text{pour } i = 0 \\ G^{2g} & i = 1 \\ G & i = 2 \\ 0 & i \geq 3 \end{cases}.$$

Rem : Si X est un espace topologique localement contractile, ce qui est le cas des espaces analytiques, la cohomologie singulière de X à valeurs dans un groupe abélien G coïncide avec la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau constant $\underline{G}$, calculée au sens des foncteurs dérivés. C'est cette description, plus proche de la cohomologie étale, que nous utiliserons par la suite.

② Le théorème

Le théorème principal est le suivant.

Thm : Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini entre deux schémas séparés et localement de type fini (et f) sur $\mathbb{C}$, et F un faisceau constructible sur X.

Alors $(R^q f_* F)^{an} \simeq R^q f_*^{an}(F^{an})$.

En particulier, pour $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$:

$$H^q(X_{et}, F) \simeq H^q(X^{an}, F^{an})$$

Rem : Il est indispensable d'avoir des coefficients de torsion.

Par exemple si X est une courbe projective et lisse sur $\mathbb{C}$, de genre $g \geq 1$, alors $H^1(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}}) = 0 \neq \mathbb{Z}^{2g}$.

De même, avec les faisceaux constants $\underline{\mathbb{Z}_\ell}$ et $\underline{\mathbb{Q}_\ell}$, on ne trouve pas "la bonne" cohomologie. On trouve en effet

$$H^q(X_{et}, \underline{\mathbb{Z}_\ell}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell & q = 0 \\ 0 & q = 1 \\ (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{2g} & q = 2 \\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & q = 3 \\ 0 & q \geqslant 4 \end{cases}$$

et $H^q(X_{\acute{e}t}, \underline{\mathbb{Q}_\ell}) = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } q > 0 \end{cases}$.

En revanche, comme $\underline{\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}}$ est constructible, on a pour tout q

$H^q(X_{\acute{e}t}, \underline{\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}}) \simeq H^q(X^{an}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ donc les groupes de cohomologie ℓ-adique usuels sont

$$H^q(X, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_m H^q(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell & q = 0 \\ \mathbb{Z}_\ell^{2g} & q = 1 \\ \mathbb{Z}_\ell & q = 2 \\ 0 & q \geq 3 \end{cases}.$$

3 Preuve pour $q = 0$ ou $q = 1$, F localement constant

$q = 0$ Soit X un schéma localement de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ et soit G un groupe abélien fini.

Alors $\begin{cases} H^0(X_{\acute{e}t}, \underline{G}) \simeq G^{\pi_0(X)} \\ H^0(X^{an}, \underline{G}) \simeq G^{\pi_0(X^{an})} \end{cases}$.

Or les composantes connexes de X sont en bijection avec celles de X^{an} (GAGA). Donc

$$H^0(X_{\acute{e}t}, \underline{G}) \simeq H^0(X^{an}, \underline{G}).$$

$q = 1$ Théorème d'existence de Riemann ("Grauert-Remmert"):

> Soit X un schéma ltf sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$. Alors le foncteur
>
> $$\begin{array}{ccc} \mathrm{F\acute{E}t}(X) & \longrightarrow & \mathrm{F\acute{E}t}(X^{an}) \\ \begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} Y^{an} \\ \downarrow \\ X^{an} \end{pmatrix} \end{array}$$
>
> est une équivalence, où $\mathrm{F\acute{E}t}(X)$ désigne la catégorie des revêtements finis étales de X, et $\mathrm{F\acute{E}t}(X^{an})$ désigne la catégorie des morphismes $Y \to X^{an}$ d'espaces analytiques qui sont des isomorphismes locaux à fibres finies.

On en déduit immédiatement que si G est un groupe fini, alors le foncteur $G\text{-Tors}(X) \longrightarrow G\text{-Tors}(X^{an})$ est une équivalence.

Donc $H^1(X_{ét}, \underline{G}) \simeq H^1(X^{an}, \underline{G})$.

