Errata et addenda à l'article *Foncteur de Picard d'un champ algébrique*

Sylvain Brochard
brochard@math.univ-montp2.fr

dernière mise à jour : septembre 2010

Err 1. Certaines références ne sont pas pertinentes [1]. Les résultats ne sont cependant pas affectés. On pourra effectuer les modifications suivantes :

Preuve de 1.1, p. 558, l.1, remplacer « généralisé par Aoki aux champs algébriques [11, théorème A.1] » par « généralisé aux champs algébriques [2] ».

Preuve de 3.2.2, p. 560, l.1, remplacer « D'après l'annexe A de [11] » par « D'après [2] ».

Err 2. Preuve de 1.1, p. 554, l.20, ajouter « filtrante » après « limite inductive ».

Add 1. Théorème 1.2. Pour que le champ $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)$ soit quasi-séparé, il suffit que $\mathscr{X}$ soit propre, plat et de présentation finie sur S (il n'est pas nécessaire de supposer S localement noethérien, ni $\mathscr{X}$ cohomologiquement plat en dimension zéro sur S). Voir [2] 2.1.1 (1) pour la démonstration.

Add 2. Proposition 3.2.1. On peut se contenter de supposer que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées lorsque U est de plus *noethérien*. La preuve reste inchangée. (Cette version est plus facile à utiliser.)

Add 3. Lemme 4.2.8 (i). Comme le signale Matthieu Romagny, le lemme 4.2.8 (i) est encore valable (avec la même démonstration, ou presque), si X est un champ algébrique au lieu d'un espace algébrique. On peut de plus s'affranchir de l'hypothèse selon laquelle pour tout point s de S, X_s^0 est irréductible. Il faut pour cela modifier légèrement la preuve. Pour plus de clarté je l'ai entièrement réécrite ci-dessous. Le lemme devient :

1. En effet, la preuve du théorème de semi-continuité pour les champs algébriques apportée dans [1] n'est pas entièrement correcte. À la fin de la preuve du lemme A.2, après la troncature du complexe $C^\bullet$, le dernier groupe de cohomologie du complexe restant est modifié. Il n'est donc plus nécessairement de type fini, ce qui fait échouer la preuve car les lemmes de Mumford ne s'appliquent pas.

Lemme 4.2.8 (i) (amélioré) : *Soient S un schéma et $f : \mathscr{X} \to S$ un S-champ algébrique localement de présentation finie, à fibres géométriquement réduites, muni d'une section $e : S \to \mathscr{X}$. Pour tout $s \in S$, on note $\mathscr{X}_s^0$ la composante connexe de $e(s)$ dans la fibre $\mathscr{X}_s$. On note X^0 la réunion des $|\mathscr{X}_s^0|$ dans $|\mathscr{X}|$ (où pour un champ $\mathscr{X}$, la notation $|\mathscr{X}|$ désigne son espace topologique sous-jacent au sens de [4]). On suppose que f est universellement ouvert en tout point de X^0. Alors X^0 est un ouvert de $|\mathscr{X}|$. (On notera $\mathscr{X}^0$ le sous-champ ouvert de $\mathscr{X}$ correspondant.)*

Remarque : On rappelle que, suivant [3] 14.1.1, une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite ouverte en un point $x \in X$ si pour tout voisinage V de x dans X, $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$. Maintenant un morphisme $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ entre deux champs algébriques est dit universellement ouvert en un point $x \in |\mathscr{X}|$ si pour tout morphisme $\mathscr{Y}' \to \mathscr{Y}$ de champs algébriques, le morphisme induit par changement de base $f' : \mathscr{X}' \to \mathscr{Y}'$ (ou plus précisément, le morphisme induit par f' entre les espaces topologiques sous-jacents) est ouvert en tout point x' de $|\mathscr{X}'|$ qui relève x. Cette définition coïncide avec celle des EGA lorsque f est un morphisme de schémas. De plus il est évident qu'un morphisme de champs algébriques $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est universellement ouvert (au sens de [4]) si et seulement s'il est universellement ouvert en tout point de $|\mathscr{X}|$.