(4) Preuve pour $q=2$, $\dim X = 1$, et F localement constant

OPS $F = \mu_m \ (\simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

- D'une part on a la suite exacte de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

qui donne

$$\underset{\substack{\| \\ \mathrm{Pic}(X)}}{H^1(X_{ét}, \mathbb{G}_m)} \xrightarrow{m} H^1(X_{ét}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(X_{ét}, \mu_m) \longrightarrow 0$$

d'où $H^2(X_{ét}, \mu_m) = \dfrac{\mathrm{Pic}(X)}{m\mathrm{Pic}(X)}$.

- D'autre part, en notant $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X^{an}, on a la suite exacte de faisceaux sur X^{an} :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0$$

d'où

$$\underset{\substack{\| \\ \mathrm{Pic}(X^{an})}}{H^1(X^{an}, \mathcal{O}^\times)} \xrightarrow{m} \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Pic}(X^{an})}}{H^1(X^{an}, \mathcal{O}^\times)} \longrightarrow H^2(X^{an}, \mu_m) \longrightarrow H^2(X^{an}, \mathcal{O}^\times)$$

Or par GAGA, $\mathrm{Pic}(X^{an}) \simeq \mathrm{Pic}(X)$, donc pour conclure ISDMQ $H^2(X^{an}, \mathcal{O}^\times) = 0$. Mais on a aussi

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow[\exp]{} \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0$$

d'où

$$H^2(X^{an}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^2(X^{an}, \mathcal{O}^\times) \longrightarrow H^3(X^{an}, \mathbb{Z}).$$

$H^2(X^{an}, \mathcal{O}) \overset{\text{GAGA}}{=} H^2(X_{ét}, \mathcal{O}_X) = 0$, et $H^3(X^{an}, \mathbb{Z}) = 0$ car $\dim_{\mathbb{C}} X^{an} = 1$.

5 Dans la suite de l'exposé, on va démontrer le théorème pour X lisse. On donnera une idée de la preuve générale à la fin. Précisons d'abord quelques notations.

Pour un schéma X sur $\mathbb{C}$, on note X^{an} l'espace analytique associé, avec sa topologie complexe, et $X_{ét}$ le site (petit) étale de X. On ne peut pas comparer directement le site $X_{ét}$ avec le site des ouverts de X^{an}. Ce n'est pas très grave, on introduit un autre site un peu plus riche pour calculer la cohomologie complexe. On note donc X_{cx} le site dont :

- les objets sont les couples (U, u) où U est un espace analytique et $u : U \longrightarrow X^{an}$ est un morphisme qui est un isomorphisme local ;
- les morphismes sont les X^{an}-applications holomorphes

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "u"'] & \circlearrowleft & V \arrow[dl, "v"] \\ & X^{an} & \end{tikzcd} \quad ;$$

- les familles couvrantes sont les collections $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow U\}_i$ telles que les $\varphi_i(U_i)$ recouvrent U.

On a deux applications continues

$$\begin{tikzcd} & X_{cx} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X^{an} & & X_{ét} \end{tikzcd}$$

En effet, si $U \subset X^{an}$ est un ouvert, l'inclusion $U \hookrightarrow X^{an}$ est en particulier un isomorphisme local, d'où α. Par ailleurs si $U \longrightarrow X$ est étale, $U^{an} \longrightarrow X^{an}$ est lui aussi un isomorphisme local, d'où β.

<u>Proposition</u> : Le foncteur $\alpha_* : Ab(X_{cx}) \longrightarrow Ab(X^{an})$ est une équivalence.

<u>Preuve</u> On vérifie facilement que

$$\alpha^* : Ab(X^{an}) \longrightarrow Ab(X_{cx})$$

$$F \longmapsto \left(\begin{array}{l}\text{faisceau associé au préfaisceau qui à } u : U \xrightarrow[\text{loc.}]{\text{isom.}} X^{an} \\ \text{associe } F(u(U))\end{array}\right)$$

est un quasi-inverse. ∎

- En particulier α_* est exact, donc le morphisme canonique $H^{\cdot}(X^{an}, \alpha_* F) \longrightarrow H^{\cdot}(X_{cx}, F)$ (induit par la suite spectrale de Leray) est un isomorphisme pour tout $F \in Ab(X_{cx})$.

- Par ailleurs $\beta_* : Ab(X_{cx}) \longrightarrow Ab(X_{ét})$ est exact à gauche, et il a un adjoint à gauche β^* qui est lui aussi exact à gauche, donc il préserve les injectifs et on a une suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{ét}, R^q\beta_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{cx}, F)$$

pour tout $F \in Ab(X_{cx})$. En particulier on a un morphisme de bord $H^p(X_{ét}, \beta_* F) \longrightarrow H^p(X_{cx}, F)$.

C'est un isomorphisme si $R^q\beta_* F = 0 \quad \forall q \geq 1$.

Or $R^q\beta_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$X_{ét} \longrightarrow (Ab)$$

$$\begin{pmatrix} U \\ \downarrow \\ X \end{pmatrix} \longmapsto H^q(U_{cx}, F|_{U_{cx}})$$

Donc pour conclure dans le cas où X est lisse et F localement constant, il suffit de montrer le lemme suivant.

<u>Lemme</u> : Soit X un schéma lisse sur Spec $\mathbb{C}$. Soit $F \in Ab(X_{cx})$ un faisceau abélien qui est localement fini et constant.
Alors $\forall q \geq 1$, $\forall \gamma \in H^q(X_{cx}, F)$ $\exists \{U_i \to X\}$ famille couvrante <u>étale</u> telle que $\forall i$ $\gamma|_{U_i} = 0$ dans $H^q(U_{i\,cx}, F|_{U_{i\,cx}})$.

Rem : Dans l'énoncé précédent, il y a a priori une ambiguïté sur la notion de faisceau "localement constant et fini" (pour quelle topologie ?). En fait, si X est un schéma ltf sur Spec $\mathbb{C}$ et si $F \in Ab(X_{cx})$, il y a équivalence entre :

(i) $\exists \{U_i \to X\}_i$ recouvrement étale de X tel que pour tout i, $F|_{U_i}$ soit constant et fini ;

(ii) $\exists \{U_i \to X^{an}\}_i$ recouvrement dans X_{cx} tel que pour tout i, $F|_{U_{i\,cx}}$ soit constant et fini.

(C'est une conséquence facile du théorème d'existence de Riemann.)

Rem 2 : Pour $q=1$, le lemme d'effacement que l'on vient d'énoncer est une conséquence immédiate du théorème déjà démontré. En effet, $H^1(X_{et}, F) \to H^1(X_{cx}, F)$ est un isomorphisme. Soit $\gamma \in H^1(X_{et}, F)$. On plonge F dans un injectif I, on note Q le quotient.

$$0 \to F \to I \to Q \to 0.$$

On a alors une suite exacte

$$H^0(X_{et}, Q) \xrightarrow{\partial} H^1(X_{et}, F) \to H^1(X_{et}, I) = 0$$

donc $\gamma = \partial\alpha$ avec $\alpha \in H^0(X_{et}, Q)$. Mais α provient localement de I pour la topologie étale (construction du faisceau quotient), ce qui prouve que γ est nul localement pour la topologie étale.

6 Fibrations élémentaires

Déf : Une "fibration élémentaire" est un morphisme de schémas $f : X \to S$ tel qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & Z \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

dans lequel :

(a) j est une immersion ouverte, dense dans chaque fibre, et $Z = \overline{X} - X$;

(b) $\overline{f}$ est lisse et projectif, à fibres géométriques intègres et de dimension 1 ;

(c) g est fini, étale et surjectif.

<u>Proposition</u> : Soit X un schéma lisse sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$, alors X est recouvert par des ouverts de Zariski $U_i \subset X$ tels que pour tout i, le composé $U_i \subset X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ se factorise en une suite finie de fibrations élémentaires

$$U_i = X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}.$$

(<u>rem</u> : nécessairement $n = \dim U_i$)

On admet cette proposition (cf. SGA 4, XI, 3.3 ou Milne, <u>Etale Cohomology</u> III 3.13).