Démonstration. On note $X = |\mathscr{X}|$. On adopte les notations du diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
S'_1 \arrow[r, "\pi'"] & S_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend left, "f_1=f\circ\pi"] \\
 & S \arrow[r, "e"] \arrow[dr, equal] & \mathscr{X} \arrow[d, "f"] \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\pi : X_1 \to \mathscr{X}$ est une présentation de $\mathscr{X}$ par un schéma et $\pi' : S'_1 \to S_1$ est une présentation de l'espace algébrique S_1 par un schéma. On considère le diagramme de schémas :

$$S'_1 \xrightarrow{e_1 \circ \pi'} X_1 \xrightarrow{f_1} S.$$

On note $W_0 := X_1^0(e_1 \circ \pi')$ (*cf.* lemme 4.2.7) le sous-ensemble de X_1 dont la fibre au-dessus d'un point $s \in S$ est la réunion des composantes connexes de $(X_1)_s$ qui rencontrent $e_1 \circ \pi'(S'_1)$. Comme l'image continue d'un connexe est connexe, on voit que $\pi(W_0)$ est inclus dans X^0. Vu que π est lisse, on en déduit que f_1 est universellement ouvert en tout point de W_0. Par 4.2.7 (ii) a) il en résulte que W_0 est un ouvert de X_1.

On considère maintenant $V_1 = \pi^{-1}(\pi(W_0))$. C'est un ouvert de X_1 qui contient W_0 (c'est le saturé de W_0 pour la relation d'équivalence définie par π). D'après 4.2.7 (ii) b) appliqué au diagramme

$$V_1 \xhookrightarrow{e_1 \circ \pi'} X_1 \xrightarrow{f_1} S$$

on voit que $W_1 := X_1^0(V_1 \hookrightarrow X_1)$ est un ouvert de X_1. On poursuit le processus en posant successivement

$$\begin{array}{rcl} V_2 & = & \pi^{-1}(\pi(W_1)) \\ W_2 & = & X_1^0(V_2 \hookrightarrow X_1) \\ \vdots & & \\ V_n & = & \pi^{-1}(\pi(W_{n-1})) \\ W_n & = & X_1^0(V_n \hookrightarrow X_1) \\ \vdots & & \end{array}$$

À chaque fois on a $\pi(W_i) \subset X^0$ si bien que f_1 est universellement ouvert en tout point de W_i et le lemme 4.2.7 (ii) b) permet d'affirmer que W_i est ouvert. On obtient ainsi une suite croissante d'ouverts de X_1

$$W_0 \subset V_1 \subset W_1 \subset V_2 \subset W_2 \subset \ldots$$

On note $V = \cup_i V_i = \cup_i W_i$.

Pour conclure il suffit de montrer que $\pi(V) = X^0$. On peut pour cela raisonner fibre par fibre et supposer que S est le spectre d'un corps. Quitte à remplacer X par X^0, on peut aussi supposer que X est connexe (c'est-à-dire que $X^0 = X$). Vu la construction des V_i (resp. des W_i) il est clair que V est une réunion de fibres de π (resp. de composantes connexes de X_1).

Dans un espace topologique, nous dirons qu'un sous-ensemble est *irréductiblement fermé* (sous-entendu, dans l'espace ambiant) s'il contient toutes les composantes irréductibles qu'il rencontre.

Assertion 1 : $\pi(V)$ est irréductiblement fermé dans X.

Assertion 2 : Dans un espace topologique localement noethérien, les sous-ensembles irréductiblement fermés sont fermés.

Comme X est connexe, ces assertions permettent de conclure facilement puisque $\pi(V)$ est alors fermé, ouvert et non vide. L'assertion 2) est un exercice facile de topologie que nous laissons au lecteur. Prouvons l'assertion 1). Soient $x \in \pi(V)$ et Z une composante irréductible de X qui contient x. Soit $z \in Z$, il faut montrer que $z \in \pi(V)$. Soit U un ouvert connexe de X_1 dont l'image contient z. Comme $\pi(V) \cap Z$ et $\pi(U) \cap Z$ sont deux ouverts non vides de Z, leur intersection est non vide. Comme par ailleurs V est une réunion de fibres de π, on en déduit que $U \cap V$ est non vide. Enfin, vu que U est connexe et que V est une réunion de composantes connexes de X_1 on voit que U est inclus dans V, si bien que $z \in \pi(V)$. $\square$

Références

[1] Masao Aoki : Hom stacks. *Manuscripta Math.*, 119(1):37–56, 2006.

[2] Sylvain Brochard : Finiteness theorems for the Picard objects of an algebraic stack. *Prépublication*, 2009.

[3] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28):255, 1966.

[4] Gérard Laumon et Laurent Moret-Bailly : *Champs algébriques*, volume 39 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.