7 Preuve du lemme (page 6)

On raisonne par récurrence sur $\dim X$. Le lemme est évident pour $\dim X = 0$ car tout est nul. On suppose qu'il est démontré pour X de dimension $\leq n-1$. Comme l'énoncé est local sur X, grâce à la proposition ci-dessus OPS qu'il existe une fibration élémentaire $f : X \to S$,

avec S de dimension $n-1$. On peut aussi supposer que F est constant et fini, disons $F = \underline{G}$ avec G un groupe abélien fini. La suite spectrale de Leray (SSL) pour $f^{cx} : X_{cx} \to S_{cx}$ s'écrit
$$E_2^{p,q} = H^p(S_{cx}, R^q f_*^{cx} F) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{cx}, F).$$

On va montrer ci-dessous que
$$\begin{cases} f_*^{cx} F \text{ est constant et fini sur } S_{cx} \\ R^1 f_*^{cx} F \text{ est localement constant et fini (lcf) sur } S_{cx} \\ R^q f_*^{cx} F = 0 \quad \text{pour } q \geq 2 . \end{cases}$$

La dernière de ces assertions implique que la SSL dégénère en une suite exacte longue
$$0 \to H^1(S_{cx}, f_*^{cx} F) \to H^1(X_{cx}, F) \to H^0(S_{cx}, R^1 f_*^{cx} F) \to H^2(S_{cx}, f_*^{cx} F) \to \cdots$$
$$\cdots \to H^n(S_{cx}, f_*^{cx} F) \to H^n(X_{cx}, F) \to H^{n-1}(S_{cx}, R^1 f_*^{cx} F) \to \cdots$$
Vu l'hypothèse de récurrence, on en déduit aussitôt le lemme pour tout $q \geq 2$. (Pour $q = 1$ il est déjà démontré.)

⑧ Calcul des images directes supérieures $R^i f_*^{cx} \underline{G}$ (G groupe abélien fini)

Comme f est une fibration élémentaire, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions (a), (b) et (c) de la définition.

On voit facilement que $f_*^{cx} F = \bar{f}_* j_* \underline{G} = \bar{f}_* \underline{G} = \underline{G}$ car l'image réciproque de tout ouvert connexe de S par $\bar{f}$ est encore un ouvert connexe. Il reste à montrer que $R^1 f_* F$ est lcf et $R^q f_* F = 0$, $q \geq 2$.

Le calcul se fera en utilisant la SS d'un foncteur composé $f_*^{cx} = \bar{f}_*^{cx} \circ j_*^{cx}$. On commence donc par calculer les images directes supérieures par j et par $\bar{f}$.

8.1 Calcul des images directes supérieures $R^q j_*^{cx} \underline{G}$

Soit G un groupe abélien fini. On va montrer ici que

$$\begin{cases} j_*^{cx} \underline{G} \simeq \underline{G} \\ R^1 j_*^{cx} \underline{G} \simeq i_*^{cx} \underline{G} \\ R^q j_*^{cx} \underline{G} = 0 \quad \text{si } q \geq 2. \end{cases}$$

Ces questions sont locales sur $\bar{X}$, il suffit donc de les démontrer au voisinage de chaque point $x \in \bar{X}$. Si $x \in X$, c'est clair car au voisinage de x, j est juste l'identité. Supposons donc $x \in Z$.

(Rem : Dans ce qui suit on fait des calculs sur l'espace topologique $\bar{X}^{an}$ au lieu du site $\bar{X}_{cx}$. Ceci n'a aucune importance : nous avons vu plus haut que c'était la même chose... Par abus on continuera de noter "cx" pour simplifier les notations.)

Comme $Z^{an} \to S^{an}$ est fini étale, c'est un isomorphisme local donc on peut supposer (quitte à restreindre S^{an}, Z^{an} et $\bar{X}^{an}$) que c'est un isomorphisme. On note $\mathbb{C}^n_0$ une petite boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{C}^n$. Alors, topologiquement, notre diagramme s'identifie au voisinage de x à

$$\begin{tikzcd} X \simeq \mathbb{C}_0^{m-1} \times (\mathbb{C}_0 - \{0\}) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr] & \mathbb{C}_0^{m-1} \times \mathbb{C}_0 \arrow[d, "\bar{f} = p_1"] & Z \simeq \mathbb{C}_0^{m-1} \times \{0\} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl] \\ & \mathbb{C}_0^{m-1} & \end{tikzcd}$$

(rem : Ici on utilise le fait que les espaces analytiques sont lisses...)

$R^1 j_*^{cx} \underline{G}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^1_{cx}(U \cap X, \underline{G})$. Pour des U comme ci-dessus (et il suffit de faire le calcul pour de tels U, qui forment une base de voisinages de x), on a $H^q_{cx}(U \cap X, \underline{G}) \simeq H^q(\mathbb{C}_0^{m-1} \times (\mathbb{C}_0 - \{0\}), \underline{G}) = \begin{cases} G & \text{si } q = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

Ceci montre les résultats annoncés.

8.2 Calcul des images directes supérieures $R^q \bar{f}_*^{cx}$

On montre ici que $R^q \bar{f}_*^{cx}(\underline{G}) = 0$ pour $q \geq 3$, et que $R^q \bar{f}_*^{cx}(R^1 j_*^{cx} \underline{G}) = 0$ pour $q \geq 1$.

Comme $\bar{f}$ est propre, d'après le "théorème de changement de base propre" (pas celui de la cohomologie étale, mais l'énoncé analogue plus facile connu en topologie) pour ces questions OPS $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$. Alors les $R^q \bar{f}_*^{cx}$ sont les $H^q_{cx}(\bar{X}, .)$.

Or $H^q_{cx}(\bar{X}, \underline{G}) = \begin{cases} G & \text{si } q = 0 \text{ ou } 2 \\ G^{2g} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 3 \end{cases}$ car $\bar{X}$ courbe proj. lisse (de genre g)

d'où la première assertion.

Par ailleurs, $H^q_{cx}(\bar{X}, R^1 j_*^{cx} \underline{G}) = H^q_{cx}(\bar{X}, i_*^{cx} \underline{G})$ d'après 8.1

$$= H^q_{cx}(Z, \underline{G})$$

(par la SSL de $i : Z \to \bar{X}$, qui est une immersion fermée donc $R^q i_* \underline{G} = 0$ pour $q \geq 1$)

d'où $H^q_{cx}(\bar{X}, R^1 j_*^{cx} \underline{G}) = 0$ pour $q \geq 1$ car Z est de dimension 0

8.3 Fin du calcul des $R^q f_*^{cx} F$ ($F = \underline{G}$ constant et fini)

La SS de "foncteur composé" $f_*^{cx} = \bar{f}_*^{cx} \circ j_*^{cx}$ s'écrit

$$E_2^{p,q} = R^p \bar{f}_*^{cx} (R^q j_*^{cx} F) \Longrightarrow R^{p+q} f_*^{cx} F.$$

Comme $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \geq 2$ par 8.1, cette SS dégénère en une suite exacte longue

$$0 \to R^1 \bar{f}_* (j_* F) \to R^1 f_* F \to \bar{f}_* (R^1 j_* F)$$
$$\to R^2 \bar{f}_* (j_* F) \to R^2 f_* F \to \underbrace{R^1 \bar{f}_* (R^1 j_* F)}_{=0 \text{ par } 8.2}$$
$$(\dots)$$
$$\to \underbrace{R^n \bar{f}_* (j_* F)}_{\substack{=0 \\ (8.2)}} \to R^n f_* F \to \underbrace{R^{n-1} \bar{f}_* (R^1 j_* F)}_{\substack{=0 \\ (8.2)}} \to \dots \quad (n \geq 3)$$

Ceci prouve déjà que $R^q f_*^{cx} F = 0$ pour $q \geq 3$.

Il nous reste la suite exacte longue du début, qui induit la première ligne du diagramme ci-dessous, pour un $s \in S$ fixé :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (R^1\bar{f}_*(j_*F))_s \arrow[r] \arrow[d, "c_1"] & (R^1 f_* F)_s \arrow[r] \arrow[d, "c_2"] & (\bar{f}_*(R^1 j_* F))_s \arrow[r] \arrow[d, "c_3"] & (R^2 \bar{f}_*(j_*F))_s \arrow[r] \arrow[d, "c_4"] & (R^2 f_* F)_s \arrow[r] \arrow[d, "c_5"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(\bar{X}_s, (j_*F)_s) \arrow[r] & H^1(X_s, F_s) \arrow[r] & H^0(\bar{X}_s, (R^1 j_* F)_s) \arrow[r] & H^2(\bar{X}_s, (j_*F)_s) \arrow[r] & H^2(X_s, F_s) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la 1ère ligne est exacte car le foncteur qui à un faisceau $\mathcal{F}$ associe son germe $\mathcal{F}_s$ en s est exact. La seconde ligne est exacte aussi : elle provient de la suite spectrale analogue à celle du début du paragraphe, mais au-dessus du point s. (C'est aussi la SS de Leray pour le morphisme j_s. Notez au passage que $(j_*F)_s \simeq j_{s*}F_s$ et $(R^1 j_* F)_s \simeq R^1 j_{s*} F_s$.) Les morphismes verticaux c_i sont les morphismes canoniques de changement de base. Le diagramme commute. Comme $\bar{f}$ est propre, le "thm. de changement de base propre" (topologique) montre que c_1, c_3 et c_4 sont des isomorphismes. D'après le lemme des 5 ~~on~~ on en déduit que c_2 et c_5 sont des isom.

Or X_s est une courbe projective lisse (disons de genre g) privée de $k \geq 1$ points. Une telle courbe est homotopiquement équivalente à un bouquet de $2g+k-1$ cercles (exercice laissé au lecteur) donc sa cohomologie vaut :

$$H^i(X_s, G_s) = \begin{cases} G & \text{si } i = 0 \\ G^{2g+k-1} & i = 1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit que $R^2 f_*^{cx} F = 0$, et que $(R^1 f_*^{cx} F)_s \simeq G^{2g+k-1}$.

Pour montrer que $R^1 f_*^{cx} F$ est $\underbrace{\text{lcf}}_{\text{"localement constant et fini"}}$, on revient à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow R^1 \bar{f}^{cx}_* \underline{G} \longrightarrow R^1 f^{cx}_* \underline{G} \longrightarrow \bar{f}^{cx}_* (i^{cx}_* \underline{G}) \longrightarrow R^2 \bar{f}^{cx}_* \underline{G} \longrightarrow 0$$

(début de la suite exacte en bas de la p. 11)

et on utilise les faits suivants, admis ici.

<u>Fait 1</u> : Si $f : X \to Y$ est une application propre (au sens topologique) et si F est un faisceau lcf sur X, alors $\forall i \geq 0$, $R^i f_* F$ est lcf

<u>Fait 2</u> : Soit X un espace topologique et soient F, G des faisceaux lcf sur X. Alors pour tout morphisme $f : F \to G$, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont lcf.

<u>Fait 3</u> : Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une extension de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, avec A et C lcf. Alors B est lcf.

Ceci conclut la preuve du théorème, du moins pour un schéma X lisse sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

<u>Très vague idée de la preuve dans le cas général</u>

<u>Cas où f est propre</u> : Des dévissages utilisant le théorème de changement de base pour un morphisme propre (le vrai !) nous ramènent au cas où X est une courbe propre et lisse, $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, et $F = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Mais dans ce cas les H^q sont $\neq 0$ seulement si $q \in \{0, 1, 2\}$ et on a déjà montré le théorème avec GAGA au tout début.

(<u>Rem</u> : pour f propre, le thm. est vrai plus généralement avec F de torsion et pas seulement si F est constructible.)

<u>Cas général</u> : On utilise le théorème de changement de base par un morphisme lisse et la résolution des singularités de Hironaka pour se ramener au cas propre.